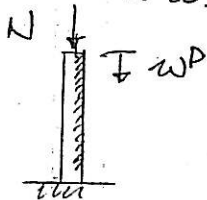
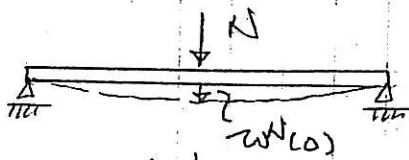
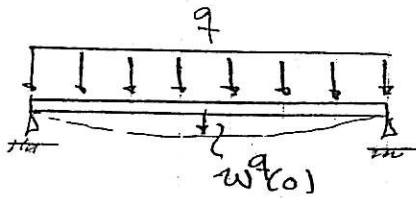
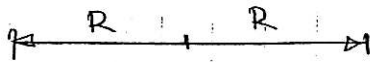
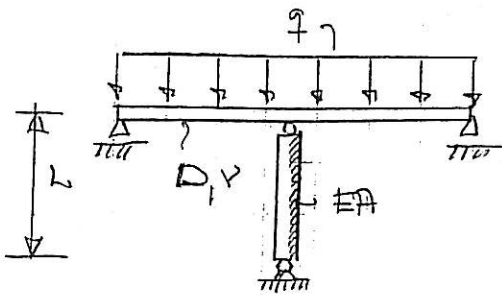


Vapaasti tuetun ympyrälaatan (taivutusjäykkyys D) keskikohta on tuettu pilariin, jonka aksiaalijäykkyys on EA . Määritä ympyrälaatan tasaisesti jakautuneesta kokonaiskuormasta $\pi q R^2$ pilarille tuleva osuus, kun pilarin ja laatan kosketus oletetaan pistemäiseksi. Jos pilari olisi täysin jäykkä, niin mikä olisi pilarin tukireaktion suuruus?

Määritä myös laatan taipumafunktio $w(r)$ sekä taivutusmomenttien lausekkeet $M_r(r)$ ja $M_\phi(r)$.



lu lu
Määritetään vapaasti tuetun ympyrälaatan, joka on keskipitees tään saamalla tuettu, sauman kantama osuus kokonaiskuormasta.

Pasaisesti kuormitetun vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuman lausele on (kuennot)

$$w^q(r) = \frac{qR^4}{64D} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right]$$

$$w^q(0) = \frac{qR^4}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \quad \text{taipuma keskellä}$$

Piste kuormitetun vapaasti tuetun laatan taipuman lausele on (kuennot)

$$w^N(r) = \frac{N}{16\pi D} \left\{ 2r^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2 - r^2) \right\}$$

$$w^N(0) = \frac{NR^2}{16\pi D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$$

Pilarin jousito aksiaalikuormasta

$$w^P = \frac{NL}{EA}$$

Yhteensopivuus :

$$w^q(0) - w^N(0) = w^P$$

laatan painuma pilarin painuma

$$\frac{(\pi q R^2) \times R^2}{4 \times 16\pi D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} \right) - \frac{NR^2}{16\pi D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \right) = \frac{NL}{EA} = \frac{NR^2}{16\pi D} \times 16\pi \times \frac{DL}{EAR^2}$$

merkitään $DL/EAR^2 = \lambda$ ja $\pi q R^2 = F_{TOT}$ ja sievennetään

$$\frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{F_{TOT}}{4} = \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} + 16\pi \lambda \right) N$$

$$N = \frac{(5+\nu)}{4(3+\nu) + 64\pi(1+\nu)\lambda} \times F_{TOT}$$

Täysin jäykällä pilarilla ($EA = \infty$) $\lambda = 0$ ja jos $\nu = 0,2$

$$N = 0,4063 F_{TOT}$$

```
> restart;
```

```
> # pistevoiman taipuma lauseke
```

```
> w[N] := N/16/Pi/D*(2*r^2*log(r/R) + (3+nu)/(1+nu)*(R^2-r^2));
```

$$w_N := \frac{N \left(2 r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{(3 + \nu) (R^2 - r^2)}{1 + \nu} \right)}{16 \pi D}$$

```
> # pistevoiman taipuma keskellä
```

```
> w[N0] := subs(r=0,w[N]);
```

$$w_{N0} := \frac{N(3 + \nu) R^2}{16 \pi D (1 + \nu)}$$

```
> # tasaisen kuormituksen taipuman lauseke
```

```
> w[q] := q*R^4/64/D*((r/R)^4-2*(3+nu)/(1+nu)*(r/R)^2+(5+nu)/(1+nu));
```

$$w_q := \frac{q R^4 \left(\frac{r^4}{R^4} - \frac{2(3 + \nu) r^2}{(1 + \nu) R^2} + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right)}{64 D}$$

```
> # taipuma keskellä
```

```
> w[q0] := subs(r=0,w[q]);
```

$$w_{q0} := \frac{q R^4 (5 + \nu)}{64 D (1 + \nu)}$$

```
> # pilarin normaalivoima
```

```
> N_ := solve(w[q0]-w[N0]=N*L/E/A,N);
```

$$N_ := \frac{q R^4 (5 + \nu) \pi E A}{4 (3 R^2 E A + R^2 E A \nu + 16 L D \pi + 16 L D \pi \nu)}$$

```
> # taipumien yhteenlasku
```

```
> w := -w[N] + w[q];
```

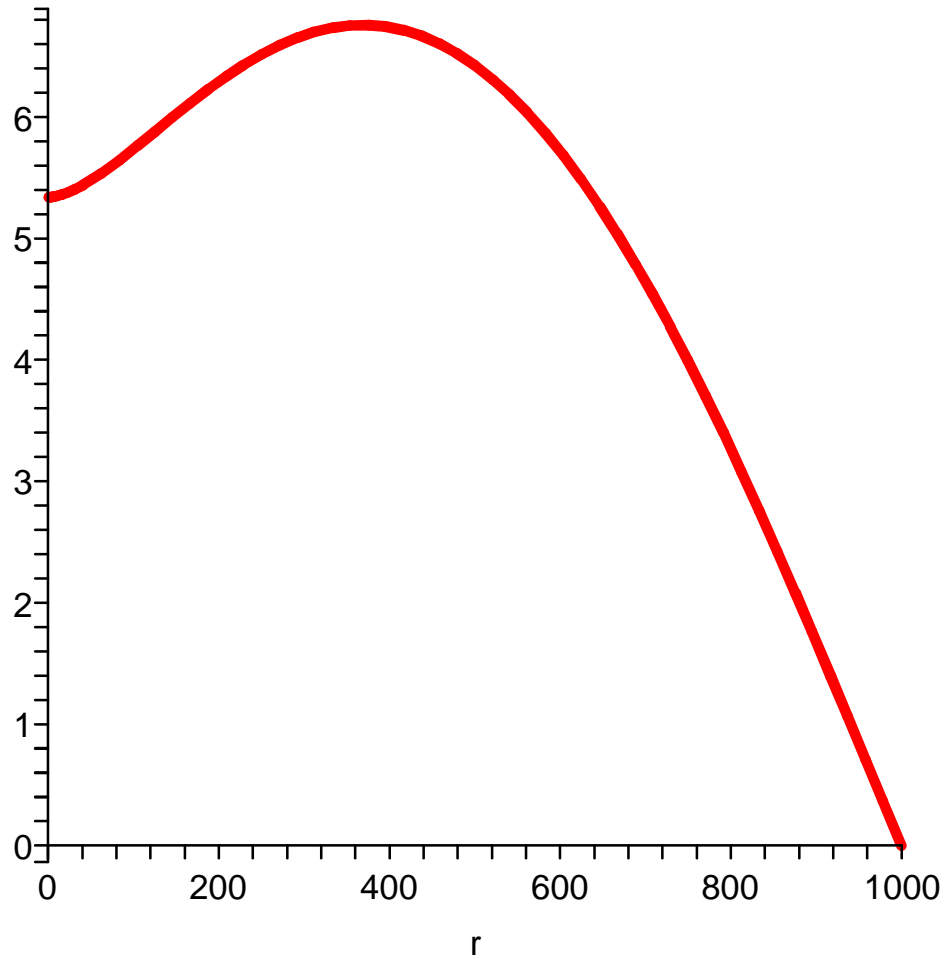
$$w := - \frac{N \left(2 r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{(3 + \nu) (R^2 - r^2)}{1 + \nu} \right)}{16 \pi D} + \frac{q R^4 \left(\frac{r^4}{R^4} - \frac{2(3 + \nu) r^2}{(1 + \nu) R^2} + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right)}{64 D}$$

```
> # plotataan taipuma w
```

```
> arvot := {q=0.01, E=200000, A=10, L=1000, nu=0.3, h=10, R=1000};
```

```
arvot := {q = 0.01, E = 200000, L = 1000, A = 10, nu = 0.3, h = 10, R = 1000}
```

```
> plot(subs(arvot, subs(N=N_, D=E*h^3/12/(1-nu*nu), w)), r=0..1000, thickness=3)
```



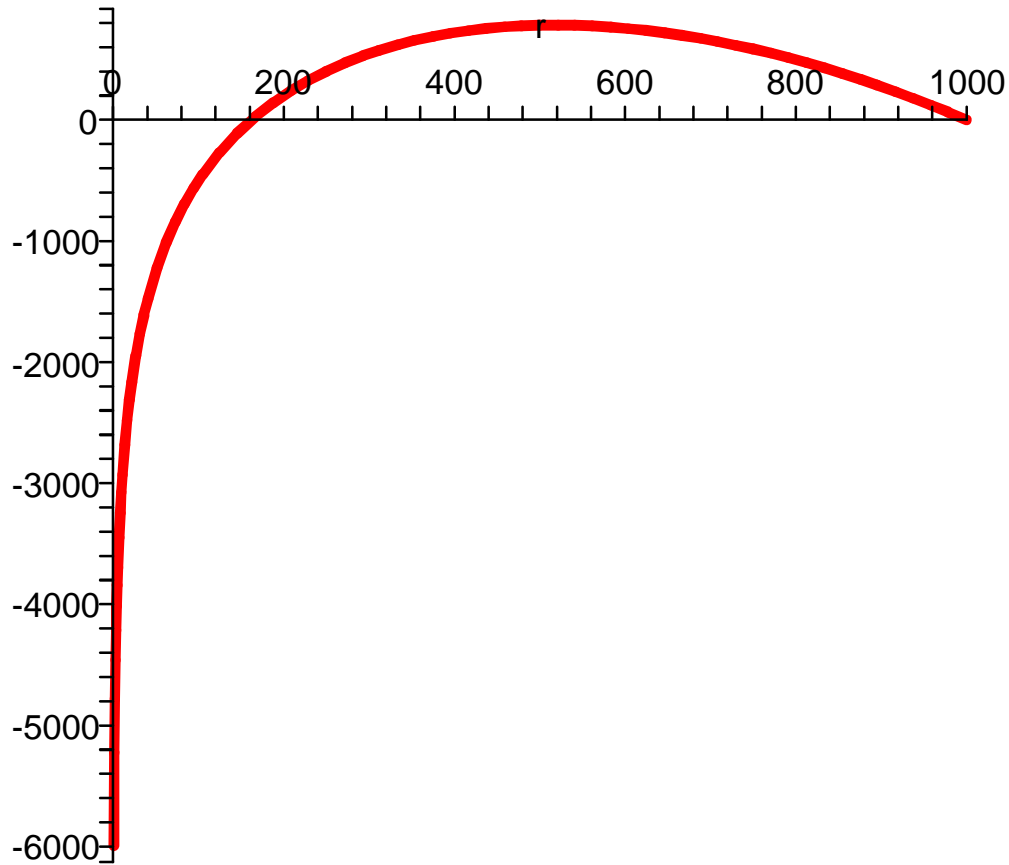
```
> # taivutusmomentti Mr
```

```
> M[r]:=simplify(-D*(diff(w,r,r)+nu/r*diff(w,r)));
```

$$M_r := - \frac{-4 N \ln \frac{a}{e} \frac{r \ddot{v}}{R_0} + q \pi r^2 v - q \pi R^2 v - 4 N \ln \frac{a}{e} \frac{r \ddot{v}}{R_0} + 3 q \pi r^2 - 3 q \pi R^2}{16 \pi}$$

```
> # plotataan taivutusmomentit Mr
```

```
> plot(simplify(subs(arvot,subs(N=N_,D=E*h^3/12/(1-nu*nu),M[r]))),r=0...1000,thickness=3);
```



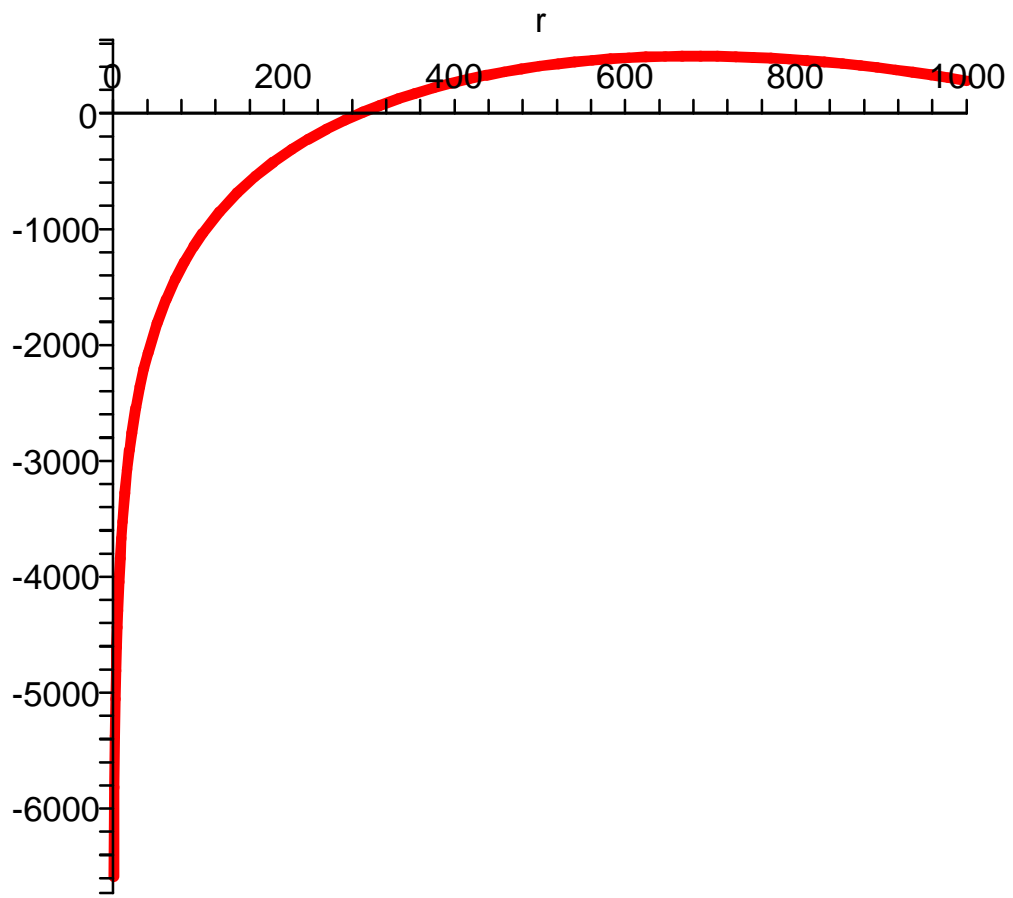
```
> # taivutusmomentti Mfii
```

```
> M[phi]:=simplify(-D*(1/r*diff(w,r)+nu*diff(w,r,r)));
```

$$M_{\varphi} := - \frac{-4 N \ln_{\xi} \frac{r}{R_0} - \nu - 4 N \nu + 3 q \pi r^2 \nu - q \pi R^2 \nu - 4 N \ln_{\xi} \frac{r}{R_0} - 3 q \pi R^2 + 4 N + q \pi r^2}{16 \pi}$$

```
> # plotataan Mfii
```

```
> plot(simplify(subs(arvot,subs(N=N_,D=E*h^3/12/(1-nu*nu),M[phi]))),r=0...1000,thickness=3);
```



>