NEWTONIN JA LAGRANGEN MEKANIIKAN PERUSLAIT

Jari Mäkinen
TTKK, Teknillinen mekaniikka
PL 589, 33101 TAMPERE
sähköposti: jari@mohr.me.tut.fi

TIIVISTELMÄ

Tässä esityksessä kootaan yhteen fysikaalisen ja matemaattisen Newtonin mekaniikan oppirakenteen peruslait sekä tietyn matemaattisen Lagrangen mekaniikan oppirakenteen peruslait.

JOHDANTO

Mekaniikka on fysikaalisten tieteiden ala, joka tutkii voimien vaikutusten alaisten kappaleiden lepoa ja liikettä. Mekaniikka voidaan jaotella eri tavoin joko pisteittäiseen mekaniikkaan (diskreettimekaniikka) tai jatkumomekaniikkaan (kontinuumi-), joko epäsuhteellisuusmekaniikkaan tai suhteellisuusmekaniikkaan, joko klassiseen mekaniikkaan tai kvanttimekaniikkaan, [Santilli, 1978, s. 219; Goldstein, 1990]. Klassisen mekaniikan järjestelmää, joka on lisäksi pisteittäinen ja epäsuhteellinen, kutsutaan newtonilaiseksi järjestelmäksi, jollaisia tässä esityksessä pelkästään käsitellään. Newtonin epäsuhteellista, klassista mekaniikkaa sanotaan tässä työssä lyhyesti vain klassiseksi mekaniikaksi.

Klassisen mekaniikan kirjallisuudessa on vallalla kaksi jaottelutapaa, jossa ensimmäisessä ajatellaan klassisen mekaniikan olevan yhtä suurta oppirakennetta ja toisessa klassinen mekaniikka jaetaan Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkaan. Toisinaan tähän luetteloon lisätään vielä D'Alembertin mekaniikka. Nämä mekaniikat poikkeavat peruslakiensa suhteen toisistaan.

Klassisen mekaniikan kirjat [Goldstein, 1990; Greenwood, 1977; Pars, 1965; Santilli 1978; Whittaker, 1989; Spiegell, 1980; Wells, 1967] edustavat ensin mainittua jaottelutapaa. Näissä kirjoissa lähtökohtana on Newtonin hiukkasmekaniikka (*particle mechanics*), josta lähtien johdetaan muut klassisessa mekaniikassa tunnetut yhtälöt ja periaatteet joko suoraan tai asettamalla lisäoletuksia tai määritelmiä. Näiden kirjojen esitys on *johdonmukainen* ja *oikea*, mutta lukija joutuu poimimaan käytetyt oletukset ja määritelmät itse tekstistä. Suurimpana vaarana on kehäpäätelmien teko, koska perusoletuksia ei ole suoraan esitetty.

Toisessa jaottelutavassa, jossa klassinen mekaniikka jaetaan Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkaan, edustavat kirjat [Arnold, 1978; Rosenberg, 1980; Keskinen, 1993]. Näissä kirjoissa klassinen mekaniikka pyritään jakamaan yksinkertaisempiin osa-alueisiin, vaikkakin lähtökohtana on Newtonin hiukkasmekaniikka. Myös näiden kirjojen esitys on *johdonmukainen* ja *oikea*, mutta lukijalle saattaa herätä kysymyksiä, mitkähän mahtoivat olla perusoletuksia, ja mitkä johdettuja lauseita. Varsinkin siirtyminen Newtonin mekaniikasta Lagrangen mekaniikkaan herättää tämänkaltaisia kysymyksiä.

Peruslakeihin pohjautuva fysikaalinen Newtonin hiukkasmekaniikka ja jäykän kappaleen mekaniikka eli niin sanottu vektoroitu mekaniikka on esitetty lukuisissa kirjoissa [Salmi 1996-1998; Kurki-Suoniot, 1990; Salonen 1989; Beer & Jonston 1976]. Nämä kirjat edustavat peruslakeihin nojautuvaa lähestymistapaa, missä kirjojen lähtökohtana on fysikaalisuus eli luonnontieteeseen ja havaintoihin pohjautuva lähtökohta.

Perusoletuksiin eli aksioomiin pohjautuvaa matemaattista lähestymistapaa edustaa Truesdellin kirja järkiperäisestä jatkumomekaniikasta (*rational continuum mechanics*) [Truesdell, 1977]. Siinä asetetaan ensin perusoletukset ja määritelmät, joiden pohjalta mekaniikassa käytetyt lauseet suoraan johdetaan. Truesdell erottaa toisistaan fysikaaliset oliot ja matemaattiset oliot ja asettaa matemaattisille olioille perusoletuksia eli aksioomia. Truesdellin määritelmän mukaan mekaniikka on matemaattisten mallien ääretön luokka, jolla pyritään mallintamaan luontoa jollakin tavalla tai näkökulmalla. Tätä perusoletuksiin nojautuvaa johtamistapaa voidaan pitää yhtenä tieteen tärkeimmistä tavoitteista. Tässä työssä pyritään esittämään Newtonin ja Lagrangen mekaniikan peruslait matemaattisesti ilman fysikaalista painolastia.

Desloge esittää kirjassaan klassiselle mekaniikalle viisi perusoletusta [Desloge, 1982, sivut 11, 12, 20, 56 ja 216]: inertiaalikehyksen (*inertial frame*) olemassaolon, suhteellisuusperiaatteen, kappaleen nopeuden ylärajattomuuden, kappaleiden vuorovaikutuslain sekä oletuksen järjestelmän sisäiselle voimasysteemille. Näiden perusoletusten pohjalta voidaan johtaa jatkavuuden lause (Newtonin I laki), voiman ja vastavoiman lause (Newtonin III), lisäksi voima määritellään Newtonin II lain avulla sekä massalle annetaan oma määritelmänsä, mikä perustuu kappaleiden törmäykseen.

Tässä työssä ensin määritellään käsitteet hiukkanen ja jäykkä kappale sekä kootaan yhteen mekaniikan peruslakeja: fysikaalisen Newtonin hiukkasmekaniikan ja jäykän kappaleen mekaniikan peruslait; matemaattisen Newtonin hiukkasmekaniikan peruslait; matemaattisen Lagrangen hiukkasmekaniikan peruslait. Matemaattisella mekaniikalla tarkoitetaan mekaniikkaa, josta fysikaalinen eli luonnonilmiöihin ja havaintoihin sidottu painolasti on riisuttu. Peruslaeilla tarkoitetaan sekä perusoletuksia eli aksioomia eli postulaatteja että perusmääritelmiä, jotka olennaisia mekaniikan oppirakenteen kannalta.

HIUKKANEN, JÄYKKÄ KAPPALE JA VAPAA KAPPALE

Hiukkasen määritelmä: Hiukkasella (*particle*) tarkoitetaan kappaletta, jonka mitat ovat kyseessä olevan tehtävän kannalta epäoleellisia.

Jäykän kappaleen määritelmä: Jäykällä kappaleella tarkoitetaan kappaletta, joka koostuu äärellisestä määrästä hiukkasia, joiden keskinäinen etäisyys pysyy muuttumattomana kuormitettiin kappaletta miten tahansa.

Vapaan kappaleen määritelmä: Vapaalla kappaleella tarkoitetaan kappaletta, joka ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa [Kurki-Suoniot, 1990, s. 89]

FYSIKAALISEN NEWTONIN MEKANIIKAN PERUSLAIT

Hiukkasjärjestelmän ja jäykän kappaleen järjestelmän fysikaalisen Newtonin mekaniikan oppijärjestelmän perustana ovat seuraavat 7 peruslakia:

1. On olemassa absoluuttinen, fysikaalinen euklidinen paikka-avaruus ja absoluuttinen fysikaalinen aika.
2. Voima on fysikaalisen vektoriavaruuden alkio eli fysikaalinen vektorisuure, ts. voima toteuttaa suunnikassäännön. Voima on kiinteä eli vaikutuspisteessään vaikuttava vektorisuure.
3. Voiman siirtolaki: Jos voima, joka vaikuttaa jäykkään kappaleeseen, siirretään pitkin vaikutussuoraansa, sen ulkoinen vaikutus kappaleeseen pysyy muuttumattomana.
4. Jatkavuuden laki eli Newtonin I laki: Kaikki vapaat kappaleet liikkuvat tasaisesti ja suoraviivaisesti toistensa suhteen.
5. Dynamiikan peruslaki eli Newtonin II laki: Jos kappaleeseen vaikuttavien fysikaalisten voimien summa eli resultantti on $\vec{R}$, niin kappale saa fysikaalisen kiihtyvyyden $\vec{a}$, siten että on voimassa yhtälö

$$\vec{R} = m_{\mathrm{h}}\vec{a}$$

Verrannollisuuskerrointa m_{h} sanotaan hitaaksi massaksi.
6. Voiman ja vastavoiman laki eli Newtonin III laki: Jos hiukkanen A vaikuttaa hiukkaseen B jollakin voimalla, niin hiukkanen B vaikuttaa aina takaisin hiukkaseen A hiukkasten yhdysjanan suuntaisella, yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla.
7. Yleinen gravitaatiolaki eli Newtonin IV laki: Kaksi hiukkasta, joiden painavat massat ovat m_{p1} ja m_{p2} vetävät aina toisiaan puoleensa yhdysjanan suuntaisella voimalla, jonka suuruus on suoraan verrannollinen hiukkasten painaviin massoihin ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden r neliöön eli

$$F = \gamma \frac{m_{\mathrm{p1}} m_{\mathrm{p2}}}{r^2}$$

Verrannollisuuskerrointa γ kutsutaan gravitaatiovakioksi.

Edellä olevat peruslait on pitkälti lainattu kirjasta [Salmi, 1998, s. 17]. Perinteisesti neljäs peruslaki esitetään muodossa: Hiukkanen on levossa tai tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä aina, kun siihen ei vaikuta voimia tai siihen vaikuttavien voimien summa eli resultantti on nolla. Tätä kutsutaan hitauden laiksi. Neljäs peruslaki eli jatkavuuden laki on käsitteenmuodostuksen kannalta parempi, sillä lain avulla voidaan määrittää inertiaalikehys ja samalla joukko inertiaalikehyksiä, jotka ovat tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä toisiinsa nähden. Jatkavuuden laki tekee tasaisesta liikkeestä absoluuttisen eli havaitsijasta riippumattoman ominaisuuden sekä lisäksi asettaa ajalle ja avaruudelle euklidisuuden, homogeenisuuden ja isotrooppisuuden vaatimukset [Kurki-Suoniot, 1990, s. 89-91]. Toisaalta, jos hitauden laki korvataan jatkavuuden lailla, niin tasapainon käsite pitää erikseen määritellä, jolloin statiikka on dynamiikan erikoistapaus.

Dynamiikan peruslaki määrittelee hitaan massan kappalekohtaiseksi ominaisuudeksi, joten lakia ei voida käyttää voiman määrittelemiseen. Hitaan ja painavan massan samaistaminen eli ekvivalenttisuus on esitetty kirjoissa [Salmi, 1998, s. 87; Kurki-Suoniot, 1990, s. 91-92] sekä kinemaattisen kiihtyvyysvektorin ja fysikaalisen kiihtyvyysvektorin samaistaminen kirjassa [Salmi, 1996, liite I].

Kolmas ja kuudes peruslaki voidaan yhdistää, jos lait muotoillaan hieman toisin: Jos järjestelmän hiukkanen A vaikuttaa saman järjestelmän hiukkaseen B voimalla $\vec{F}_{\mathrm{BA}}$, niin hiukkanen B vaikuttaa hiukkaseen A hiukkasten yhdysjanan suuntaisella, yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$, lisäksi jäykälle kappaleelle pätee yhteys $\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}$. Tästä yhtäsuuruusehdosta seuraa voiman siirtolaki sekä se, että jäykkä kappale on sisäisesti tasapainossa. Voiman ajatellaan olevan toisen peruslain mukaisesti kiinteä vektorisuure, joka siis vaikuttaa avaruuden pisteessä eikä tätä vaikutuspistettä voida siirtää mielivaltaisesti muuttamatta järjestelmän liiketilaa.

Monasti myös ajatellaan Newtonin gravitaatiolain eli seitsemännen peruslain olevan vain eräs voimavaikutuskaava, kuten kitkavoimakaavat ja Hooken kaava, jolloin seitsemäs peruslaki voidaan poistaa. Tällöin on kuitenkin tehtävä lisäoletus, että hidas ja painava massa voidaan samaistaa.

MATEMAATTISEN NEWTONIN MEKANIIKAN PERUSLAIT

Hiukkasjärjestelmän matemaattisen Newtonin mekaniikan oppijärjestelmän perustana ovat seuraavat 6 perusoletusta (**O#)** ja 6 perusmääritelmää (**M#)**:

O1. On olemassa kiinteä, riippumaton, tasa-aineinen, geometrialtaan euklidinen, matemaattinen paikka-avaruus ja riippumaton, tasainen matemaattinen aikaparametri. On olemassa koko avaruuden peittävä kiinteä karteesinen paikkakoordinaatisto, jota kutsutaan kiinteäksi inertiaalikoordinaatistoksi, jossa mekaniikan lait ovat samanarvoisia eli ekvivalentteja asemasta, suunnasta ja ajan hetkestä riippumatta ja jossa mekaniikan lait saavat yksikertaisimman muodon.

O2. Suhteellisuusperiaate: Kaikki mekaniikan lait, jotka ovat voimassa kiinteässä inertiaalikoordinaatistossa, ovat voimassa myös kaikissa koordinaatistoissa, jotka ovat tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä tämän kiinteän inertiaalikoordinaatiston suhteen, ja saavat täsmälleen saman muodon. Näitä koordinaatistoja myös kutsutaan inertiaalikoordinaatistoiksi.

O3. Hiukkasen nopeudella ei ole ylärajaa minkään koordinaatiston suhteen.

O4. Massa eli ainepaljous on hiukkaselle ominainen häviämätön ja yhteenlaskettava skalaarisuure. Massalla on sekä hitaus- että vetovoimaominaisuudet, jotka samaistetaan.

O5. Vuorovaikutuslaki: Jos kaksi tai useampi muutoin vapaata hiukkasta ovat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa, niin suure

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

saa täsmälleen saman arvon ennen vuorovaikutusta ja vuorovaikutuksen jälkeen, missä n on vuorovaikuttavien hiukkasten lukumäärä ja m_i on hiukkasen i massa ja $\mathbf{v}_i$ on hiukkasen i matemaattinen (kinemaattinen) nopeus.

O6. Jos hiukkasten lukumäärä on mekaanisessa järjestelmässä riittävän suuri, niin järjestelmä käyttäytyy kuin hiukkasparin keskinäiset vuorovaikuttavat voimat suuntautuisivat pitkin hiukkasparin yhdyssuoraa.

M1. **Liikemäärä määritelmä:** Kiinteässä inertiaalikoordinaatistossa hiukkasen massan m ja nopeuden $\mathbf{v}$ tulo määritellään yhtä suureksi kuin hiukkasen matemaattinen liikemäärä $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

M2. **Voiman määritelmä** eli Newtonin II laki: Inertiaalikoordinaatistossa hiukkaseen vaikuttava matemaattinen voima **f** määritellään yhtä suureksi kuin hiukkasen liikemäärän muutosnopeus ajan suhteen eli aikaderivaatta

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}$$

tai samanarvoisesti

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a},$$

missä $\mathbf{a}$ on hiukkasen matemaattinen (kinemaattinen) kiihtyvyys ($\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$) ja m on hiukkasen massa.

M3. **Sisäisten ja ulkoisten voimien määritelmä:** Rajatun ja eristetyn järjestelmän sisäisillä voimilla tarkoitetaan saman järjestelmän hiukkasten keskinäisiä vuorovaikuttavia voimia. Voiman ja vastavoiman lauseen perusteella nämä voimat ovat saman suuruisia mutta vastakkaissuuntaisia voimia [Desloge, 1982, s. 60]. Voimat, jotka eivät ole sisäisiä, ovat ulkoisia voimia. Ulkoisilla voimilla ei ole vastavoimaa järjestelmän sisällä.

M4. **Liikemäärän momentin määritelmä:** Hiukkasen $\mathcal{H}$ liikemäärän momentti mielivaltaisen pisteen A suhteen määritellään

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

missä $\mathbf{r}$ on hiukkasen $\mathcal{H}$ etäisyys pisteestä A ja $\mathbf{p}$ on hiukkasen liikemäärä pisteeseen A nähden.

M5. **Momentin määritelmä:** Hiukkasen $\mathcal{H}$ momentti mielivaltaisen pisteen A suhteen määritellään

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f},$$

missä $\mathbf{r}$ on hiukkasen $\mathcal{H}$ etäisyys pisteestä A ja $\mathbf{f}$ on hiukkaseen $\mathcal{H}$ vaikuttava voima.

M6. **Staattisen tasapainon määritelmä:** Hiukkasjärjestelmän sanotaan olevan staattisessa tasapainossa, jos on mahdollista löytää inertiaalikoordinaatisto, jossa kaikki hiukkaset ovat levossa.

Peruslait, oletusta (**O4**) lukuun ottamatta, on lainattu suurimmalta osin kirjasta [Desloge, 1982]. Perusoletuksella (**O4**) asetetaan massan olemassaolo ja tietylle hiukkaselle ominainen massan suuruus. Massan häviämättömyyden oletus tarvitaan, sillä muutoinhan ei olisi takeita massan säilymiselle edes eristetyssä järjestelmässä. Perusoletusten luetteloa voidaan vielä täydentää energian häviämättömyyden oletuksella eli termodynamiikan ensimmäisellä pääsäännöllä, mutta tämä ei kuulu enää Newtonin mekaniikan piiriin.

Kaikki edellä olevat suureet ovat matemaattisia eikä niillä ole fysikaalista ominaisuutta, mutta niillä on fysikaalinen tulkinta fysikaalisen ja matemaattisen Newtonin mekaniikan peruslakien mukaisesti. Matemaattinen (kinemaattinen) asema ja nopeus määritellään kinematiikassa vapaiksi vektorisuureiksi, joten peruslakien mukaisesti matemaattinen liikemäärä ja matemaattinen voima ovat myös vapaita vektorisuureita, toisin sanoen asema- ja nopeusvektorit eivät ole kiinnitettyjä vaikutuspisteisiinsä. Kuitenkin vapaalla vektorisuureella on eräänlainen polttomerkki, joka ilmaisee mihin olioon kyseinen vektori vaikuttaa tai kuuluu.

Perusmääritelmän (**M2**) mukaisesti annetaan voimalle arvosisältö, joka vastaa liikemäärän muutosnopeutta, joten hiukkaseen vaikuttava voima on yhtä suuri, ei sama asia, kuin hiukkasen kokema liikemäärän muutosnopeus. Mainittakoon, että hitauden lause (Newtonin I laki), voiman ja vastavoiman lause (Newtonin III), liikemäärän säilyminen lause eristetyssä hiukkasjärjestelmässä ja voiman siirtolause jäykälle kappaleelle voidaan johtaa käyttäen perusoletuksia ja –määritelmiä, [Desloge, 1982, s. 12, 60, 57, 256]. Voiman ja vastavoiman lauseen perusteella vuorovaikuttavien voimien vaikutussuunnat eivät välttämättä kohtaa vaikutuspisteiden yhdyssuoran kanssa, joten kuudes perusoletus (**O6**) ei ole turha.

SIDOSTEN DIFFERENTIAALIGEOMETRIAA

Tavallisesti variaatio määritellään Gateaux-variaationa, siis eräänlaisena suuntimana, [Reddy, 1987, s. 154; Oden & Reddy, 1976, s.143; Sagan, 1969, s. 26]. Gateaux-variaatiota funktionaalista $\mathrm{I}(\mathbf{u})$ voidaan merkitä $\delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u})$, joka on homogeeninen muutoksen $\Delta\mathbf{u}$ suhteen ($\delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\lambda\Delta\mathbf{u}) = \lambda\delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u})$) mutta ei ole välttämättä additiivinen ($\delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u}_1 + \Delta\mathbf{u}_2) \neq \delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u}_1) + \delta_{\mathrm{g}}\,\mathrm{I}(\mathbf{u};\Delta\mathbf{u}_2)$). Gateaux-variaatio ei siis välttämättä linearisoi käsiteltävää funktionaalia.

Toisaalta tapauksissa, jossa Gateaux-variaatio on lineaarinen ja jatkuva muutoksen $\Delta\mathbf{u}$ suhteen, niin lineaarinen Gateaux-derivaatta on olemassa pisteessä $\mathbf{u}$ mutta ei ole välttämättä olemassa tämän pisteen ympäristössä. Varsinkin iteratiivisissa ratkaisumenetelmissä on järkevää vaatia, että Gateaux-derivaatta on lineaarinen pisteessä $\mathbf{u}$ ja on olemassa myös pisteen ympäristössä, tällöin Gateaux- ja Fréchet-derivaatat ovat olemassa ja saavat saman arvon, [Oden & Reddy, 1976, s. 24].

On siis varsin perusteltua määritellä variaatio Fréchet-variaationa, jolloin variaatioon liittyvä Fréchet-derivaatta on pisteessä $\mathbf{u}$ lineaarinen ja jatkuva, ja derivaatta on olemassa myös tämän pisteen ympäristössä.

Seuraavassa esitellään lyhyesti mekaanisen järjestelmän sidoksiin liittyvää differentiaaligeometriaa, mikä on pitkälti poimittu kirjoista [Abraham ja muut, 1983; Marsden & Hughes, 1983; Rheinbold, 1986; Arnold, 1978]

Differentioituvuuden määritelmä: Olkoon $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{F}$ euklidisia avaruuksia. Kuvaus $\mathbf{h}\colon \mathscr{U} \subset \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U}$, jos on olemassa lineaarinen operaattori $\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{u}_0) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ siten, että

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}_0) + \mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{u}_0)\cdot\Delta\mathbf{u} + \omega(\mathbf{u}_0,\Delta\mathbf{u}), \tag{1}$$

missä $\lim\limits_{\Delta\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \dfrac{\|\omega(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})\|_{\boldsymbol{F}}}{\|\Delta\mathbf{u}\|_{\boldsymbol{E}}} = 0$ ja $\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \in \mathscr{U}$.
Euklidisella avaruudella tarkoitetaan reaalista, äärellisulotteista sisätuloavaruutta, jossa normina on euklidinen normi.

Jos kuvaus on differentioituva pisteessä $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U}$, niin kuvaus on myös jatkuva tässä pisteessä. Lineaarista operaattoria $\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{u}_0) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ sanotaan Fréchet-derivaataksi, joka on lineaarinen äärellisen muutoksen $\Delta\mathbf{u}$ suhteen ja on olemassa myös pisteen $\mathbf{u}_0$ ympäristössä. Operaattoria $\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{u}_0)\cdot\mathrm{d}\mathbf{u}$, missä $\mathrm{d}\mathbf{u}$ on differentiaalinen muutos, sanotaan Fréchet-differentiaalioperaattoriksi, joka tavallisesti merkitään $\mathrm{d}\mathbf{h}(\mathbf{u};\mathrm{d}\mathbf{u})$ tai yksinkertaisemmin $\mathrm{d}\mathbf{h}$.

Mekaniikassa on järkevää eritellä muuttujat asettamalla $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{V} \times \mathbb{R}$, missä $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ edustaa asemamuuttujaa, $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ nopeusmuuttujaa ja $t \in \mathbb{R}$ aikaa. Tällöin saadaan kuvaukseksi

$$\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \Delta\mathbf{x} + \mathrm{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \Delta\mathbf{v} + \mathrm{D}_{t}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \Delta t, \tag{2}$$

missä merkinnät $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}, \mathrm{D}_{\mathbf{v}}, \mathrm{D}_{t}$ edustavat Fréchet-osittaisderivaattoja.

Määritelmä: Mekaanisen järjestelmän sidosta sanotaan holonomiseksi, jos sidosehto $\mathbf{g}: \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \boldsymbol{G}_1 \subset \boldsymbol{X}$ voidaan esittää (äärellisessä) muodossa

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Joukko $\mathscr{U}$ on euklidisen avaruuden $\boldsymbol{X}$ avoin joukko, missä sidosehto on määritelty. Vaaditaan lisäksi, että kuvaus $\mathbf{x} \times t \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ on jatkuva ja sen derivaatta on jatkuva, ts. $\mathbf{g} \in \mathscr{C}^1$. Vastaavasti, jos sidosta ei voida esittää yllä olevassa muodossa, sidosehtoa sanotaan epäholonomiseksi. Eräs epäholonominen sidostyyppi voidaan esittää differentiaalisessa eli Pfaffin muodossa (1-muodossa) seuraavasti

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathrm{d}t = \mathbf{0} \tag{4}$$

missä operaattoreilta $\mathbf{B}: \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{G}_2)$ ja $\mathbf{b}: \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, \boldsymbol{G}_2)$ vaaditaan jatkuvuus muuttujien $\mathbf{x}$ ja t suhteen. Tämä vaatimus rajaa impulsiiviset sidosvoimat tarkastelun ulkopuolelle. Myöskin kaikki holonomiset sidokset voidaan esittää Pfaffin muodossa, sillä sidosehdon (3) differentiaali on

$$\mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{D}_{t}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathrm{d}t = \mathbf{0}, \tag{5}$$

missä $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{G}_2)$ ja $\mathrm{D}_{t}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \boldsymbol{G}_2)$. Käänteinen ei välttämättä päde, koska kaikkia Pfaffin muotoisia sidoksia ei voida lausua äärellisessä, holonomisessa muodossa (3), [Rosenberg, 1980, s. 45-48].

Jatkossa oletetaan, että lineaarinen operaattori $\mathbf{D}: \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2)$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t_0) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

on surjektiivinen, jolloin operaattorin matriisiesityksen rangi on täysi.

Holonomiset sidokset muodostavat euklidiseen asema-avaruuteen $\boldsymbol{X}$ Riemannin moniston (*Riemannian manifold*) $\mathscr{M}$, joka voidaan määritellä

$$\mathscr{M} = \left\{ \mathbf{x} \times t \in \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \times \mathbb{R} \,\middle|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \right\}, \tag{7}$$

missä aika t voidaan ajatella olevan moniston $\mathscr{M}$ parametri. Kiinnittämällä aika ja asettamalla $t = t_0 \in \mathbb{R}$ voidaan lausua holonomisten sidosehtojen muodostama monisto $\mathscr{M}_{t_0}$ ajan hetkellä t_0 seuraavasti

$$\mathscr{M}_{t_0} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathscr{U} \subset \boldsymbol{X} \,\middle|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0} \right\} \tag{8}$$

Variaation määritelmä: Kuvauksen $\mathbf{h}:\mathscr{X} \subset \boldsymbol{X}\times\mathscr{V} \subset \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{F}$ (Fréchet) variaatio $\delta\mathbf{h}$ pisteessä $(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathscr{X}\times\mathscr{V}$ voidaan määritellä kaavan (2) erikoistapauksena

$$\delta\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v},t_0) = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v},t_0)\cdot\delta\mathbf{x} + \mathrm{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v},t_0)\cdot\delta\mathbf{v}, \tag{9}$$

missä aseman $\mathbf{x}$ ja (äärellisen) virtuaalisen siirtymän $\delta\mathbf{x}$ muodostama pari $(\mathbf{x},\delta\mathbf{x})$ sidosehdoilla (3) ja (4) kuuluu vektorikimppuun $\mathscr{W}$ (*vector bundle*), joka määritellään

$$\mathscr{W} = \left\{ \mathbf{x},\delta\mathbf{x} \in \boldsymbol{X} \,\middle|\, \mathbf{x}\in\mathscr{M}_{t_0},\ \begin{pmatrix}\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t_0)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t_0)\end{pmatrix}\cdot\delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}. \tag{10}$$

Virtuaalista siirtymää voidaan kutsua myös lumesiirtymäksi. Vektorikimppu on säikeinen monisto, jonka jokaiseen pisteeseen voidaan liittää vektoriavaruus. Variaatiossa aikaa pidetään kiinnitettynä asettamalla $t = t_0$. Fréchet-derivaatan lineaarisuudesta johtuen myös variaatio-operaattori $\delta: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ on lineaarinen, ts. $\delta \in \mathscr{L}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F})$.

Äärelliselle virtuaalinen nopeudelle $\delta\mathbf{v}$ ei yhtälöiden (3) ja (4) kaltaisilla sidoksilla aseteta ehtoja, mutta virtuaalisen nopeuden on kuitenkin toteutettava differentiaaliyhtälö

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right) = \delta\mathbf{v}. \tag{11}$$

Merkitsemällä $\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{v},t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ nähdään, että paikan $\mathbf{x}$ variaatio on yhtä suuri kuin virtuaalinen siirtymä, ts. $\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}$. Samoin nopeuden variaatio on yhtä suuri kuin virtuaalinen nopeus, ts. $\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$. Variaatio ja aikaderivaatta eivät yleisesti ottaen ole vaihdannaisia, sillä esimerkiksi olkoon $\dot{\mathbf{x}} = t\dot{\mathbf{y}}$, jonka variaatio on $\delta\dot{\mathbf{x}} = t\delta\dot{\mathbf{y}}$. Toisaalta virtuaalisen siirtymän $\delta\mathbf{x} = t\delta\mathbf{y} \Leftrightarrow \delta\mathbf{x} = t\delta\mathbf{y}$ aikaderivaatta on

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = t\frac{\mathrm{d}(\delta\mathbf{y})}{\mathrm{d}t} + \delta\mathbf{y}, \tag{12}$$

joka on selvästi eri suuri kuin $\delta\dot{\mathbf{x}} = t\delta\dot{\mathbf{y}}$. Sidosehtohan $\dot{\mathbf{x}} = t\dot{\mathbf{y}}$ on epäholonominen, joka ei muodosta differentoituvaa monistoa. Tämä hieman yllättäväkin tulos on huomattu ainakin kirjassa [Burge, 1996, s. 314]. Holonomisilla sidoksilla, jotka siis muodostavat differentoituvan moniston, variaatio ja aikaderivaatta ovat kuitenkin vaihdannaisia, ainakin muodollisesti.

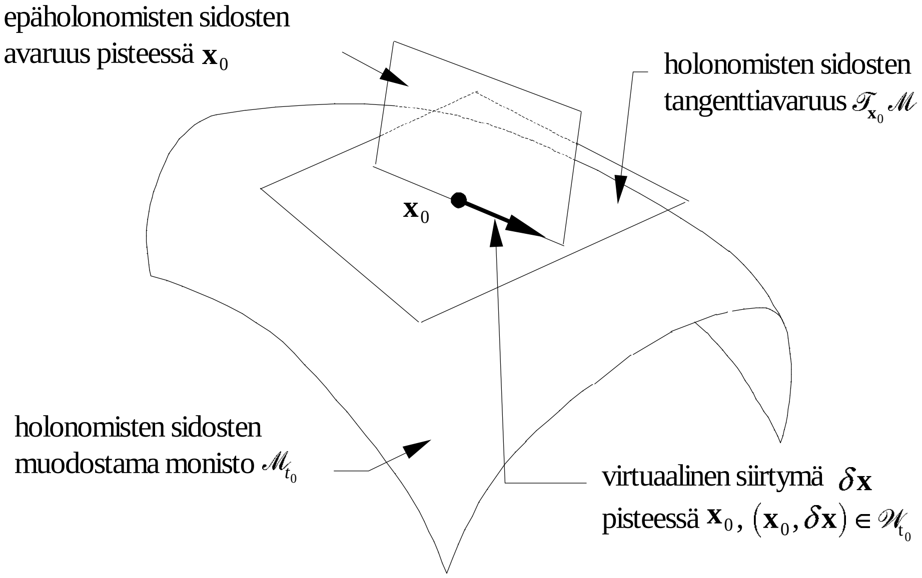
Mikäli järjestelmässä on vain holonomisia sidoksia (3), niin säikeinen monisto $\mathscr{W}$ yksinkertaistuu tangenttikimpuksi (*tangent bundle*) $\mathscr{TM}$

$$\mathscr{TM} = \left\{ \mathbf{x},\delta\mathbf{x} \in \boldsymbol{X} \,\middle|\, \mathbf{x}\in\mathscr{M}_{t_0},\ \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},t_0)\cdot\delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \tag{13}$$

Tangenttikimppu on säikeinen monisto, jonka jokaiseen pisteeseen voidaan liittää tangenttiavaruus. Edellä on oletettu, että ajan hetkeä pidetään kiinnitettynä asettamalla $t = t_0$. Samoin tietyn pisteen asemaa $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ voidaan pitää kiinnitettynä, jolloin tangenttikimppu kutistuu tangenttiavaruudeksi

$$\mathscr{T}_{\mathbf{x}_0}\mathscr{M} = \left\{ \delta\mathbf{x} \in \boldsymbol{X} \,\middle|\, \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0,t_0)\cdot\delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \tag{14}$$

Säikeisen moniston nimitys tangenttiavaruudeksi on perusteltua, sillä tangenttiavaruus $\mathscr{T}_{\mathbf{x}_0}\mathscr{M}$ missä tahansa moniston $\mathscr{M}_{t_0}$ pisteessä $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{M}_{t_0}$ on yhtä suuri kuin derivaatan $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t_0)$ nolla-avaruus, ts. $\ker \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t_0)$ tässä pisteessä. Kuvassa 1 on esitetty geometrinen tulkinta virtuaaliselle siirtymälle.



Kuva 1. Virtuaalisen siirtymän geometrinen tulkinta

MATEMAATTISEN LAGRANGEN MEKANIIKAN PERUSLAIT

Matemaattisen Lagrangen mekaniikan perusoletukset voidaan asettaa täsmälleen samoiksi kuin matemaattisen Newtonin mekaniikan kuusi perusoletusta (**O1-O6**) vain perusmääritelmissä on hieman eroja. Peruslähtökohta Lagrangen mekaniikassa on eritellä voimat sidosvoimiin $\mathbf{F}^{\mathrm{s}}$ ja voimiin, jotka eivät ole sidosvoimia, joita kutsutaan annetuksi voimiksi $\mathbf{F}^{\mathrm{a}}$. Eri voimatyypit voidaan tunnistaa virtuaalisen työn eli lumetyön avulla.

Virtuaalisen työn määritelmä: Mekaanisen järjestelmän virtuaalisella työllä tarkoitetaan lineaarista funktionaalia δW, jonka määrittelyalue on vektorikimpun $\mathscr{V}$ toimintapisteen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in \mathscr{M}_{t_0}$ vektoriavaruus $\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}$

$$\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0} = \left\{ \delta\mathbf{x} \in X \,\middle|\, \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, t_0) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, t_0) \end{pmatrix} \cdot \delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}. \tag{15}$$

Virtuaalinen työ on siis lineaarinen kuvaus $\delta W : \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0} \to \mathbb{R}$. Lineaaristen funktionaalien eli kuvausten $\mathscr{L}(\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}, \mathbb{R})$ muodostamaa avaruutta merkitään tavallisesti $\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^*$. Koska siirtymät ja voimat muodostavat työkonjugaatin, niin virtuaalinen työ voidaan esittää duaalisena parina

$$\delta W = \mathbf{F}^{\mathrm{a}} \cdot \delta\mathbf{x}, \tag{16}$$

missä virtuaalisen siirtymän $\delta\mathbf{x} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}$ duaalinen pari on voima $\mathbf{F}^{\mathrm{a}} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^*$, jota kutsutaan annetuksi voimaksi.

Sidosvoimien määritelmä: Sidosvoimat $\mathbf{F}^{\mathrm{s}}$ ovat voimia, joiden virtuaalinen työ on nolla kaikilla virtuaalisilla siirtymillä $\delta\mathbf{x} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}$, ts.

$$\delta W = \mathbf{F}^{\mathrm{s}} \cdot \delta\mathbf{x} = 0, \qquad \forall\, \delta\mathbf{x} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0} \tag{17}$$

tällöin $\mathbf{F}^{\mathrm{s}} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*\perp}$. Vaatimusta voidaan myös pitää ortogonaalisuusehtona.

Annettujen voimien määritelmä: Voimat, jotka kuuluvat sidosvoima-avaruuden ortogonaalikomplementtiin $\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*}$, ovat annettuja voimia $\mathbf{F}^{\mathrm{a}}$. Annettu voima $\mathbf{F}^{\mathrm{a}}$ on duaalinen pari virtuaaliselle siirtymälle $\delta\mathbf{x} \in \mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}$. Vektoriavaruudet $\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*\perp}$ ja $\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*}$ muodostavat jaon voima-avaruudelle, jota voidaan merkitä $\boldsymbol{F}=\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*}\oplus\mathscr{V}_{\mathbf{x}_0}^{*\perp}$ ja $\mathbf{F}^{\mathrm{a}}+\mathbf{F}^{\mathrm{s}}\in \boldsymbol{F}$.

Matemaattisen Lagrangen mekaniikan perusoletukset voidaan asettaa täsmälleen samoiksi kuin matemaattisen Newtonin mekaniikan perusoletukset (**O1-O6**) ja perusmääritelmät eroavat vain määritelmän (**M3**) osalta:

M3a. Virtuaalisen työn määritelmä
M3b. Sidosvoimien määritelmä
M3c. Annettujen voimien määritelmä

Lagrangen mekaniikassa on huomattavasti enemmän matemaattista rakennetta kuin Newtonin mekaniikassa, sillä Lagrangen mekaniikkaan on sisällytettävä jonkin verran differentiaaligeometriaa ja analyysia.

Tarkastellaan seuraavassa matemaattisen Newtonin mekaniikan hiukkasjärjestelmän ongelmaa

$$\mathbf{F} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

missä $\mathbf{F} \in \mathbb{F}^n \equiv \left(\mathbb{E}^n\right)^*$ on hiukkasjärjestelmään vaikuttava voimavektori, $\mathbf{M} \in \mathscr{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{F}^n)$ on hitausoperaattori (massamatriisi), $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ on kiihtyvyysvektori ($\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$) ja $\mathbb{E}^n$ on n-ulotteinen euklidinen paikka-avaruus sekä $\mathbb{F}^n$ vastaava voima-avaruus. Lisäksi vaaditaan, että siirtymät toteuttavat holonomiset sidosehdot $\mathbf{g}\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{19}$$

missä $m < n$. Yhtälöt (18) ja (19) muodostavat ylimäärätyn yhtälöryhmän, jossa tuntemattomia on n kappaletta ja yhtälöitä on m+n kappaletta.
Lagrangen mekaniikassa voima $\mathbf{F}$ voidaan jakaa sidosvoimaan ja annettuun voimaa, ts. $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathrm{s}} + \mathbf{F}^{\mathrm{a}}$. Laskemalla yhtälön (18) virtuaalinen työ ja huomioimalla, että sidosvoimien virtuaalinen työ on nolla, saadaan tulos

$$\delta W = \left(\mathbf{F}^{\mathrm{a}} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{a}\right)\cdot\delta\mathbf{x} = 0 \tag{20}$$

missä annetulla sidosehdolla (19) virtuaalinen siirtymä kuuluu sidosmoniston $\mathscr{M}$ tangenttiavaruuteen $\delta\mathbf{x} \in \mathscr{T}_{\mathbf{x}_0}\mathscr{M}$. Sidosmonisto on tässä tapauksessa yksinkertaisesti

$$\mathscr{M} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\right\}, \tag{21}$$

jonka tangenttiavaruus toimintapisteessä $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ on vastaavasti

$$\mathscr{T}_{\mathbf{x}_0}\mathscr{M} = \left\{ \delta\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \middle| \, \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \cdot \delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} \tag{22}$$

Tavallisesti yhtälöt (19-22) esitetään muodossa:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{F}^{\mathrm{a}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}\right) \cdot \delta\mathbf{x} = 0, &&\text{missä virtuaalinen siirtymä } \delta\mathbf{x} \text{ toteuttaa ehdon} \\ &\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \cdot \delta\mathbf{x} = 0 &&\text{ja asema } \mathbf{x} \\ &\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{23}$$

Lagrangen kertoimen menettelyllä yhtälöt (19-22) ja vastaavasti (23) ovat samanarvoisia (ekvivalentteja) yhtälöiden [Abraham ja muut, 1983; Rosenberg, 1980]

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{F}^{\mathrm{a}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} - \boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0)\right) \cdot \delta\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \delta\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \\ &\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{24}$$

kanssa, missä Lagrangen kerroinvektori $\boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{L}(\mathbb{E}^m, \mathbb{R}) = \mathbb{F}^m$ ja $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^m)$. Tällöin yhdistetty kuvaus $\boldsymbol{\lambda} \circ \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{F}^n$. Yhtälöä (24) sanotaan d'Alembertin periaatteen Lagrangen muodoksi [Rosenberg, 1980]. D'Alembertin periaate on keskeisessä osassa analyyttisessä Lagrangen mekaniikassa, jossa tätä periaatetta käyttäen voidaan johtaa muut Lagrangen mekaniikan periaatteet. Periaate-sanan käyttö tässä yhteydessä on varsin kyseenalaista, sillä d'Alembertin periaate johdettiin puhtaasti määrittelypohjalta käyttäen virtuaalisen työn ja sidosvoimien määritelmiä.

Koska yhtälössä (24) virtuaalinen siirtymä $\delta\mathbf{x}$ on täysin vapaa, niin yhtälö (24) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{\mathrm{a}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} - \left(\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0)\right)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{25}$$

missä transpoosi $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$. Vertaamalla yhtälöitä (18) ja (25) nähdään, että sidosvoima $\mathbf{F}^{\mathrm{s}} = -\left(\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \in \mathscr{T}_{\mathbf{x}_0}\mathscr{M}^{*\perp}$, ts. sidosvoimat voidaan lausua sidosehdon derivaatan vaakarivien lineaariyhdistelmänä.

Analyyttisen mekaniikan kirjallisuudessa [Rosenberg, 1980; Greenwood, 1977] ns. yleistetyillä koordinaateilla on keskeinen osa. Yleistetty koordinaatisto on itse asiassa sidosmoniston parametrisointi, jonka paikallisen olemassaolon implisiittifunktiolause takaa [Abraham ja muut, 1983, s. 107]. Yleistetty koordinaatisto sidosehdon (19) tapauksessa on kuvaus $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}): \mathbb{E}^{n-m} \to \mathscr{M}$, joten sidosehto $\mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$ toteutuu automaattisesti. Suorittamalla muuttujan vaihto $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})$ voidaan yhtälöt (18) ja (19) muuttaa ns. tilayhtälömuodoksi, jossa ei ole lainkaan sidosehtoja.

YHTEENVETO

Tässä työssä on käsitelty ja koottu yhteen fysikaalisen ja matemaattisen Newtonin mekaniikan oppirakenteen peruslait sekä matemaattisen Lagrangen mekaniikan oppirakenteen peruslait. Matemaattisessa Newtonin ja Lagrangen mekaniikan esittelyssä on eritelty peruslait perusoletuksiin sekä perusmääritelmiin. Keskeisin perusmääritelmä on voiman määritelmä eli Newtonin II laki. Matemaattiset Newtonin ja Lagrangen mekaniikat eroavat vain perusmääritelmiensä suhteen, lisäksi Lagrangen mekaniikkaan sisällytetään jonkin verran differentiaaligeometriaa.

LÄHTEET

Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T., (1983), *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Addison-Wesley, 582 s..
Arnold, V. I., (1978), *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 462 s..
Beer, F.P., Johnston, E.R., (1976), *Mechanics for Engineers, Statics*, McGraw-Hill, 3. p., 410 s..
Burke, W.L., (1996), *Applied Differential Geometry*, Cambridge University Press, 414 s..
Desloge, E. A., (1982), *Classical Mechanics, volume 1*, John Wiley & Sons, 507 s..
Goldstein, H., (1990), *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2. toim., 672 s..
Greenwood, D. T., (1977), *Classical Dynamics*, Prentice-Hall, 337 s..
Keskinen, R., (1993), *Analyyttinen mekaniikka*, Limes ry, 121 s..
Kurki-Suonio, K., Kurki-Suonio, R., (1990), *Vuorovaikuttavat kappaleet – mekaniikan perusteet*, Limes ry, 450 p..
Marsden, J. E., Hughes ,T. J. R., (1983), *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, 556 s..
Oden, J.T., Reddy, J.N., (1976), *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer, 302 s..
Pars, L. A., (1965), *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, 641 s..
Reddy, J.N., (1987), *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, 2. p., 546 s..
Rheinboldt, W. C., (1986), *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, John Wiley & Sons, 2. p., 299 s..
Rosenberg, R. M., (1980), *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum, 2. p., 424 s..
Sagan , H., (1969), *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill, 449 s..
Salmi, T., (1996), *Dynamiikka 1, Kinematiikka*, Pressus, 4. p., 226 s..
Salmi, T., (1997), *Dynamiikka 2, Kinetiikka*, Pressus, 2. p., 312 s..
Salmi, T., (1998), *Statiikka*, Pressus, 388 s..
Salonen, E.-M., (1989), *Dynamiikka*, Otakustantamo, 3 p., 458 s..
Santilli, R. M., (1978), *Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer, 266 s..
Spiegell, M. R., (1980), *Schaum's outline of theory and problems of theoretical mechanics with an introduction to Lagrange's equation and Hamiltonian theory*, McGraw-Hill, SI toim., 368 s..
Truesdell, C., (1977), *A First Cource in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, 280 s..
Wells, D A., (1967), *Schaum's outline of theory and problems of dynamics : with a treatment of Euler's equations of motion, Hamilton's equations and Hamilton's principle*, McGraw-Hill, 353 s..
Whittaker, E. T., (1989*), A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge, 4. toim. 2. p., 456 s..