# 33001 Rakenteiden plastisuusmallit

Rajakuormamenetelmän peruslauseet

## Staattinen lause (alarajalause)

**Lause 6.1** *Jos löydetään taivutusmomenttijakauma, joka on tasapainossa ulkoisen kuormituksen kanssa ja toteuttaa myötöehdon* $|M| \leq M_p$ *kaikkialla, niin kuorma on enintään rajakuorman suuruinen. (Kaikkien kuormien oletetaan muuttuvan kertoimien* $\lambda$ *mukana, t.s. kuormien suhteet pysyvät vakioina).*

rajakuorma: $$\lambda_p \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_{pj} \theta_j \qquad -|M_{pj}| \leq M_j \leq |M_{pj}|$$

mekanismi: $$\lambda \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_j \theta_j$$

$$(\lambda_p - \lambda) \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \theta_j.$$

$$\lambda_p \geq \lambda.$$

## Staattinen lause (alarajalause)

**Lause 6.1** *Jos löydetään taivutusmomenttijakauma, joka on tasapainossa ulkoisen kuormituksen kanssa ja toteuttaa myötöehdon* $|M| \leq M_p$ *kaikkialla, niin kuorma on enintään rajakuorman suuruinen. (Kaikkien kuormien oletetaan muuttuvan kertoimien* $\lambda$ *mukana, t.s. kuormien suhteet pysyvät vakioina).*

**Seurauslause**. Rajakuorman arvo ei pienene, jos rakenteen jonkin osan lujuutta kasvatetaan. Alkuperäisen rakenteen plastista rajatilaa ($\lambda = \lambda_{p1}$) vastaava momenttijakauma toteuttaa muunnetun ( vahvistetun) rakenteen tasapaino- ja myötöehdon kertoimen $\lambda$ arvolla $\lambda_{p1}$. Siten $\lambda_{p1} \leq \lambda_{p2}$.

## Kinemaattinen lause (ylärajalause)

**Lause 6.2** *Mielivaltaisen mekanismin virtuaalisen työn yhtälön avulla laskettu rajakuorma on vähintään todellisen rajakuorman suuruinen.*

mekanismi: $$\lambda \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_{pj} \theta_j \qquad -|M_{pj}| \leq M_j \leq |M_{pj}|$$

rajakuorma: $$\lambda_p \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_j \theta_j$$

$$(\lambda - \lambda_p) \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \theta_j \qquad \lambda \geq \lambda_p$$

**Seurauslause**. Rajakuorma ei suurene, jos rakenteen jonkin osan lujuutta ($M_p$) pienennetään.

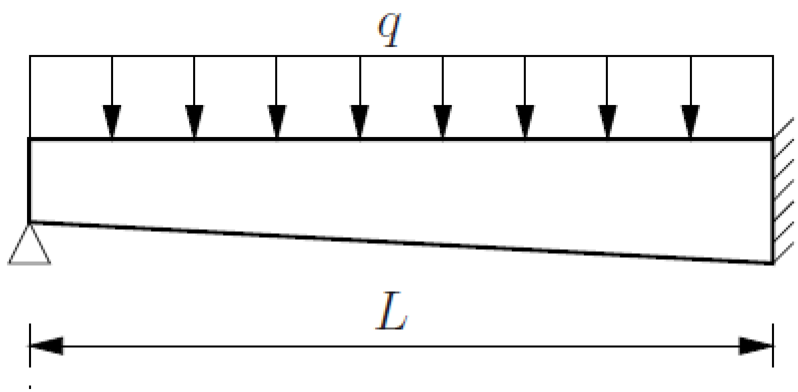
$$\lambda = \frac{\sum M_{pj}\theta_j}{\sum F_i \Delta_i} \qquad \lambda = \lambda_{p1}$$

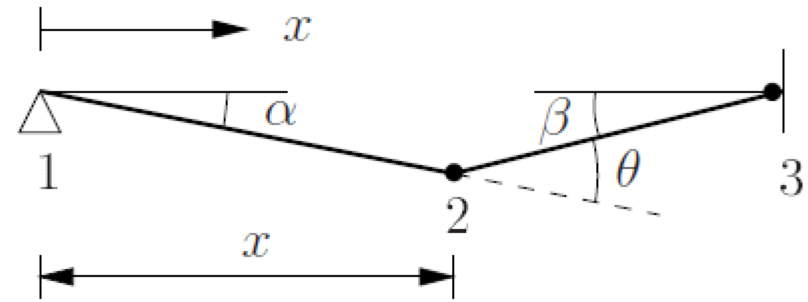
Jos lujuutta pienennetään, niin $\lambda_{p2} \leq \lambda_{p1}$

**Yksikäsitteisyyslause**. Jos kuormakertoimen arvolla $\lambda$ taivutusmomenttijakauma toteuttaa tasapainoehdon, myötöehdon ja mekanismiehdon, niin $\lambda$ on plastisen rajakuormakertoimen suuruinen eli $\lambda = \lambda_p$.

**Seurauslause 1**. Alkujännitykset eivät vaikuta rajakuorman arvoon.

**Seurauslause 2**. Rakenne sortuu kuormitustavasta riippumatta heti, kun momenttijakauma toteuttaa tasapaino-, myötö- ja mekanismiehdon.




## a) Kinemaattinen menetelmä

$$M_p(\xi) = M_{p0}(1+\xi), \quad \xi = x/L$$

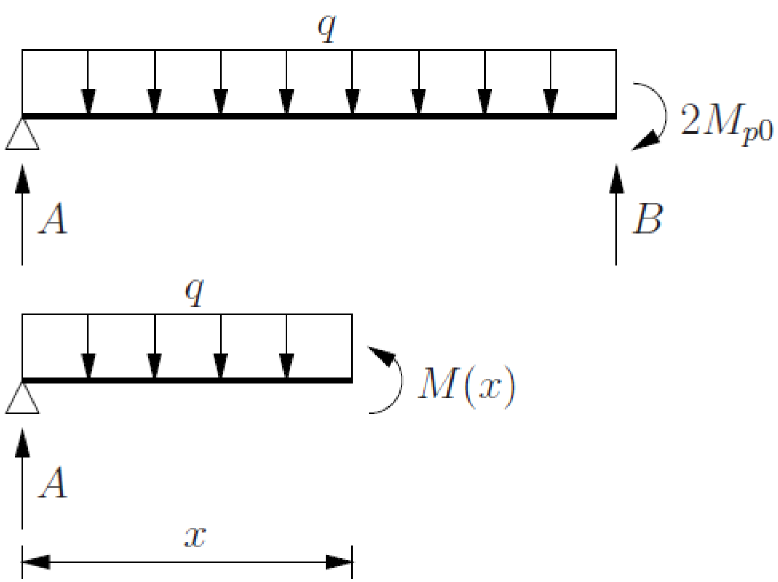
$$\frac{1}{2}\alpha\xi L^2 q = M_{p0}[(1+\xi)\theta + 2\beta] \qquad \alpha = (1-\xi)\theta, \quad \text{ja} \quad \beta = \xi\theta.$$

$$q = \frac{2M_{p0}}{L^2}\frac{1+3\xi}{\xi-\xi^2}.$$

$dq/d\xi = 0 \qquad 3\xi^2 + 2\xi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \dfrac{1}{3} \;\; (\text{tai} \;\; \xi = -1).$

$$q = 18\frac{M_{p0}}{L^2}$$

b) Staattinen menetelmä




$$A + B = qL$$

$$2M_{p0} + qL\frac{L}{2} - BL = 0,$$

$$B = 2\frac{M_{p0}}{L} + q\frac{L}{2},$$

$$A = -2\frac{M_{p0}}{L} + q\frac{L}{2}$$

$$M(x) = Ax - qx\frac{x}{2}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{dM_p}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}qL - qx - 2\frac{M_{p0}}{L} = \frac{M_{p0}}{L},$$

$$x = \frac{L}{2} - 3\frac{M_{p0}}{qL};$$

$$M\left(\frac{L}{2} - 3\frac{M_{p0}}{qL}\right) = \frac{1}{8}qL^2 - M_{p0} + \frac{3}{2}\frac{{M_{p0}}^2}{qL^2}$$

$$M_p = \frac{3}{2}M_{p0} - 3\frac{{M_{p0}}^2}{qL^2}.$$

$$(qL^2)^2 - 20qL^2M_{p0} + 36{M_{p0}}^2 \leq 0;$$

$$q_p = 18\frac{M_{p0}}{L^2};$$