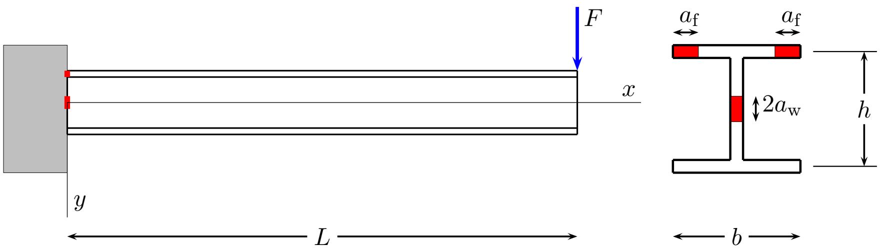
MEI-32010 Murtumismekaniikka

Tentti 16.12.2015

Tehtävä 1

Oheisessa ulokepalkissa, jonka poikkileikkaus on I-profiili, on kaksi (tässä piti lukea kolme) säröä. Uumassa on tuella symmetrisesti neutraaliakselin molemmin puolin sijoittuva särö, jonka pituus on $2a_\mathrm{w} = 2t$. Kuinka pitkiä on ylälaipan kärjissä olevien laipan läpi ulottuvien säröjen oltava, mitta a_f, jotta ne olisivat vaarallisemmat kuin uuman särö. Uuman paksuus on t ja laipan vastaavasti $3t/2$ja rakenteella on mittasuhteet $L/h = 10$, $h/t = 50$ ja $b = h/2$. Liukumuodon II murtumissitkeys on $K_\mathrm{IIc} = (\sqrt{3}/2)K_\mathrm{Ic}$. Leikkausvoiman voi olettaa jakautuvan tasan uuman korkeudelle. Uuman osuus taivutusjännityksiin voi olettaa merkityksettömäksi. Taivutusjännitykset voi olettaa myös vakioksi laipoissa.

Tenttipaperin loppupuolella on taulukoituna jännitysintensiteettikertoimia.



Ratkaisu

Tuen taivutusmomentin itseiarvo on $M = FL$, ja olettamalla ideaali I-profiili, saadaan laippojen jännitysten resultantiksi $M = \sigma \frac{3}{2} tbh$, josta saadaan

$$\sigma = \frac{2F}{3tb}\frac{L}{h}.$$

Jännitysintensiteettikerroin laipan säröille on $K_\mathrm{I} = f\sigma\sqrt{\pi a_\mathrm{f}}$, jossa $f = 1,12$.

Uuman leikkausjännitys on $\tau = F/th$ ja jännitysintensiteettikerroin $K_\mathrm{II} = \tau\sqrt{\pi a_\mathrm{w}}$, jossa nyt $a_\mathrm{a} = t$.

Tehtävässä kysytty ehto on

$$\frac{K_\mathrm{I}}{K_\mathrm{Ic}} > \frac{K_\mathrm{II}}{K_\mathrm{IIc}},$$

josta saadaan

$$\frac{f\dfrac{2F}{3tb}\dfrac{L}{h}\sqrt{\pi a_\mathrm{f}}}{\dfrac{F}{th}\sqrt{\pi a_\mathrm{w}}} > \frac{K_\mathrm{Ic}}{\frac{\sqrt{3}}{2}K_\mathrm{Ic}},$$

ja edelleen

$$a_\mathrm{f} > 3\left(\frac{b}{L}\right)^2\frac{t}{f^2} \approx 6\cdot 10^{-3}t.$$

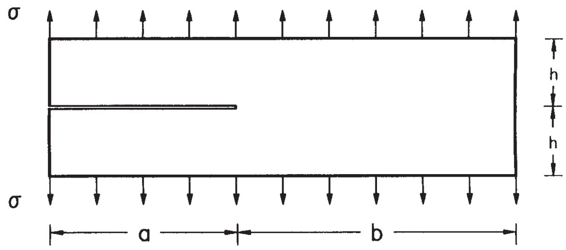
Tehtävä 2

Määritä oheisen särötapauksen säröä ajavan voiman $\mathcal{G}$ lauseke. Voimaohjatulle kuormitustapaukselle säröä ajava voima voidaan ilmaista

$$\mathcal{G} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\Pi^{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}A},$$

jossa Π^{int} on muodonmuutosenergia ja A on särön pinta-ala. Palkin leveys on t. Eulerin-Bernoullin palkkimallissa muodonmuutosenergian lauseke on

$$\Pi^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x.$$



Ratkaisu

Ulokepalkin taivutusmomentti on (origo vapaassa päässä)

$$M = -\frac{1}{2}qx^2, \qquad \text{jossa} \qquad q = \sigma t.$$

Säron pinta-ala-alkio $\mathrm{d}A = t\mathrm{d}a$ ja palkin jäyhyysmomentti on $I = th^3/12$. Muodonmuutosenergia Π^{int} on

$$\Pi^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2EI}\int_0^a \frac{1}{4}q^2x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\frac{q^2}{EI}a^5 = \frac{3}{5}\sigma^2 t a^5 h^{-3} E^{-1}.$$

Säröä ajavaksi voimaksi saadaan nyt

$$\mathcal{G} = \frac{\mathrm{d}\Pi^{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\Pi^{\mathrm{int}}}{t\mathrm{d}a} = 3\frac{\sigma^2 a^4}{Eh^3}.$$

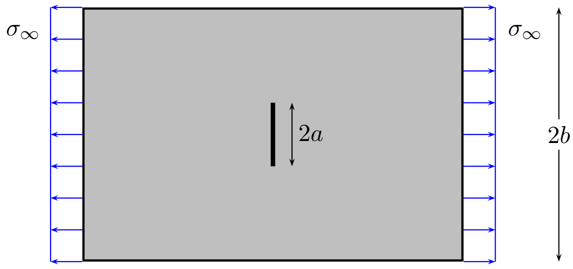
Tehtävä 3

1. Kerro lyhyesti ja selkeästi mihin oletuksiin Irwinin ja Dugdalen plastisuuskorjaukset perustuvat.

2. Määritä Irwinin menetelmällä oheisen keskisen $2a$ mittaisen särön kriittinen pituus a_c suhteessa levyn korkeuteen b kun materiaalin murtumissitkeys on $K_\mathrm{Ic} = \frac{1}{5}\sigma_0\sqrt{b}$, jossa σ_0 on materiaalin myötölujuus. Kuormitus on $\sigma_\infty = \xi\sigma_0$. Piirrä a_c/b kuormituksen $\xi = \sigma_\infty/\sigma_0$ funktiona välillä $\xi \in (0, 1)$. Mitä voit sanoa tuloksesta?

Särön tehollinen pituus Irwinin mallin mukaan on

$$a_\mathrm{eff} = a + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_\mathrm{I}}{\sigma_0}\right)^2.$$



Ratkaisu

Tehollinen jännitysintensiteettikerroin on $K_\mathrm{Ieff} = \sigma_\infty\sqrt{\pi a_\mathrm{eff}}$, sijoitetaan tähän Irwinin tehollisen pituuden lauseke, jolloin saadaan

$$K_\mathrm{Ieff}^2 = K_\mathrm{Ic}^2 = \sigma_\infty^2\pi\left(a + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_\mathrm{Ic}}{\sigma_0}\right)^2\right).$$

Ratkaisemalla säröNpituus a saadaan lauseke

$$a = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{\xi^2} - 1\right)\left(\frac{K_\mathrm{Ic}}{\sigma_0}\right)^2,$$

josta

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{50\pi}\left(\frac{2}{\xi^2} - 1\right).$$

Kuten kuvaajasta voidaan havaita, hyvin pienillä ξ:n arvoilla mali ei enää anna järkeviä tuloksia, mikä on varsin luonnollista koska plastisen alueen koko on tällöin hyvin pieni.

Tehtävä 4

Findleyn väsymismallissa väsymismurto tapahtuu mikäli

$$\max(\tau_{\mathrm{a},n} + k\sigma_n) \geq f,$$

jossa $\tau_{\mathrm{a},n}$ on leikkausjännitysamplitudi tasossa, jonka normaali on $\boldsymbol{n}$ ja σ_n on normaalijännitys samassa tasossa.

1. Kerro lyhyesti ja selkeästi miten materiaaliparametrit k ja f määritetään.

2. Tarkastellaan suhteista kuormitustapausta

$$\sigma_x = \sigma_\mathrm{a}(1 - \cos\omega t), \qquad \sigma_y = -\sigma_\mathrm{a}(1 - \cos\omega t),$$

   eli x-suuntainen jännityskomponentti on vetävä tykyttävä ja vastaavasti y-suuntainen komponentti tykyttävä puristava. Oletetaan, että tunnetaan k ja vaihtuva leikkausväsymislujuusamplitudi τ_af, jolloin $f = \sqrt{1+k^2}\,\tau_\mathrm{af}$, määritä tehtävän tapauksen väsymislujuusamplitudi σ_a lausuttuna k:n ja τ_af:n avulla.

Tason, jonka normaali muodostaa x-akselin suhteen kulman θ, yksikkönormaali- ja tangenttivektorit ovat $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)^T$ ja $\boldsymbol{s} = (\sin\theta, -\cos\theta)^T$.

Ratkaisu

Merkitään kuormituksen aikafunktiota lyhyesti $h(t) = 1 - \cos\omega t$. Leikkausjännitys τ_n on siten

$$\tau_n = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{s} = -2\sin\theta\cos\theta\sigma_\mathrm{a}h(t),$$

eli leikkausjännitys kyseisellä tasolla vaihtelee arvojen $-4\sin\theta\cos\theta\sigma_\mathrm{a}$ ja 0 välilä, joten laikkausjännitysamplitudi on $\tau_{\mathrm{a},n} = 2\sin\theta\cos\theta$. Tason normaalijännitys on vastaavasti

$$\sigma_n = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)h(t),$$

joten suurin normaalijännitys on $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sigma_\mathrm{a}$.

Findleyn ehto voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$\left[2\sin\theta\cos\theta + 2k(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right]\sigma_\mathrm{a} = f.$$

Täten

$$\sigma_\mathrm{a} = \frac{f}{\max g(\theta)}, \quad \text{jossa} \quad g(\theta) = \sin 2\theta + 2k\cos\theta.$$

Etsitään g:n maksimi:

$$g'(\theta) = 2\cos 2\theta - 4k\sin 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta = \frac{1}{2k}.$$

Täten

$$\cos 2\theta(\tan 2\theta + 2k)\sigma_\mathrm{a} = f,$$

josta saadaan

$$\sqrt{1+4k^2}\sigma_\mathrm{a} = f = \sqrt{1+k^2}\tau_\mathrm{af} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\mathrm{a} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}\tau_\mathrm{af} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(1/k)^2}}{\sqrt{1+1/(4k^2)}}\tau_\mathrm{af}.$$