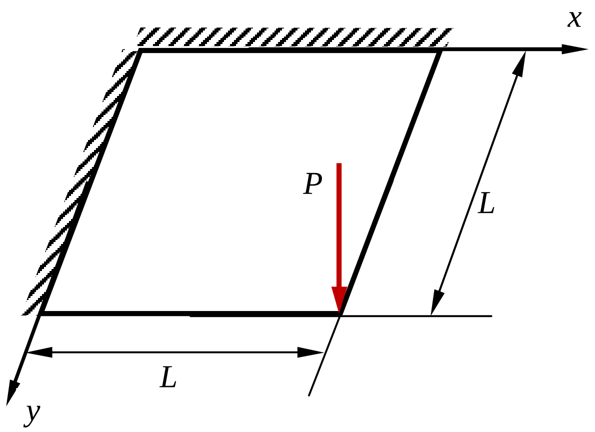
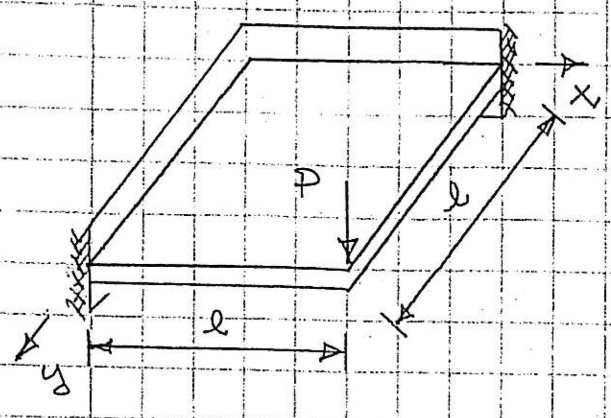


Määritä oheisen kahdelta reunaltaan jäykästi tuetun ja muutoin tukemattoman neliölaatan kuormapisteen taipuma Ritzin menetelmällä. Laatta on kuormitettu vapaasta nurkastaan pistekuormalla $P = 10\ \mathrm{kN}$. Olkoon laatan sivun mitat: $L = 4000\ \mathrm{mm}$ ja paksuus $t = 100\ \mathrm{mm}$, kimmokerroin $E = 10\,000\ \mathrm{N/mm^2}$ ja Poissoin luku $\nu = 0$. Käytä vähintään kahta kinemaattisesti käypää taipumaestimaattia, esim.

$$w(x,y) = Ax^2y^2\ ,\ \ w(x,y) = x^2y^2\left(A + B(x+y)\right)$$

$$w(x,y) = A\left(\cos(\pi x/2L) - 1\right)\left(\cos(\pi y/2L) - 1\right)$$



Arvioidaan kuvan nurkkaulokelaatan kuormapisteen taipumaa Potentiaalienergian minimiperiaatteella. $E = 10$ GPa, $\nu = 0$.

Ratkaisu:

Otaksutaan taipuma $w(x,y) = Ax^2y^2$

Taipumakandidaatin on oltava kinemaattisesti käypä eli sen on toteutettava geometriset reunaehdot.

$w(0,y) = 0$, $w_{,x}(0,y) = 0$ ja $w(x,0) = 0$, $w_{,y}(x,0) = 0$

Taipumakandidaatti $w(x,y) = Ax^2y^2$ toteuttaa nämä.

Kun $\nu = 0$ on laatan kimmoenergia

$$U(w) = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l D(w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2w_{,xy}^2)\,dx\,dy$$

nyt $w_{,xx} = 2Ay^2$, $w_{,yy} = 2Ax^2$ ja $w_{,xy} = 4Axy$

$$U(w) = \frac{1}{2}D\cdot 4A^2\cdot\int_0^l\int_0^l (y^4 + x^4 + 2\cdot 4\cdot x^2y^2)\,dx\,dy = 2DA^2\Big/_0^l\Big/_0^l \frac{xy^5}{5} + \frac{yx^5}{5} + \frac{8}{9}x^3y^3$$

$$U(w) = 2DA^2[1.2889\,l^6]$$

Kuorman tekemä työ on $W(P) = w_P\,P = All^{2\,2}\cdot P$

Kokonaispotentiaalienergia on siten

$$\Pi(w) = 2{,}5778\,DA^2l^6 - PAl^4$$

Minimiperiaate tuottaa ehdon $\Pi_{,A} = 0$ eli

$$5{,}1556\,DAl^6 - Pl^4 = 0$$

$\Rightarrow A = 0.1940\,\frac{P}{Dl^2}$ $\Rightarrow$ kulman siirtymä $w_P = 0.1940\,\frac{Pl^2}{D}$

$P = 10$ kN, $t = 150$ mm, $l = 4$ m $\quad w_P = 3{,}96$ mm

Parannetaan siirtymäkandidaattia hieman eli

$w(x,y) = x^2y^2(A + Bxy)$, joka on edelleen x-y-symmetrinen

Kimmoenergian lauseke on nyt

$$U(A,B) = \frac{1}{2}D\int_0^l\int_0^l \left[(2Ay^2 + 6Bxy^3)^2 + (2Ax^2 + 6Byx^3)^2 + 2(4Axy + 9Bx^2y^2)^2\right]dxdy$$

$$U(A,B) = \frac{1}{2}Dl^6\left(\frac{232}{45}A^2 + 13ABl^2 + \frac{1734}{175}B^2l^4\right)$$

Kokonaispotentiaalienergia on siten matriisimuotoon kirjoitettuna

$$\Pi(A,B) = \frac{1}{2}Dl^6\begin{Bmatrix} A \\ Bl^2 \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} 5.1556 & 6.5000 \\ 6.5000 & 9.9086 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ Bl^2 \end{Bmatrix} - Pl^4\begin{Bmatrix} A \\ Bl^2 \end{Bmatrix}$$

Tämä kalenteri miniarvoonsa $\Rightarrow \Pi_{,\{\}} = 0$

$$\Rightarrow Dl^6\begin{bmatrix} 5.1556 & 6.5000 \\ 6.5000 & 9.9086 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ Bl^2 \end{Bmatrix} = Pl^4\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = 0.3858\frac{P}{Dl^2} \qquad Bl^2 = -0.1522\frac{P}{Dl^2}$$

$$\therefore w(x,y) = \left(0.3858x^2y^2 - 0.1522\frac{x^3y^3}{l^2}\right)\frac{P}{Dl^2}$$

Taipuma nurkassa on $w_P = 0.2336\frac{Pl^2}{D} = 4.49$ mm

Toinen yksinkertainen parametrin kandidaatti on

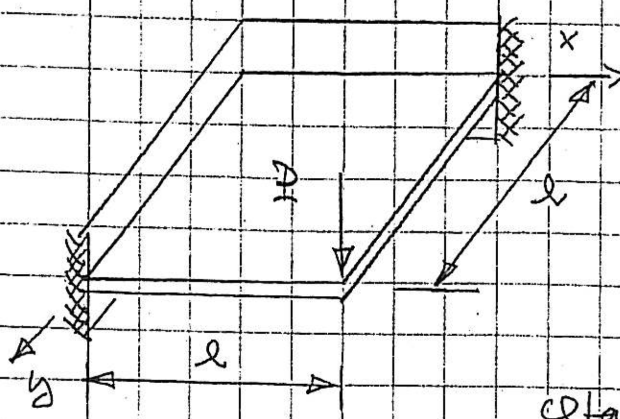
$$w(x,y) = x^2y^2(A + B(x+y)) = Ax^2y^2 + Bx^2y^2(x+y)$$

tämä tuottaa $U(A,B) = \frac{1}{2}Dl^6\left(\frac{232}{45}A^2 + \frac{352}{15}ABl + \frac{999}{35}B^2l^2\right)$

$$\Pi(A,B) = \frac{1}{2}Dl^6\begin{Bmatrix} A \\ Bl \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} 5.156 & 11.733 \\ 11.733 & 28.543 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ Bl \end{Bmatrix} = Pl^4\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix} A \\ Bl \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow A = 0.5353\frac{P}{Dl^2} \quad Bl = -0.1500\frac{P}{l^2}$$

$$w_P = (0.5353 - 2 \cdot 0.1500)\frac{Pl^2}{D} = 4.52 \text{ mm}$$



Arvioidaan kuvan nivelkulmalaatan kuormapisteen taipumaa komplementtipotentiaalienergian minimiperiaatteella.
$E = 10000$, $\nu = 0$, $l = 4\,m$ ja $t = 100\,mm$

Ratkaisu:

Otetaan laatalle seuraava jännitystilakenttä (Resultantti muodossa)

$$M_x = Ay(x-l), \quad M_y = Bx(y-l), \quad M_{xy} = C$$

Jännitystilakentän (M_x, M_y, M_{xy}) on oltava luvallinen eli sen on toteutettava laatan tasapainoehto ja voimareunaehdot.

Tasapainoehto: $M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + q = 0$

Reunaehdot: $M_x(l,y) = 0$ ja $M_y(x,l) = 0$ vapailla reunoilla.

TSP-ehto $\Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0$. toteutuu automaattisesti

$M_x(l,y) = Ay(l-l) = 0$ ok $\quad M_y(x,l) = Bx(l-l) = 0$ ok

Jännitystilakenttä on siten kelvollinen.

Otetaan huomioon kuitenkin rakenteen symmetria eli $w(x,y) = w(y,x)$ joka heijastuu myös voimaresultantteihin eli

$$M_x(x,y) = M_y(y,x) \Rightarrow Ay(x-l) = By(x-l) \text{ eli } A = B$$

Komplementtikimmoenergia on nyt kun $\nu = 0$

$$U^*(B) = \frac{1}{2D}\int_0^l\int_0^l (M_x^2 + M_y^2 + 2M_{xy}^2)\,dx\,dy$$

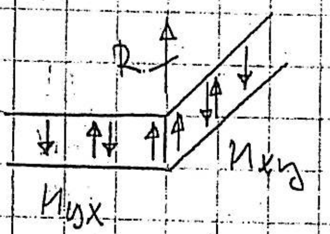
$$= \frac{1}{2D}\int_0^l\int_0^l (A^2y^2(x-l)^2 + A^2x^2(y-l)^2 + 2C^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2D}\int_0^l\int_0^l [A^2y^2(x^2-2lx+l^2) + A^2x^2(y^2-2ly+l^2) + 2C^2]\,dx\,dy$$

$$U^*(\mathcal{B}) = \frac{1}{2D}\int_0^l\int_0^l \left[A^2\frac{y^3}{3}\left(\frac{x^3}{3} - lx^2 + l^2x\right) + A^2\frac{x^3}{3}\left(\frac{y^3}{3} - ly^2 + l^2y\right) + 2C^2xy\right]$$

$$\underline{\underline{U^*(\mathcal{B})}} = \frac{1}{2D}\left[2\cdot A^2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}l^6 + 2\cdot C^2\cdot l^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{D}\left[\frac{1}{9}A^2l^6 + C^2l^2\right]}}$$

Tavallisesti rakenteen kuorma tulee komplementtipotentiaalienergian minimiperiaatteella mukaan laatan tasapainoehdon kautta. Nyt sellaista kuormaa ei ole. Nurkkakuorma otetaan huomioon reunaehdon kautta.



$$R = 2M_{xy} = 2*C = -P \Rightarrow \underline{\underline{C = -\frac{1}{2}P}}$$

Niinpä nyt $\Pi^* = U^*$

Minimoidaan tämä A:n suhteen

$$\Pi^*(A) = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{9}A^2l^6 + \frac{1}{4}P^2l^2\right] \qquad \Pi^*_{,A} = \frac{1}{D}\cdot\frac{2}{9}Al^6 = 0 \rightarrow \underline{\underline{A = 0}}$$

Laatan momenttikenttä on siten

$$\underline{\underline{M_x(x,y) = 0 \quad M_y(x,y) = 0 \quad \text{ja} \quad M_{xy} = -\frac{1}{2}P}}$$

Laatan nurkkapisteen taipuma saadaan Castiglianon toisen lauseen avulla

$$w_P = U^*_{,P} \rightarrow \underline{\underline{w_P = \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{D}\frac{1}{4}P^2l^2\right]}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{Pl^2}{D}}}$$

$$\underline{\underline{w_P}} = \frac{1000\cdot 4000^2}{2\cdot\frac{1}{12}10000\cdot 100^3} = \underline{\underline{9{,}6\ \text{mm}}}$$

Tulos on huono, mutta kuitenkin oikealla puolella tarkkaa tulosta, koska annettu momenttikenttä ei toteuttanutkaan korvikeleikkausvoimaehtoja vapailla reunoilla.

$$V_x = M_{x,x} + 2M_{xy,y} = Ay \neq 0 \quad \text{reunalla } x = l$$
$$V_y = M_{y,y} + 2M_{xy,x} = Ax \neq 0 \quad \text{reunalla } y = l$$

Koetetaan toteuttaa korvikeleikkausvoimien nollaehto vapailla reunoilla

$V_x = M_{x,x} + 2M_{xy,y} = 0 \rightarrow 2M_{xy,y} = -M_{x,x} = -Ay$; $x = l$

$V_y = M_{y,y} + 2M_{xy,x} = 0 \rightarrow 2M_{xy,x} = -M_{y,y} = -Ax$; $y = l$

Integroidaan lausekkeet

$V_x \rightarrow \quad 2M_{xy} = \int -Ay\,dy = -\frac{1}{2}Ay^2 + f(x)$

$V_y \rightarrow \quad 2M_{xy} = \int -Ax\,dx = -\frac{1}{2}Ax^2 + g(y)$

Joten $\underline{\underline{M_{xy} = -\frac{1}{4}A(x^2+y^2)}}$

∴ $\underline{\underline{M_x = Ay(x-l)}}$ $\underline{\underline{M_y = Ax(y-l)}}$ ja $\underline{\underline{M_{xy} = -\frac{1}{4}A(x^2+y^2)}}$

Lasketaan komplementti kimmoenergia, joka on nyt kun $\nu = 0$

$U^*(A) = \frac{1}{2D}\int_0^l\int_0^l (M_x^2 + M_y^2 + 2M_{xy}^2)\,dx\,dy = \frac{3}{20D}A^2 l^6$ Maplella

kuorma saadaan mukaan reunaehdosta

$2M_{xy}(l,l) = R = -P \rightarrow -\frac{1}{2}A(l^2+l^2) = -P \rightarrow \underline{\underline{A = \frac{P}{l^2}}}$

sijoitetaan U^*:n

$U^*(P) = \frac{3}{20D}P^2 l^2$

Castiglianon toinen lause tuottaa siirtymän $w_P = \frac{\partial U^*}{\partial P}$

$\underline{\underline{w_P = \frac{3}{10}\frac{Pl^2}{D} = 5{,}76 \text{ mm}}}$ kun $E = 10000$ MPa $t = 100$ mm
$l = 4000$ mm $P = 1$ kN

Taipuma-arvauksella $\qquad$ Momenttiarvauksella

$w(x,y) = Ax^2y^2 + Bx^3y^3$ $\qquad$ $M_x = Ay(x-l)$, $M_y = Ax(y-l)$, $M_{xy} = -\frac{A}{4}(x^2+y^2)$

$w_P = 4{,}49$ mm $\qquad$ $w_P = 5{,}76$ mm

$\underline{\underline{4{,}49 \text{ mm} \leq w_{tod} \leq 5{,}76 \text{ mm}}}$ $\qquad w_{FEM} = 4{,}65$ mm