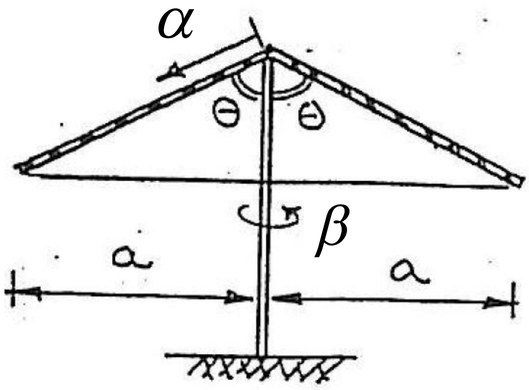
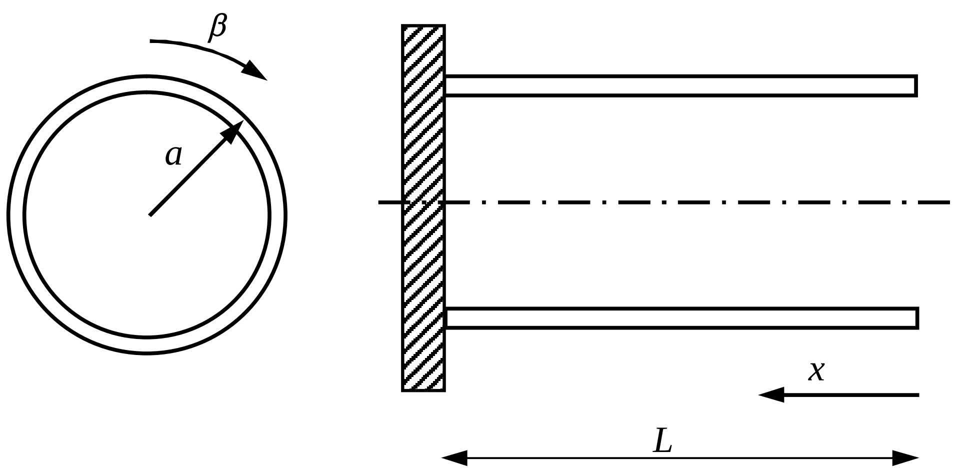
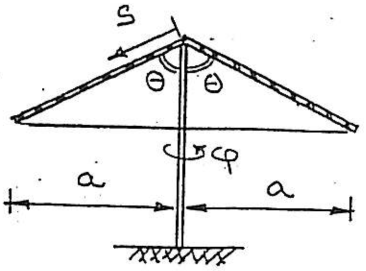


1. Määritä kuvan pyörähdyssymmetrisen sadekatoksen kalvovoimat. Katoksen kuormana on sen oma paino.



2. Määritä kuvan oman painonsa kuormittaman sylinteriulokekuoren kalvovoimat $N_x, N_\beta, N_{x\beta}$ ja kalvosiirtymät u_x, u_β, w. Sylinterikuoren paksuus on *h*.

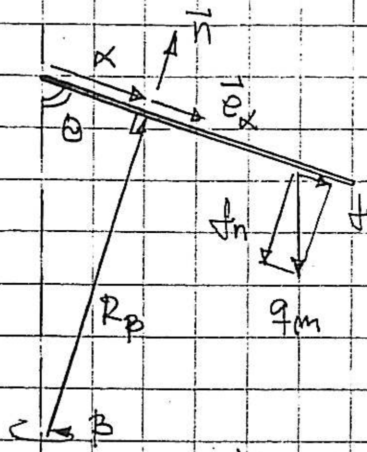


Määritä kuvan pyörähdyssymmetrisen sadekatoksen kalvovoimat N_s ja N_φ sekä $N_{s\varphi}$. Katoksen kuormana on sen oma massa.

Kalvovoimat voi ratkaista, joko katon irtileikatun osan tasapainoehdoista (yksinkertaisempaa) tai tasapainon differentiaaliyhtälöistä (usein mutkikkaampaa) lähtien.

Käytä pintaparametreinä $\alpha = s$ ja $\beta = \varphi$.

Ratkaisu:



Valitaan koordinaatit $\alpha = s$ ja $\beta = \varphi$

Kaarevuudet: suoraan geometriasta

$R_s = R_\alpha = \infty$ ja $R_\varphi = R_\beta = \alpha \tan\theta$

Kuorma oma massa g_m joten

$f_\beta = 0$ $f_\alpha = g_m \cos\theta$ ja $f_n = -g_m \sin\theta$

Kuoren kalvovoimien tasapainoyhtälöt:

$$\begin{cases} (B N_\alpha)_{,\alpha} - N_\beta B_{,\alpha} + \frac{1}{A}(A^2 N_{\alpha\beta})_{,\beta} + AB f_\alpha = 0 \\ (A N_\beta)_{,\beta} - N_\alpha A_{,\beta} + \frac{1}{B}(B^2 N_{\alpha\beta})_{,\alpha} + AB f_\beta = 0 \\ N_\alpha / R_\alpha + N_\beta / R_\beta - f_n = 0 \end{cases}$$

Jossa mittakaavatekijät ovat nyt $A = 1$ ja $B = \alpha \sin\theta$

~~A on meridiaanikoordinaatin $\alpha = s$ kavunkerroin ja~~
~~B "leveyspiiri" koordinaatin $\beta = \varphi$ kavunkerroin!~~

Kun kyseessä on pyörähdyssymmetrinen kuormitus on $N_{\alpha\beta} \equiv 0$!

TP-yht. →

$$\begin{cases} (\alpha \sin\theta N_\alpha)_{,\alpha} - N_\beta (\alpha \sin\theta)_{,\alpha} + \frac{1}{1}(1^2 \cdot 0)_{,\beta} + 1 \cdot \alpha \sin\theta \cdot g_m \cos\theta = 0 \\ (1 \cdot N_\beta)_{,\beta} - N_\alpha (1)_{,\beta} + \frac{1}{\alpha \sin\theta}(\alpha^2 \sin^2\theta \cdot 0)_{,\alpha} + 1 \cdot \alpha \sin\theta \cdot 0 = 0 \\ N_\alpha / \infty + N_\beta / (\alpha \tan\theta) + g_n \sin\theta = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} \sin\theta(\alpha \cdot N_{\alpha,\alpha}) + \sin\theta N_\alpha - \sin\theta N_\beta = \sin\theta(-g_n \cos\theta \cdot \alpha) \\ N_{\beta,\beta} = 0 \rightarrow N_\beta = f(\alpha) \\ N_\beta / (\alpha \tan\theta) = -g_n \sin\theta \rightarrow \underline{\underline{N_\beta = -g_m \sin\theta \tan\theta \cdot \alpha}} \end{cases}$$

ok

Vain eka dy jää siten jäljelle ja se on

$$\alpha N_{\alpha,\alpha} + N_\alpha = -g_n\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) \cdot \alpha = -g_n \frac{\alpha}{\cos\theta} = V \cdot \alpha$$

1- kertaluvun DY:n ratkaisu

Hy $\alpha N_{\alpha,\alpha} + N_\alpha = 0$ Jaetaan puolittain αN_α:lla

$\to \dfrac{N_{\alpha,\alpha}}{N_\alpha} + \dfrac{1}{\alpha} = 0 \to \dfrac{N_{\alpha,\alpha}}{N_\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha}$ Integroidaan puolittain

$\to \ln(N_\alpha) = -\ln(\alpha) + C$ Hävitetään logaritmi käänteisfunktiolla exp

$\to \exp[\ln(N_\alpha)] = \exp[-\ln(-\alpha)] + \exp[\ln C] = \exp[-C/\alpha]$

$\therefore N_\alpha = C/\alpha$

Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu pyydystetään ns. vakion varioinnilla eli otet. $C = C(\alpha)$ jolloin $N_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\alpha} C_{,\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} C$.

DY $\to C_{,\alpha} - \frac{1}{\alpha} C + N_\alpha = V\alpha \to C_{,\alpha} = V\alpha \to C = \frac{1}{2} V\alpha^2 + D$

jolloin lopulta $\underline{N_\alpha = \frac{1}{2} V\alpha + \frac{D}{\alpha}}$

D-vakio ratkaistaan reunaehdosta $N_\alpha(\alpha = \frac{a}{\sin\theta}) = 0$ reunalla

$\to \frac{1}{2} V \frac{a}{\sin\theta} + \frac{D}{a}\sin\theta = 0 \to D = -\frac{1}{2} V \frac{a^2}{\sin^2\theta}$ jossa $V = \frac{q_n}{\sin\theta}$

Yhteenveto:

$$\begin{cases} N_\alpha = \dfrac{q_n}{2\sin\theta}\left[\dfrac{a^2/\sin^2\theta - \alpha^2}{\alpha}\right] \\ N_\beta = -q_n \sin\theta \tan\theta \cdot \alpha \quad \text{ja } N_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

Käytetään luentomonisteen johdetumpia ratkaisulausekkeita kalvovoimien N_α ja N_β ratkaisuun. $N_{\alpha\beta} \equiv 0$ pyörähdyssymmetrian johdosta.

10.152 $\quad \underline{N_\beta} = R_\beta f_n = \alpha\tan\theta \cdot (-q_n \sin\theta) = \underline{-q_n \sin\theta \tan\theta \cdot \alpha}$ ok

10.154 $$N_\alpha = -\frac{1}{B}\int_{\alpha_1}^{\alpha}\left[\frac{f_1(\beta)}{B^2}\right]_{,\beta} d\alpha + \frac{f_2(\beta)}{B} + \frac{1}{B}\int_{\alpha_1}^{\alpha}(B_{,\alpha} R_\beta f_n - B f_\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{B}\int_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B^2}\int_{\alpha_1}^{\alpha} B\left[(R_\beta f_n)_{,\beta} + B f_\beta\right] d\alpha\right\} d\alpha$$

jossa nyt $B = \alpha \cdot \sin\theta$, $R_\beta = \alpha \cdot \tan\theta$, $f_n = -q_n \sin\theta$, $f_\alpha = q_n \cos\theta$ ja $f_\beta = 0$

N_α:n viimeinen termi on nolla sillä $R_\beta f_n$ on vain α:n funktio ja $f_\beta = 0$

Integrointivakio $f_1(\beta)$ on myös nolla sillä $N_{\alpha\beta} \equiv 0$ ja se esiintyy $N_{\alpha\beta}$:n ratkaisussa 10.153.

Merkitään α:n reuna-arvoa $a/\sin\theta = b$ jolloin

$$N_\alpha = \frac{f_2(\beta)}{\alpha \sin\theta} + \frac{1}{\alpha\sin\theta}\int_b^\alpha (\sin\theta \cdot \alpha\tan\theta\cdot(-q_n\sin\theta) - \alpha\sin\theta\cdot q_n\cos\theta)\,d\alpha$$

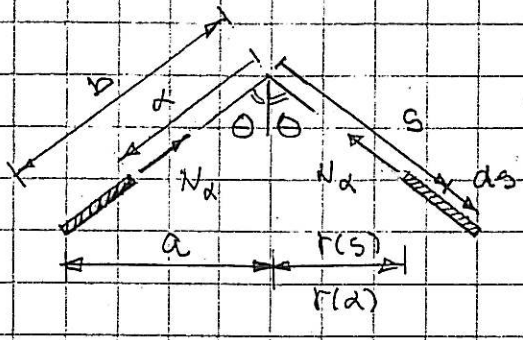
$$= \frac{1}{\alpha\sin\theta}\left\{ f_2(\beta) + \int_b^\alpha -q_n\sin\theta\left[\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right]\alpha\,d\alpha \right\}$$

$$N_\alpha = \frac{1}{\alpha\sin\theta}\left\{ f_2(\beta) - q_n\tan\theta \Big/_b^\alpha \tfrac{1}{2}\alpha^2 \right\} = \frac{1}{\alpha\sin\theta}\left\{ f_2(\beta) - q_n\tan\theta\cdot\frac{\alpha^2-b^2}{2}\right\}$$

$f_2(\beta)$ ratkaistaan reunaehdosta $N_\alpha(\alpha=b)=0 \rightarrow \underline{f_2(\beta)=0}$

$$\underline{N_\alpha = \frac{q_n}{2\cos\theta}\left\{\frac{a^2/\sin^2\theta - \alpha^2}{\alpha}\right\}}$$ sama kuin DY:stä saatu.

Lasketaan sama vielä alkeistyylillä eli suoraan irtileikatun kappaleen tasapainoehdosta.



Leikataan kävo irti ja tarkastellaan sen pystytasapainoa

$$\uparrow\ 2\pi r(\alpha)\cdot N_\alpha \cos\theta = G_{kävo}$$

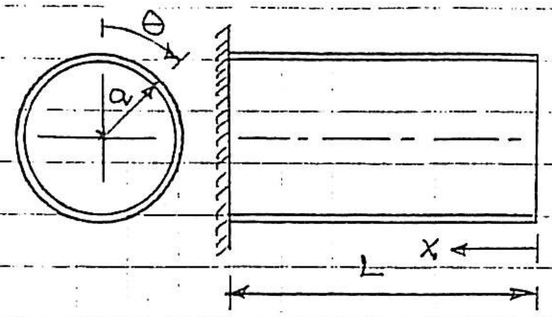
$$G_{kävo} = q_n\cdot 2\pi\int_\alpha^b r(s)\,ds = 2\pi q_n\sin\theta\int_\alpha^b s\,ds$$

Siten $2\pi\alpha\sin\theta\cos\theta\cdot N_\alpha = 2\pi\sin\theta\, q_n\cdot\frac{b^2-\alpha^2}{2} \rightarrow \underline{\underline{N_\alpha = \frac{q_n}{2\cos\theta}\left[\frac{a^2/\sin^2\theta - \alpha^2}{\alpha}\right]}}$ ok

Toinen tasapainoehto on tullin pinnan normaalin suuntainen

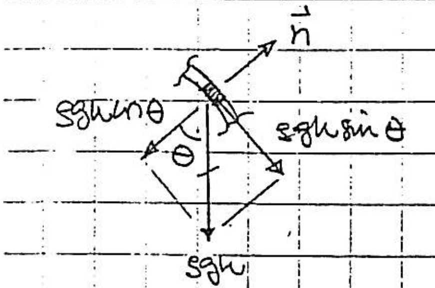
$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} = f_n \rightarrow N_\beta = R_\beta f_n \quad \text{sillä} \quad R_\alpha = \infty$$

$$\underline{\underline{N_\beta = -q_n\tan\theta\sin\theta\cdot\alpha}}$$ ok



Määritetään oman painovoimansa kuormittaman sylinterimäisen ulokekuoren kalvovoimat N_x, $N_{x\theta}$, N_θ sekä kalvosiirtymät u_x, u_θ ja w.

Ratkaisu:



Tasapainoyhtälöt

$$
\begin{cases}
(BN_\alpha)_{,\alpha} - N_\beta B_{,\alpha} + N_{\alpha\beta,\beta} + Bq_\alpha = 0 \\
N_{\beta,\beta} + \frac{1}{B}(B^2 N_{\alpha\beta})_{,\alpha} + Bq_\beta = 0 \\
N_\beta - R_\beta q_n = 0
\end{cases}
$$

ovat sylinteritapauksessa jossa $\alpha = x$ ja $\beta = \theta$ sekä $A = 1$ ja $B = a$ että $R_\beta = a$

$$
\begin{cases}
a N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} + a * q_x = 0 \\
N_{\theta,\theta} + a N_{x\theta,x} + a * q_\theta = 0 \\
N_\theta - a * q_n = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \\
a N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} + a \rho g h \sin\theta = 0 \\
N_\theta - a * (-\rho g h \cos\theta) = 0
\end{cases}
$$

Alimmaisesta saadaan $\underline{N_\theta = -\rho g h a \cos\theta} \Rightarrow N_{\theta,\theta} = \rho g h a \sin\theta$

toisesta saadaan $N_{x\theta,x} = \frac{1}{a}(-2\rho g h a \sin\theta)$

$$\underline{N_{x\theta} = -2\rho g h x \sin\theta + f_1(\theta)} \Rightarrow N_{x\theta,\theta} = -2\rho g h x \cos\theta + f_1'(\theta)$$

Reunaehtona $N_{x\theta}$:lle on että se häviää ulokepäänä $\Rightarrow$ $\underline{f_1(\theta) = 0}$!

Ja lopuksi ekasta saadaan $N_{x,x} = -\frac{1}{a}(-2\rho g h x \cos\theta)$

$$\underline{N_x = \rho g h \frac{x^2}{a} \cos\theta + f_2(\theta)}$$

Reunaehtona N_x:lle on että sekin häviää ulokepäänä $\Rightarrow$ $\underline{f_2(\theta) = 0}$!

Kalvovoimat ovat siten

$$
\boxed{
\begin{aligned}
N_x &= \rho g h * \frac{x^2}{a} * \cos\theta \\
N_\theta &= -\rho g h * a * \cos\theta \\
N_{x\theta} &= -2\rho g h * x * \sin\theta
\end{aligned}
}
$$

ja sitten kalvovoimien aiheuttamat siirtymät u_x u_θ ja w

$$\varepsilon_x = u_{x,x} = \frac{N_x - \nu N_\theta}{Eh}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_{\theta,\theta} + w}{a} = \frac{N_\theta - \nu N_x}{Eh}$$

$$\gamma_{x\theta} = u_{\theta,x} + \frac{1}{a} u_{x,\theta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{x\theta}$$

joissa tässä tehtävässä

$$\frac{N_x - \nu N_\theta}{Eh} = \frac{\varrho g}{E}\left(\frac{x^2}{a} + \nu a\right)\sin\theta$$

$$\frac{N_\theta - \nu N_x}{Eh} = -\frac{\varrho g}{E}\left(a + \nu \frac{x^2}{a}\right)\sin\theta$$

Ensimmäisestä pääsee alkuun

$$u_x = \frac{\varrho g a}{E}\left\{\int\left(\frac{x^2}{a^2} + \nu\right)dx\right\}\sin\theta = \frac{\varrho g a}{E}\left\{\frac{x^3}{3a^2} + \nu x\right\}\sin\theta + f_3(\theta)$$

reunaehtona tälle on että $u_x(L) = 0 \Rightarrow f_3(\theta) = -\frac{\varrho g a}{E}\left[\frac{L^3}{3a^2} + \nu L\right]\sin\theta$

$$u_x = \frac{\varrho g}{E}\left[\frac{x^3 - L^3}{3a} + \nu a(x-L)\right]\sin\theta \Rightarrow u_{x,\theta} = -\frac{\varrho g}{E}\left[\frac{x^3 - L^3}{3a} + \nu a(x-L)\right]\sin\theta$$

Alimmaisesta ratkeaa u_θ

$$u_\theta = \int\left\{\frac{\varrho g}{E}\left[\frac{x^3 - L^3}{3a^2} + \nu(x-L)\right] - \frac{2(1+\nu)}{E} 2\varrho g x\right\}dx \cdot \sin\theta$$

$$u_\theta = \frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{1}{12}\frac{x^4}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{L^3 x}{a^2} + \frac{1}{2}\nu x^2 - \nu L x - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\nu x^2\right\}\sin\theta + f_4(\theta)$$

$$u_\theta = \frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{x^4 - 4L^3 x - 24a^2 x^2}{12a^2} - \nu * \frac{3x^2 + 2Lx}{2}\right\}\sin\theta + f_4(\theta)$$

ja tämän reunaehtona on $u_\theta(L) = 0 \Rightarrow f_4(\theta) = -\frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{-3L^4 - 24a^2L^2}{12a^2} - \nu\frac{5}{2}L^2\right\}$

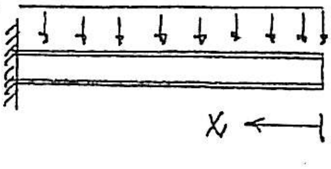
$$u_\theta = \frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{x^4 - 4L^3 x + 3L^4}{12a^2} + 2(L^2 - x^2) + \nu * \frac{5L^2 - 2Lx - 3x^2}{2}\right\}\sin\theta$$

ja lopuksi w ratkeaa keskimmäisestä

$$w = -\frac{\varrho g}{E}\left[a^2 + \nu x^2\right]\sin\theta - \frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{x^4 - 4L^3 x + 3L^4}{12a^2} + 2(L^2 - x^2) + \nu\frac{5L^2 - 2Lx - 3x^2}{2}\right\}\sin\theta$$

$$w = -\frac{\varrho g}{E}\left\{\frac{x^4 - 4L^3 x + 3L^4 + 12a^4}{12a^2} + 2(L^2 - x^2) + \nu\frac{5L^2 - 2Lx - x^2}{2}\right\}\sin\theta$$

$w(\theta, L) = -\frac{\varrho g}{E}(a^2 + \nu L^2)\sin\theta \neq 0$ joten tuella kuoreen syntyy reunahäiriö.



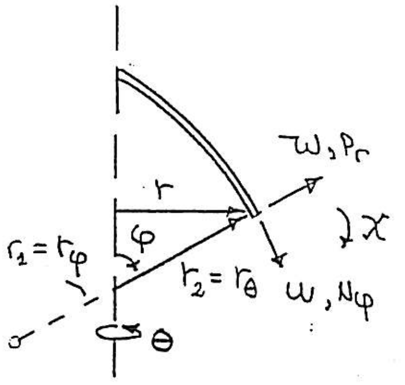
$q_{oma} = 2\pi a \varrho g$

$EI \cong \pi a^3 h$ kun $h \ll a$

x

$$v(x)_{palkki} = \frac{\varrho g}{E} * \frac{3L^4 - 4L^3 x + x^4}{12a^2}$$

PYÖRÄHDYSSYMMETRINEN KALVOTILA !



Yleinen tapaus

$$N_\phi = \frac{1}{r_2 \sin^2\phi}\left[\int r_1 r_2 (p_r \cos\phi - p_\phi \sin\phi)\sin\phi d\phi + C_1\right]$$

$$N_\theta = -r_2\left[\frac{N_\phi}{r_1} - p_r\right]$$

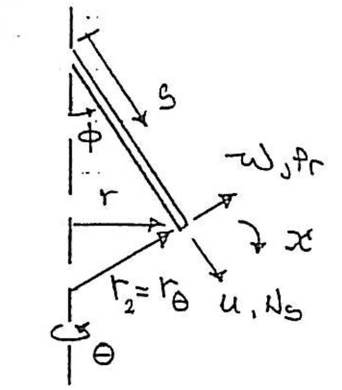
$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{Et}(N_\phi - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Et}(N_\theta - \nu N_\phi)$$

$$u = \sin\phi\left[\int \frac{1}{\sin\phi}(r_1 \varepsilon_\phi - r_2 \varepsilon_\theta)d\phi + C_2\right]$$

$$w = -u \cot\phi + r_2 \varepsilon_\theta$$

$$\chi = (\varepsilon_\phi - \frac{r_2}{r_1}\varepsilon_\theta)\cot\phi - \frac{1}{r_1}\frac{d(r_2 \varepsilon_\theta)}{d\phi}. \tag{4.22}$$



kartiokuori

$$N_\theta = p_r s \cot\phi$$

$$N_\theta - \frac{d(sN_s)}{ds} = p_s s$$

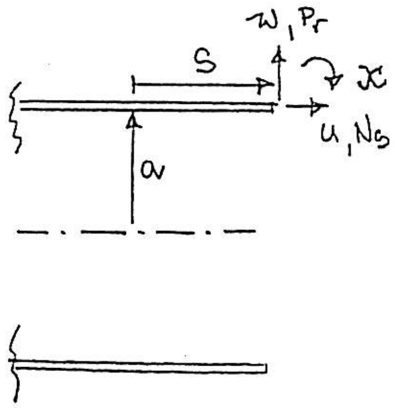
$$u = \int \varepsilon_s ds + C_2$$

$$w = -u \cot\phi + r_2 \varepsilon_\theta$$

$$\chi = (\varepsilon_s - \varepsilon_\theta)\cot\phi - r_2\frac{d\varepsilon_\theta}{ds}$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{Et}(N_s - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Et}(N_\theta - \nu N_s). \tag{4.47}$$



lieriökuori

$$\frac{dN_s}{ds} + p_s = 0$$

$$N_\theta - p_r a = 0$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{Et}(N_s - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Et}(N_\theta - \nu N_s)$$

$$u = \int \varepsilon_s ds + C_2$$

$$w = a\varepsilon_\theta$$

$$\chi = -\frac{dw}{ds}. \tag{4.77}$$