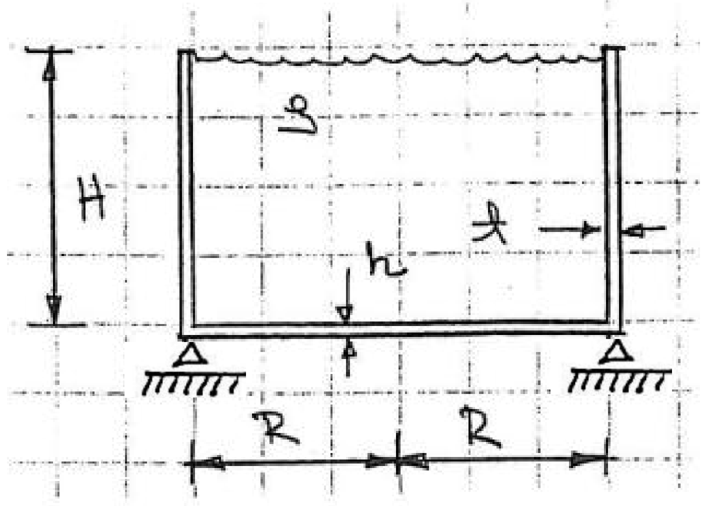


1. Määritä kuvan nestesäiliön sylinterikuoren taipuma w ja nurkan taivutusmomentti M_0 ja leikkausvoima Q_0. Nestesäiliön omaa painoa ei huomioida.

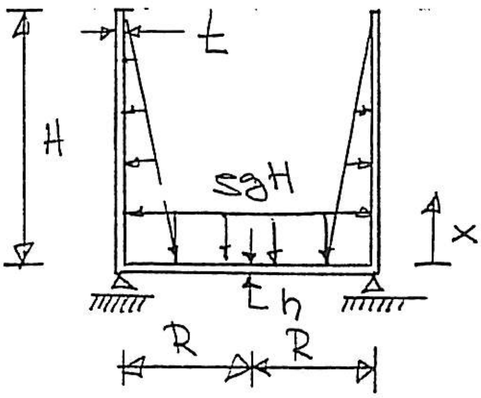
   Dataa: $H = 9$ m, $R = 3$ m, $E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$; $g\rho = 10$ kN/m^3,
   $t = 10$ mm, $h = 80$ mm

   Niveltuetun ympyrälaatan reunan kiertymä tasaisesta paineesta p ja reunamomentista M ovat

$$\varphi^p = \frac{pR^3}{8(1+\nu)D}, \quad \varphi^M = \frac{MR}{(1+\nu)D}$$

Tehtävät palautetaan viimeistään seuraavissa harjoituksissa tai sitä ennen Tietotalon 4. kerroksen C- ja G-käytävien risteyksessä olevaan lukolliseen Rakenteiden mekaniikan sovellutuksia postilaatikkoon.

(1) Nestesäiliön mitoitus.

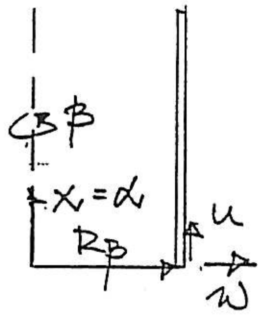


Sylinterinratkaisu,

Pyörähdyssymmetrinen kuormitus

$$\begin{cases} u_{,xx} + \frac{\nu}{R} w_{,x} + \frac{q_x}{C} = 0 & (15.32) \\ \nu u_{,x} + \left(\frac{1}{R} + \frac{Rt^2}{12}\frac{d^4}{dx^4}\right) w = \frac{R}{C} * q_n & (15.33) \end{cases}$$

nyt $q_x = 0$ ja $q_n = \rho g(H-x)$ jolloin



DY on $w_{,xxxx} + 4\lambda^4 w = \frac{1}{D}\left(q_n - \frac{\nu}{R} N_x\right)$

ja $\lambda^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2}$ $\quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

Tässä tapauksessa $N_x = 0$ (pytyn massa 0)

$$w_{,xxxx} + 4\lambda^4 w = \frac{\rho g(H-x)}{D}$$

sama kuin kimmoisalla alustalla olevan palkin dy.

$$w^H = e^{-\lambda x}(C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x) + e^{\lambda x}(C_3 \cos\lambda x + C_4 \sin\lambda x) \quad (12.83)$$

$w^E = Ax + B$ yrite yksityisratkaisuksi

$$Ax + B = \frac{\rho g}{4D}\lambda^{-4}(H-x) = \frac{\rho g * R^2t^2/(3(1-\nu^2))}{4Et^3/(12(1-\nu^2))} * (H-x)$$

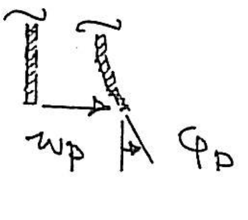
$$w^E = \frac{\rho g}{Et} R^2 (H-x)$$

Yhteensä ratkaisu on "reunahäiriöratkaisu" $w^H(x)$ plus kalvotilan ratkaisu $w^E(x)$.

$N_\beta(x) = R * q_n = \rho g R(H-x)$ $\quad \varepsilon_\beta(x) = \frac{N_\beta}{Et}$ $\quad \Delta R = \varepsilon_\beta * R$

$\Delta R = w(x) = \frac{\rho g}{Et} R^2 (H-x)$ kalvoratkaisu, ok.

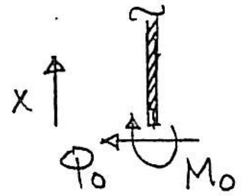
Oletetaan $\lambda H > 3$ jolloin vapaan reunan "reunahäiriö" ei yllä pohjalle. Pohjalla pytyn siirtymä on w_p ja kiertymä $\varphi_p = -w_{,x}(0)$ (siis $C_3 \equiv C_4 \equiv 0$).



$$w_p = C_1 + \frac{\rho g R^2}{Et} H$$

$$\varphi_p = -[-\lambda * C_1 + \lambda * C_2] + \frac{\rho g R^2}{Et}$$

Lausutaan kertoimet c_1 ja c_2 voimasuureiden φ_0 ja M_0 avulla



(15.21) (15.13)

$$M_x = -D\{w_{,xx} + 0\} \qquad Q = -D\{w_{,xxx} + \}$$

$$w_{,x} = e^{-\lambda x} * \lambda(-c_1\cos\lambda x - c_2\sin\lambda x - c_1\sin\lambda x + c_2\cos\lambda x)$$

$$w_{,x} = \lambda e^{-\lambda x}\{(c_2-c_1)\cos\lambda x - (c_2+c_1)\sin\lambda x\}$$

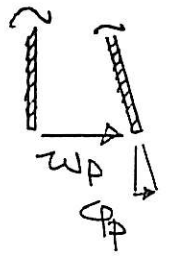
$$w_{,xx} = \lambda^2 e^{-\lambda x}\{(c_1-c_2-c_2-c_1)\cos\lambda x + (c_2+c_1-c_2+c_1)\sin\lambda x\}$$

$$w_{,xx} = \lambda^2 e^{-\lambda x}\{-2c_2\cos\lambda x + 2c_1\sin\lambda x\}$$

$$w_{,xxx} = \lambda^3 e^{-\lambda x}\{(+2c_2+2c_1)\cos\lambda x + (-2c_1+2c_2)\sin\lambda x\}$$

siten $M_0 = -D*(-2\lambda^2)*c_2 \qquad \varphi_0 = -D*(2\lambda^3)(c_1+c_2)$

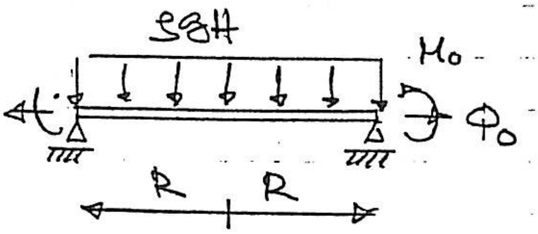
$$c_2 = \frac{M_0}{2D\lambda^2} \qquad c_1 + \frac{M_0}{2D\lambda^2} = -\frac{\varphi_0}{2D\lambda^3} \Rightarrow c_1 = -\frac{\varphi_0 + M_0\lambda}{2D\lambda^3}$$



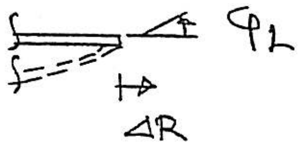
$$w_p = -\frac{1}{2D\lambda^3}*(\varphi_0 + \lambda M_0) + \frac{\varrho g R^2}{Et}H$$

$$\varphi_p = -\lambda(c_2-c_1) + \frac{\varrho g R^2}{Et} = -\frac{1}{2D\lambda^2}*\{\varphi_0 + 2\lambda M_0\} + \frac{\varrho g R^2}{Et}$$

yhteensä
$$\begin{cases} w_p = -\frac{1}{2D\lambda^3}[\varphi_0 + \lambda M_0] + \varrho g R^2 H/Et \\ \varphi_p = -\frac{1}{2D\lambda^2}[\varphi_0 + 2\lambda M_0] + \varrho g R^2/Et \end{cases}$$



Laatan taivutusratkaisu
se koostuu tasaisen kuorman
ja reunamomentti kuorman summasta.



Esim. Rakennustekniikan käsikirjasta (jossa virhe)

$$\varphi_L^q = \frac{\varrho g H * R^3}{8(1+\nu)*D_L} \qquad \varphi_L^{M_0} = \frac{M_0 * R}{(1+\nu)*D_L}$$

φ_0 aiheuttaa sylinterimäisen jännitystilan jolloin

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{\varphi_0}{h} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\varphi) = \frac{1-\nu}{Eh}*\varphi_0$$

$$\begin{cases} \Delta R = \frac{1-\nu}{Eh}*R*\varphi_0 \\ \varphi_L = \frac{R}{(1+\nu)*D_L}*M_0 + \frac{\varrho g H * R^3}{8(1+\nu)D_L} \end{cases} \qquad \text{jossa } D_L = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Yhteensopivuus öö $\varphi_L = \varphi_p$ ja $w_p = \Delta R$

$$\begin{bmatrix} \frac{R}{(1+\nu)D_L} + \frac{1}{D\lambda} & \frac{1}{2D\lambda^2} \\ \frac{1}{2D\lambda^2} & \frac{1-\nu}{Eh}R + \frac{1}{2D\lambda^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{R^3}{8D_L(1+\nu)} + \frac{R^2}{Et} \\ \frac{R^2H}{Et} \end{Bmatrix} \rho g$$

valitaan pytyn ja laatan seinämävahvuudet

olkoon $R = 3m$ $H = 9m$ $E = 200000\,MPa$ $\sigma_{sall} = 200\,MPa$

$\nu = 0.3$ ja $\rho g = 10\,kN/m^3$

Taivutusmomentti laatan keskellä ρgH:sta

$$m_{max} = \frac{3+\nu}{16} * R^2 * \rho gH = \frac{3.3}{16} * 9m^2 * 90\,kN/m^2 = 167\,kNm/m$$

$$w_t \cong \frac{h^2}{6} \Rightarrow \frac{167000}{h^2/6} \cong 200 \Rightarrow h \cong 71\,mm \quad \text{valitaan } 80$$

Pytyn kalvovoiman maksimi on $\rho gH * R = 10\frac{kN}{m^3} * 9 * 3m^2$

$$N_{\beta max} = 270\frac{kN}{m} \quad \sigma_\beta \approx 50\,MPa \Rightarrow t \cong 6mm \quad \text{valitaan } 10$$

siis $E = 200000$ $t = 10$ $h = 80$ $\nu = 0.3$ $R = 3000$ $H = 9000$

$$D_L = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 9.38 * 10^9 \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 18.3 * 10^6$$

$$\lambda = \left\{\frac{3 * 0.91}{3000^2 * 10^2}\right\}^{1/4} = 7.42 * 10^{-3} \quad \lambda * H = 66.78 \gg 3 \text{ ok.}$$

$$\begin{bmatrix} 2.46*10^{-9} + 7.36*10^{-6} & 495.6*10^{-6} \\ 495.6*10^{-6} & 131.7*10^{-6} + 66.8*10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -276.9*10^{-3} + 4.50 \\ 40500 \end{bmatrix} * 10 * 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7.60 & 495.6 \\ 495.6 & 66923. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 42.23 \\ 405000 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} M_0 &= -0.752\,kNm/m \\ Q_0 &= 11.62\,kN/m \end{aligned}$$

Jos pohjalaatta on täysin jäykkä

saadaan
$$\begin{bmatrix} 1/D\lambda & 1/(2D\lambda^2) \\ 1/(2D\lambda^2) & 1/(2D\lambda^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^2/Et \\ R^2H/Et \end{Bmatrix} \rho g$$

$$\begin{Bmatrix} M_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1/2 - 1/4)} D^2 \lambda^4 \begin{bmatrix} 1/(2D\lambda^3) & -1/(2D\lambda^2) \\ -1/(2D\lambda^2) & 1/D\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R^2/Et \\ R^2H/Et \end{Bmatrix} \rho g$$

$$\begin{Bmatrix} M_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \frac{2DR^2}{Et} \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ -\lambda^2 & 2\lambda^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ H \end{Bmatrix} \rho g \qquad \frac{2DR^2}{Et} = \frac{Et^3R^2}{6(1-\nu^2)Et}$$

$$\underline{\underline{\begin{Bmatrix} M_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix}}} = \frac{\rho g R^2 t^2}{5.46} \begin{bmatrix} 1.285/\sqrt{Rt} - 1.652H/Rt \\ -1.652/Rt + 4.248H/(Rt)^{3/2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{Bmatrix} -0.805\ \text{kNm/m} \\ 12.04\ \text{kN/m} \end{Bmatrix}}}$$

$Rt = 0.03\text{m}^2$ $\quad \rho g = 10\ \text{kN/m}^3$ $\quad H = 9\text{m}$

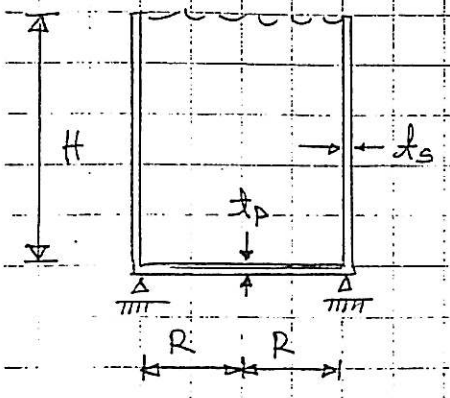
Tässä tapauksessa kun $h = 8*t$ voidaan pohjalaatta katsoa täysin jäykäksi.

Pytyn alaliepeen taivutusjännitys σ_t?

$$\underline{\underline{\sigma_t}} = \frac{|M_0|}{w_p} \cong \frac{805\ \text{Nmm/mm}}{10^2\text{mm}^2/6} = \underline{\underline{\pm 48\ \text{MPa}}}$$

Huom! pohjalaatta tehtäisiin luonnollisesti ortotrooppisena ripalaattana.

Haetaan ratkaisua FEM tekniikalla

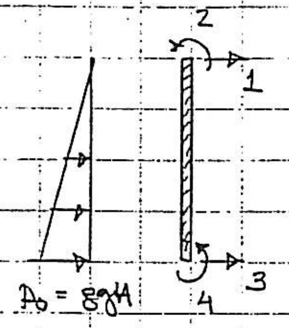


Sylinteriosan DY on muotoa

0 kun painekuorma

$$w_{,xxxx} + 4\lambda^4 w = \frac{1}{D}\left[q_n - \frac{\nu}{R} N_x \right]$$

DY muistuttaa kimmoisalla alustalla olevan palkin tai taivutusvärähtelyä suorittavan palkin DY:tä.



$$D w_{,xxxx} + \frac{Et}{R^2} w = q_n$$ sylinteri

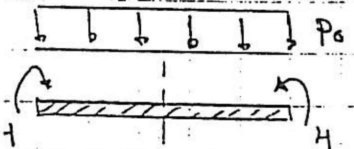
$$EI v_{,xxxx} + k w = q$$ kimmoisalla alustalla oleva palkki.

$$EI v_{,xxxx} + \rho A \ddot{v} = q$$ Värähtelevä palkki

Jos käytetään interpolaatiofunktioina tavallisia palkkifunktioita eli Hermiten interpolointifunktioita saadaan palkin jäykkyysmatriisiksi

$$[k^S] = \frac{D_s}{H^3} \begin{bmatrix} 12 & 6H & -12 & 6H \\ 6H & 4H^2 & -6H & 2H^2 \\ -12 & -6H & 12 & -6H \\ 6H & 2H^2 & -6H & 4H^2 \end{bmatrix} + \frac{EtH}{420R^2} \begin{bmatrix} 156 & 22H & 54 & -13H \\ 22H & 4H^2 & 13H & -3H^2 \\ 54 & 13H & 156 & -22H \\ -13H & -3H^2 & -22H & 4H^2 \end{bmatrix}$$

Eka harjoituksissa oli esillä ympyrälaatan jäykkyysmatriisi



$$[k^L] = 2\pi D_\ell (1+\nu)[1]$$ jona $D_\ell = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)}$

Ekvivalenttiset solmuvoimat ovat

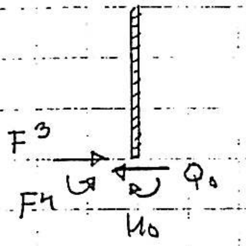
Sylinteri

$$\{F^{ekv}\} = \begin{Bmatrix} 3/20 \\ H/30 \\ 7/20 \\ -H/20 \end{Bmatrix} \rho g H^2$$

Laatta

$$\{F^{ekv}\} = \left\{ \frac{3(1+\nu)R^2 \rho g H}{16} \right\}$$

Jos pohja on seinämään nähden paljon paksumpi niin kiinnitystä alapäässä voidaan pitää jäykkänä.
Jos vielä lisäksi oletetaan sylinteri pitkäksi niin alapään rasitukset ovat kuormituksen vastakkaisia



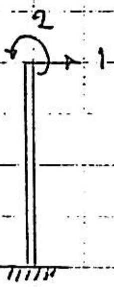
$$Q_0 = +F^3 = +\frac{7}{20} \times \rho g H^2 = -\frac{7}{20} \times \frac{10\,kN}{m^3} \times 9^2\,m^2 = +283{,}5\,\frac{kN}{m}$$

$$M_0 = -F^4 = +\frac{1}{20} \times \rho g H^3 = \frac{1}{20} \times \frac{10\,kN}{m^3} \times 9^3\,m^3 = 364{,}5\,\frac{kNm}{m}$$

tulokset ovat täysin virheelliset, sillä nyt käyrä vaimenee jo 0,4 m etäisyydellä tyveltä joten rengaselementtien korkeus pitäisi olla mieluummin 0.1 m tai vieläkin pienempi.

$$D_s = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 18{,}3 \times 10^6 \quad \text{ja} \quad \frac{EtH}{420R^2} = 4{,}762$$

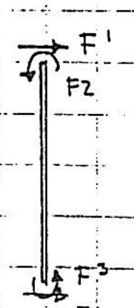
$t = 10\,mm$
$R = 3000\,mm$
$H = 9000\,mm$



$$[k^s] = \frac{18{,}3 \times 10^6}{90^3 \times 10^9}\begin{bmatrix} 12 & 6 \times 9000 \\ 6 \times 9000 & 4 \times 9000^2 \end{bmatrix} + 4{,}762 \times \begin{bmatrix} 156 & 22 \times 9000 \\ 22 \times 9000 & 4 \times 9000^2 \end{bmatrix}$$

$$[k^s] = \begin{bmatrix} 742.9 & 942950 \\ 942950 & 1543 \times 10^6 \end{bmatrix} \qquad \{F^{eku}\} = \begin{Bmatrix} 121{,}5\ N/mm \\ 243 \times 10^3\ Nmm/mm \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{257.1 \times 10^9}\begin{bmatrix} 1543 \times 10^6 & -942950 \\ 942950 & 742.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 121{,}5 \\ 243 \times 10^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.162\ mm \\ 2.565 \times 10^{-4}\ rad \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 742.9 & 942.9 \times 10^{+3} \\ 942.9 \cdot 10^{+3} & 1{,}543 \times 10^{+9} \\ 257.1 & +557.1 \times 10^{+3} \\ -557.1 \times 10^{+3} & -1.157 \times 10^{+9} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.162 \\ 2{,}565 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 121{,}5 \\ 243 \cdot 10^3 \\ 283{,}5 \\ -364{,}5 \times 10^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -182.9 \\ 158\,000 \end{Bmatrix}$$

Eli nyt kun yläpää voi joustaa niin alapään leikkaus resultantit pienenevät vaikka ovat vieläkin täysin virheelliset

$$Q_0 = +182.3\ kN/m$$
$$M_0 = +158\ kN\frac{m}{m}$$