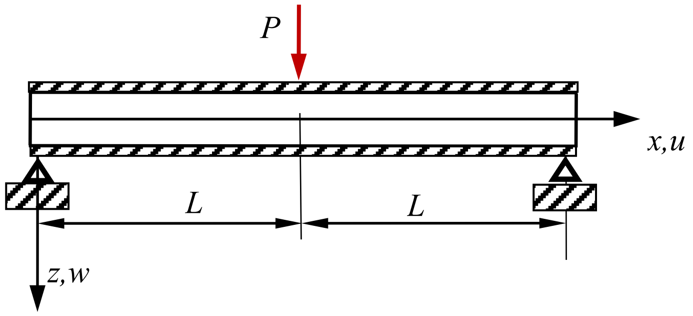
TTY/ Rakennustekniikan laitos
RAK-33020 Rakenteiden mekaniikan sovellutuksia
Harjoitus 3 30.9.2016



Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista kerroslevyä, joka on päistään niveltuettu ja jota kuormitetaan keskeltä pistekuormalla P. Levy koostuu 'vaahtoytimestä' ja vanerikansilevyistä.

Vaahtoytimen paksuus on 130 mm ja kansivanerien paksuu on 20 mm.

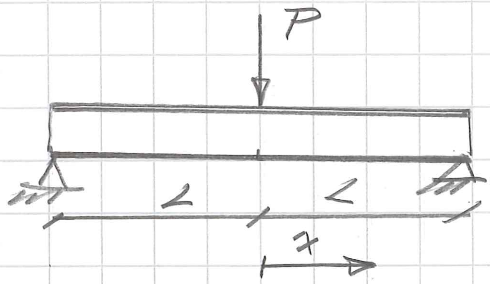
Määritä rakenteen sallittu kuorma F, jos kriteerinä on ydinmateriaalin leikkaantuminen. Laske myös tätä tilannetta vastaava kuormapisteen taipuma.

Dataa. L = 2000 mm ja b =1200 mm (leveys).

E_{vaneri} = 10000 MPa, G_{vaneri} = 500 MPa
E_{ydin} = 0 MPa, G_{ydin} = 2 MPa

Ytimen leikkauskestävyys τ_{sall} = 20 kPa

Palautus viimeistään pe 14.10.



taivutusmomentti

$M(x) = \frac{P}{2}(L - x)$

Yläpaarteen normaalivoiman DY:

$N_{1,xx} - \alpha^2 N_1 = \beta M(x)$

täydellisen yhtälön ratkaisu (epähomog. DY)

$N_t(x) = -\frac{\beta}{\alpha^2} M(x) = \frac{\beta P}{2\alpha^2}(x - L)$

DY:n ratkaisu

$N_1(x) = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + N_t(x)$

Reunaehdot: $N_1(L) = 0$ liukuma $\gamma(0) = 0$

$\gamma = \frac{q}{Gb} \Rightarrow q(0) = 0$ q on leikkausvuo

(4.13) $N_{1,x}(x) = -q(x)$; $N_{1,x}(x) = A\alpha \cosh \alpha x + B\alpha \sinh \alpha x + \frac{\beta P}{2\alpha^2}$

$N_{1,x}(0) = A\alpha + B \cdot 0 + \frac{\beta P}{2\alpha^2} = 0$

$A = \frac{-\beta P}{2\alpha^3}$

$N_1(L) = -\frac{\beta P}{2\alpha^3} \sinh \alpha L + B \cosh \alpha L + 0$

$B = \frac{\beta P}{2\alpha^3} \tanh \alpha L$

o: $N_1(x) = \frac{\beta P}{2\alpha^3}\left(-\sinh \alpha x + \tanh \alpha L \cosh \alpha x + \alpha(x - L)\right)$

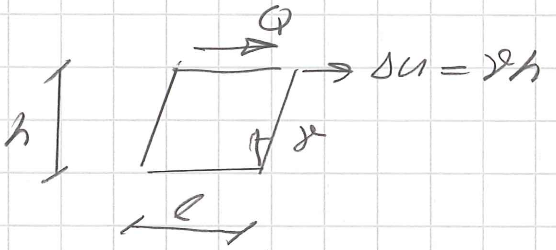
$$\alpha^2 = K\left(\frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{r^2}{EI_0}\right)$$

$r = 150\,mm$

$b = 1200\,mm$

$$EI_0 = EI_1 + EI_2$$

$$\beta = \frac{Kr}{EI_0}$$



leikkausjännitys

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{bl}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{ydin}} = \frac{Q}{bl\,G_{ydin}} = \frac{q}{b\,G_{ydin}}$$

$$q = Q/l$$

$$\Delta u = \gamma h = \frac{\tau}{G_{ydin}} h$$

$$= \frac{q}{b\,G_{ydin}} h \overset{(4.1)}{=} \frac{q}{K}$$

$$K = \frac{G_{ydin}\, b}{h} \qquad (q = K\Delta u)$$

$$K = 2\,MPa \cdot \frac{1200\,mm}{130\,mm} = 18{,}46\,MPa$$

$$EA_1 = E_{van}\, t b = 10\,000\,MPa \cdot 20\,mm \cdot 1200\,mm = 240 \cdot 10^6\,N$$

$$EA_2 = 240 \cdot 10^6\,N$$

$$EI_0 = EI_1 + EI_2 = 2E_v \cdot \frac{1}{12} b t^3 = 1{,}60 \cdot 10^{10}\,Nmm^2$$

$$\alpha^2 = 26{,}11 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{mm^2}$$

$$\beta = 1{,}731 \cdot 10^{-7}\,\frac{1}{mm^3}$$

leikkausvuo $q(x) = -N_{1,x}(x)$ $\quad q_{max}$, kun $x = L$

$$q(x) = -\frac{\beta P}{2\alpha^2}\left(-\cosh\alpha L + \tanh\alpha L \cdot \cosh\alpha L + 1\right)$$

$$q(L) = \ldots = -3{,}3148 \cdot 10^{-3}\,F/mm$$

$$\tau_{ydin} = \frac{q}{b} = (-)2{,}762 \cdot 10^{-6}\,F/mm^2 \leq \tau_{sall} = 0{,}02\,N/mm^2$$

$$F \leq 7{,}240\,kN$$

(3)

taipuma (4.22)

$$+EI_0 w_{1xx} = -M(x) - cN_1(x)$$

$$= -\frac{F}{2}(L-x) - c\frac{\beta P}{2\alpha^3}\left(-\sinh\alpha x + \tanh\alpha L\cdot\cosh\alpha x + \alpha(x-L)\right)$$

integroidaan

$$EI_0 w_{1x} = -\frac{F}{2}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{c\beta P}{2\alpha^3}\left(-\frac{1}{\alpha}\cosh\alpha x + \tanh\alpha L\cdot\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x + \alpha\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right)\right) + C_1$$

RE $w_{1x}(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{c\beta P}{2\alpha^4}\cosh 0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{c\beta P}{2\alpha^4}$$

$$EI_0 w(x) = -\frac{F}{2}\left(\frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{c\beta P}{2\alpha^3}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\sinh\alpha x + \frac{1}{\alpha^2}\tanh\alpha L\cosh\alpha x + \alpha\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2\right)\right) - \frac{c\beta P}{2\alpha^4}x + D$$

RE $w(L) = 0$

$$\Rightarrow D = \frac{FL(\alpha^4L^2 - \alpha^2L^2c\beta + 3c\beta)}{6\alpha^4} = 3{,}2936\cdot 10^{11}\ \mathrm{Nmm^3}$$

$$EI_0 w(0) = -\frac{c\beta P}{2\alpha^5}\tanh\alpha L\cdot\underbrace{\cosh 0}_{=1} + D$$

$$= -2{,}6382\cdot 10^{10} + 3{,}2936\cdot 10^{11}$$

$$= 3{,}0238\cdot 10^{11}\ \mathrm{Nmm^3} \qquad EI_0 = 1{,}60\cdot 10^{10}\ \mathrm{Nmm^2}$$

$\underline{\underline{w(0) = 18{,}90\ \mathrm{mm}}}$