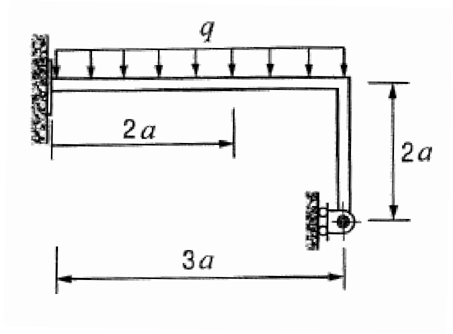
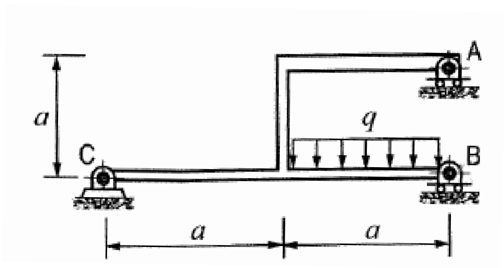
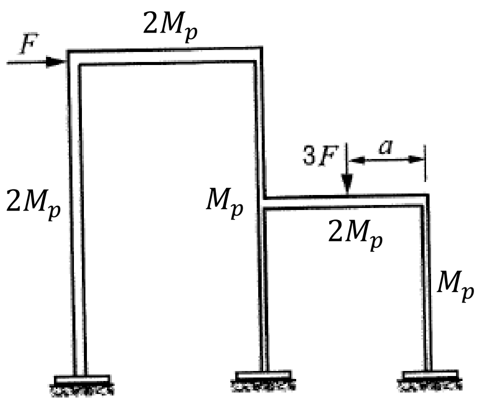



1. Määritä kuvan kehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaattisella menetelmällä* valitsemalla plastiset nivelet jäykälle tuelle ja vaakapalkin kohtaan $2a$. Määritä taivutusmomenttikuvio ja skaalaa sitä tarvittaessa. Palkkien plastinen momentti on $M_p$.

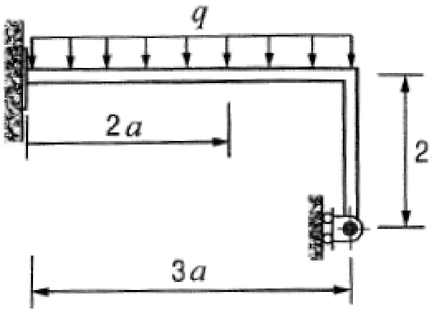



2. Määritä oheisen kuvan tasokehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaattisella menetelmällä*. Totea, että tulos on tarkka rajakuormitus. Ylimmän vaakapalkin plastinen momentti on $2M_p$ ja muiden palkkien plastinen momentti $M_p$.

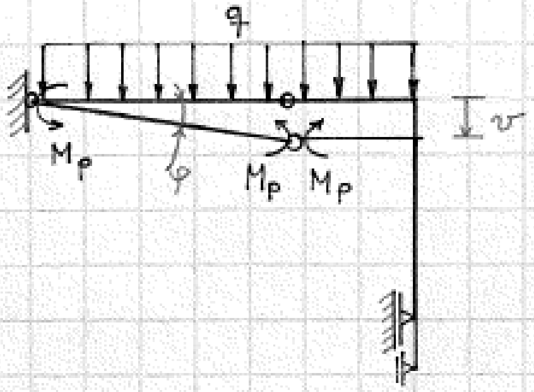



3. Määritä kuvan tasokehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaatti-sella menetelmällä*. Tutki ainakin 5 kinemaattisesti käypää mekanismia. Vaakapalkkien sekä pitkän pystypalkin plastinen momentti on $2M_p$ ja muiden pystypalkkien $M_p$. Palkkien pituudet ovat $2a$ ja $4a$.

KT 3. Katso harjoitukset H6




1. Määritä kuvan kehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaattisella menetelmällä* valitsemalla plastiset nivelet jäykälle tuelle ja vaakapalkin kohtaan $2a$. Määritä taivutusmomenttikuvio ja skaalaa sitä tarvittaessa. Palkkien plastinen momentti on $M_p$.




Annetaan virtuaalinen pieni siirtymä $v$.

$$\Rightarrow \varphi = \frac{v}{2a}$$

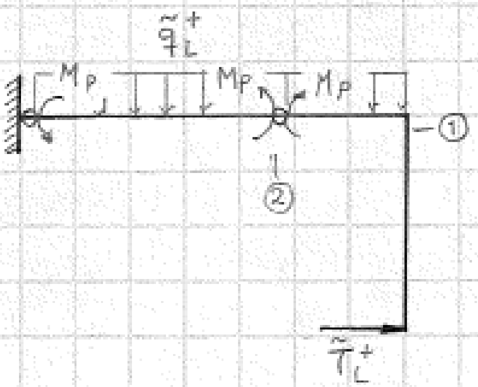
$$\delta W_u = +q\cdot 2a\cdot \frac{v}{2} + q\,a\,v = 2qav$$

$$\delta W_s = M_p\varphi + M_p\cdot\varphi = 2M_p\varphi$$

$$= 2M_p\frac{v}{2a} = \frac{M_p}{a}v$$

$$\delta W_u = \delta W_s$$

$$\Rightarrow\quad 2\tilde{q}_L^{+}av = \frac{M_p}{a}v,\ \forall v \quad\Rightarrow\quad \tilde{q}_L^{+} = \frac{1}{2}\frac{M_p}{a^2} \quad \triangleleft$$



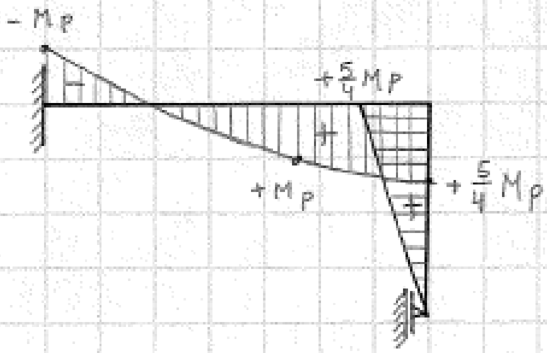

(2) $M_t = +\tilde{T}_L^{+}\cdot 2a - \tilde{q}_L^{+}\cdot a\cdot\frac{a}{2} = M_p$

$$\Rightarrow \tilde{T}_L^{+} = \frac{M_p}{2a} + \frac{1}{2}\frac{M_p}{a^2}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2a}$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\frac{M_p}{a} = \frac{5}{8}\frac{M_p}{a}$$

(1) $M_t = +\tilde{T}_L^{+}\cdot 2a = \frac{5}{8}\frac{M_p}{a}\cdot 2a$

$$M_t = \frac{10}{8}M_p = \frac{5}{4}M_p > M_p \quad \triangleleft$$




Skaalaus: $\mu = \frac{4}{5}$

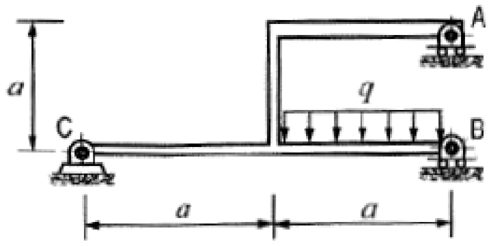
$$\Rightarrow \tilde{q}_L^{-} = \mu\,\tilde{q}_L^{+} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{M_p}{a^2}$$

$$\Rightarrow \tilde{q}_L^{-} = \frac{2}{5}\frac{M_p}{a^2} \quad \triangleleft$$

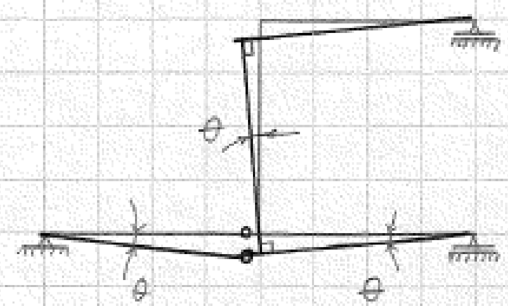
$$\frac{4}{10}\frac{M_p}{a^2} \le q_L \le \frac{5}{10}\frac{M_p}{a^2}$$

$q_L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10}+\frac{5}{10}\right)\frac{M_p}{a^2} = \frac{9}{20}\frac{M_p}{a^2} \approx 0{,}45\ M_p/a^2$, tarkka $\frac{4}{9}\frac{M_p}{a^2} \approx 0{,}444\frac{M_p}{a^2}$

TS 6.5.2011




2. Määritä oheisen kuvan tasokehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaattisella menetelmällä*. Totea, että tulos on tarkka rajakuormitus. Ylimmän vaakapalkin plastinen momentti on $2M_p$ ja muiden palkkien plastinen momentti $M_p$.



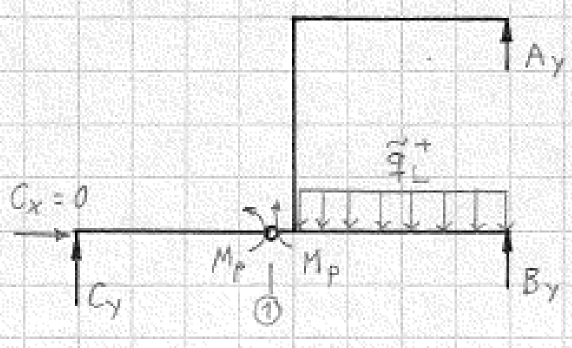

Valitaan kuvan mekanismi (vain 1 plastinen nivel!)

$$\delta W_u = qa\cdot\frac{a}{2}\theta = \frac{1}{2}qa^2\theta$$

$$|\delta W_s| = 2M_p\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}qa^2\theta = 2M_p\theta\,,\ \forall\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{q}_L^+ = 4\,M_p/a^2$$

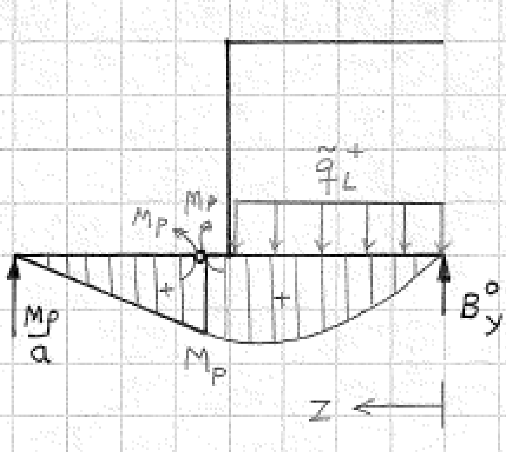



$$↺ ① \quad + C_y\cdot a = M_p$$

$$\Rightarrow \quad C_y = M_p/a$$

Käytetään joustokertoimien menetelmää tukireaktioiden $B_y$ ja $A_y$ laskemiseksi:

Isostaattinen perusmuoto:




$$\uparrow + B_y^0 + \frac{M_p}{a} - \tilde{q}_L^+ a = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y^0 = (4-1)\frac{M_p}{a} = 3\frac{M_p}{a}$$

$$① ↺ + B_y^0\cdot a - \tilde{q}_L^+\cdot\frac{a^2}{2} = M_p \quad ✓.$$

$$M_t(z) = +B_y^0\cdot z - \tilde{q}_L^+\frac{z^2}{2}$$

$$= 3\frac{M_p}{a}z - 2\frac{M_p}{a^2}z^2$$

(jatkuu)

(jatkoa)

Tehtävä 32


$\circlearrowleft B \Rightarrow \overline{C}_y = 0$

$\uparrow +1+\overline{B}_y = 0 \Rightarrow \overline{B}_y = -1$

$\overline{M}(z) = -1 \cdot z = -z$

$$u_{01} = \int_s \frac{M_t \overline{M}_t}{EI} ds$$

$$EI\,u_{01} = \int_0^a \left(3\frac{z}{a} - 2\frac{z^2}{a^2}\right) M_p \cdot (-z)\,dz = M_p \int_0^a \left(-3\frac{z^2}{a} + 2\frac{z^3}{a^2}\right) dz$$

$$= M_p \Big/_0^a \left(-\frac{z^3}{a} + \frac{1}{2}\frac{z^4}{a^2}\right) = -\frac{a^2}{2} M_p$$

$$EI\,a_{11} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot (-a)^2 + \frac{1}{3} a \cdot a^2 + \frac{1}{2} a (a+a) \cdot a$$ MOHRin taulukot

$$\Rightarrow EI\,a_{11} = \frac{5}{3} a^3 \quad \Rightarrow \quad \overline{X} = -\frac{-\frac{a^2}{2} M_p}{\frac{5}{3} a^3} = +\frac{3}{10} M_p/a$$

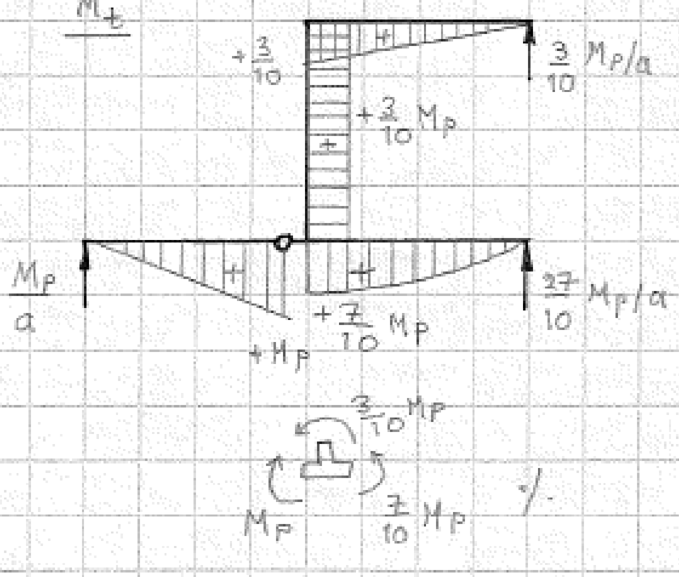
$$\Rightarrow \quad A_y = \overline{X} = \frac{3}{10} M_p/a \quad , \quad B_y = \left(3 + \frac{3}{10} \cdot (-1)\right) = \frac{27}{10} \frac{M_p}{a}$$

$$C_y = M_p/a$$

Myötöehtoa ei rikota.
Tulos tarkka

$$\Rightarrow \quad q_L = 4\ M_p/a^2$$

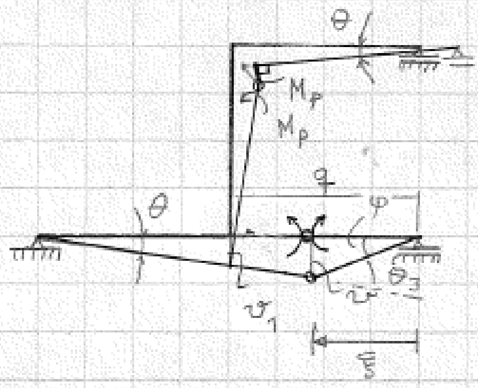
$M_t$




./.

TS 30.7.2011

2. mekanismi:




$$v_1 = a\theta \; , \; v = \xi\varphi = (2a-\xi)\theta$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{2a-\xi}{\xi}\theta$$

$$\theta_3 = \theta + \varphi = \left(1 + \frac{2a-\xi}{\xi}\right)\theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta_3 = \frac{2a}{\xi}$$

$$\delta W_s = M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot \theta_3$$
$$= 2M_p\theta + 2M_p\frac{a}{\xi}$$
$$= \frac{2M_p}{\xi}(a+\xi)$$

$$\delta W_u = q\xi \cdot \frac{1}{2}\xi\varphi + q \cdot \frac{1}{2}(a-\xi)(v_1+v)$$
$$= \frac{1}{2}q\xi^2 \cdot \frac{2a-\xi}{\xi}\theta + \frac{1}{2}q(a-\xi)(a\theta + (2a-\xi)\theta)$$
$$= \frac{1}{2}qa(3a-2\xi)$$

$$\delta W_s = \delta W_u \Rightarrow 2M_p\left(\frac{a+\xi}{\xi}\right) = \frac{1}{2}qa(3a-2\xi)$$

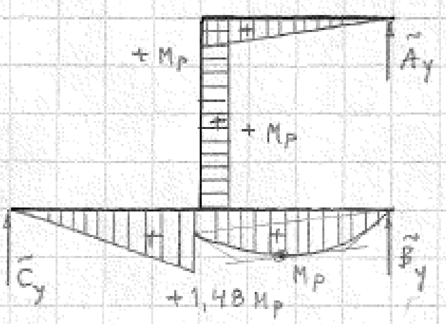
$$\Rightarrow \quad \tilde{q}_L^+ = \frac{4M_p}{a}\left(\frac{a+\xi}{3a\xi - 2\xi^2}\right) \quad \triangleleft$$

$$\frac{d\tilde{q}_L^+}{d\xi} = \frac{4M_p}{a}\left(\frac{(3a\xi-2\xi^2)\cdot 1 - (a+\xi)(3a-4\xi)}{(3a\xi-2\xi^2)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \xi^2 + 2a\xi - \frac{3}{2}a^2 = 0 \quad \Rightarrow \xi_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \frac{3}{2}a^2} = a\left(-1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)a \approx 0{,}5811\,a \quad \triangleleft$$

$$\tilde{q}_L(0{,}5811a) = \frac{4M_p}{a^2}\left(\frac{1{,}5811}{3\cdot 0{,}5811 - 2\cdot 0{,}5811^2}\right) \approx 5{,}921\,\frac{M_p}{a^2} \quad \blacktriangleleft$$



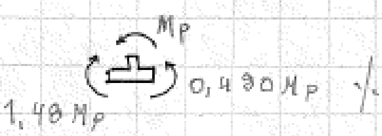

$$+\tilde{A}_y \cdot a = M_p \;\Rightarrow\; \tilde{A}_y = M_p/a$$

$$+\tilde{B}_y \cdot \xi - \tilde{q}_L^+ \cdot \frac{\xi^2}{2} = M_p \Rightarrow \tilde{B}_y \approx 3{,}441\,\frac{M_p}{a}$$

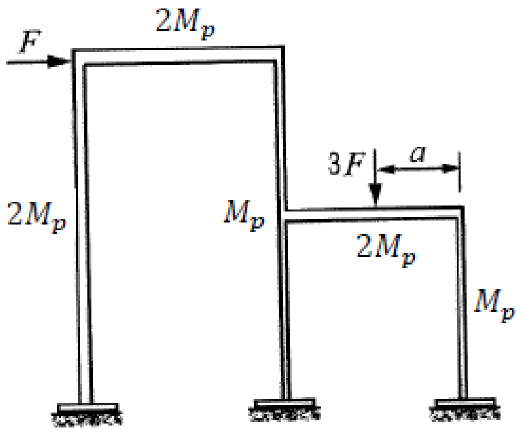
$$\uparrow + \tilde{A}_y + \tilde{B}_y + \tilde{C}_y - \tilde{q}_L^+ a = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_y = 1{,}48\,M_p/a$$

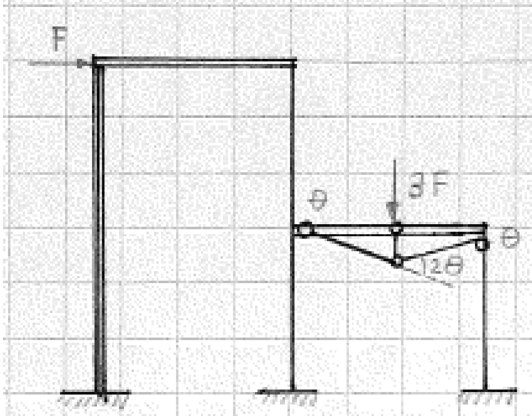
Momenttipinta rikkoo myötöehtoa ⇒ ei tarkka rajakuormitus!




TS. 30.5.2011




3. Määritä kuvan tasokehän rajakuormitus *mekanismimenetelmällä* eli *kinemaattisella menetelmällä*. Tutki ainakin 5 kinemaattisesti käypää mekanismia. Vaakapalkkien sekä pitkän pystypalkin plastinen momentti on $2M_p$ ja muiden pystypalkkien $M_p$. Palkkien pituudet ovat $2a$ ja $4a$.

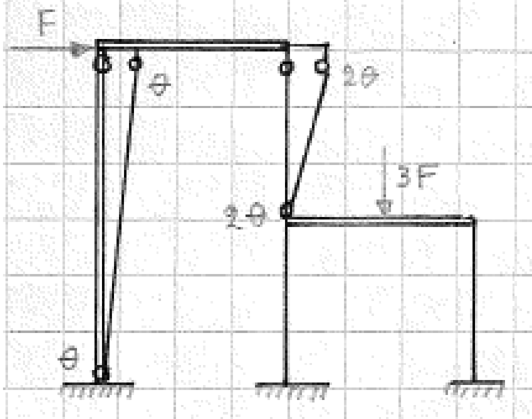


$$\delta W_u = 3F \cdot a\theta$$

$$|\delta W_s| = 2M_p \cdot \theta + 2M_p \cdot 2\theta + M_p\theta = 7M_p\theta$$

$$3Fa\theta = 7M_p\theta \,, \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_L^+ = \frac{7}{3}\frac{M_p}{a} \approx 2{,}333\ M_p/a \qquad (1)$$

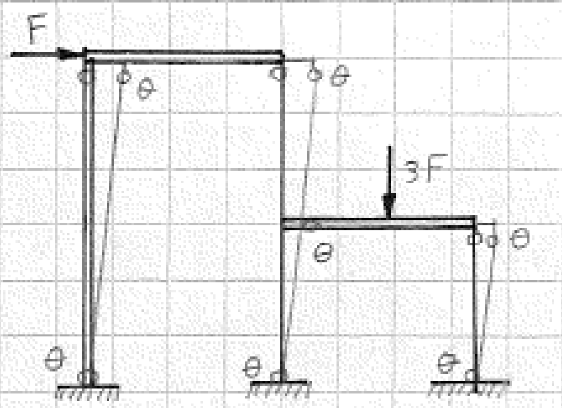


$$\delta W_u = F \cdot 4a\theta$$

$$|\delta W_s| = 2M_p(\theta+\theta) + M_p(2\theta+2\theta) = 8M_p\theta$$

$$4Fa\theta = 8M_p\theta \,, \quad \forall\theta$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_L^+ = 2{,}000\ M_p/a \qquad (2)$$



$$\delta W_u = F \cdot 4a\theta$$

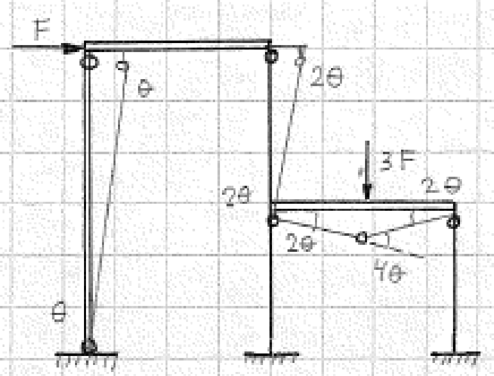
$$|\delta W_s| = 2M_p(\theta+\theta) + M_p \cdot (\theta+\theta) + 2M_p\theta + M_p(\theta+\theta) = 10M_p\theta$$

$$\Rightarrow 4Fa\theta = 10M_p\theta \,, \quad \forall\theta$$

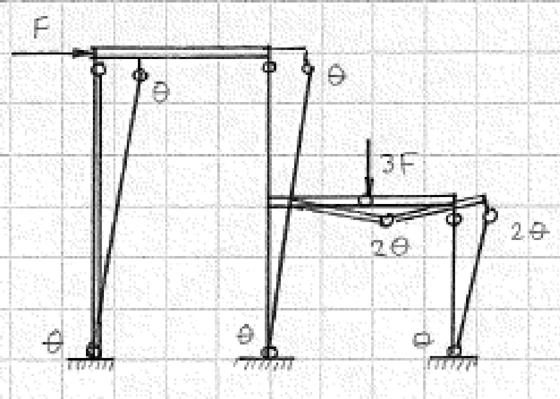
$$\Rightarrow \tilde{F}_L^+ = 2{,}500\ M_p/a \qquad (3)$$

(jatkuu)

(jatkoa) 2/2 Tehtävä 41




$$\delta W_u = F \cdot 4a\theta + 3F \cdot a \cdot 2\theta$$
$$= 10\,Fa\theta$$
$$|\delta W_s| = 2M_p(\theta+\theta) + M_p(2\theta+2\theta) +$$
$$+ 2M_p(4\theta) + M_p \cdot 2\theta$$
$$= 18\,M_p\theta$$
$$\Rightarrow \quad 10\,Fa\theta = 18\,M_p\theta\ ,\ \forall\theta$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{F}_L^+ = 1{,}800\ M_p/a \qquad (4)$$




$$\delta W_u = F \cdot 4a\theta + 3F \cdot a \cdot \theta = 7Fa\theta$$
$$|\delta W_s| = 2M_p(\theta+\theta) + M_p(\theta+\theta) +$$
$$+ 2M_p \cdot 2\theta + M_p(2\theta+\theta)$$
$$= 13\ M_p\theta$$
$$\Rightarrow \quad 7\,Fa\theta = 13\,M_p\theta\ ,\ \forall\theta$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{F}_L^+ \approx 1{,}857\ M_p/a \qquad (5)$$

Mekanismi 4 tuottaa pienimmän estimaatin, joten

$$\tilde{F}_L^+ = 1{,}800\ M_p/a$$

Tuloksen tarkistaminen momenttipinnan avulla on hankalaa, sillä mekanismi (4) on sisäisesti kerran hyperstaattinen.

TS 27.7.2011