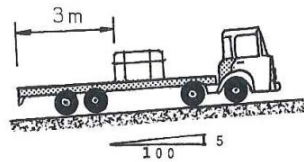
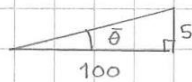


Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
 RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
 Kesä 2020, Harjoitus 9.

(Dynamiikka: Partikkelin kinetiikkaa)



7. Kuorma-auton, jonka massa on 3600 kg, lavalla on 750 kg laatikko. Auto lähtee liikkeelle vakiokiihtyvyydellä ja saavuttaa 15 m matkalla nopeuden 11,1 m/s. Samassa ajassa laatikko liikuu 3 m matkan lavan reunalle. Laske laatikon ja lavan välinen kitkakerroin.
Vast: 0,385



$$\tan \theta = 5/100 \Rightarrow \bar{\theta} \approx 2,862^\circ$$

$$a \text{ vakio, } v_0 = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

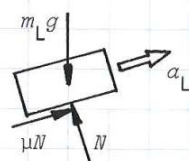
Energia diff. yht. $v dv = a ds \Rightarrow \int_0^v v dv = a \int_0^s ds$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = a s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Auton kiihtyvyyys: $a_A = \frac{v_A^2}{2s_A} = \frac{11,1^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 15 \text{ m}} \approx 4,107 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$(1) \Rightarrow \frac{a_A}{a_L} = \frac{s_A}{s_L} \Rightarrow a_L = \frac{s_L}{s_A} a_A = \frac{12 \text{ m}}{15 \text{ m}} \cdot 4,107 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow a_L \approx 3,286 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

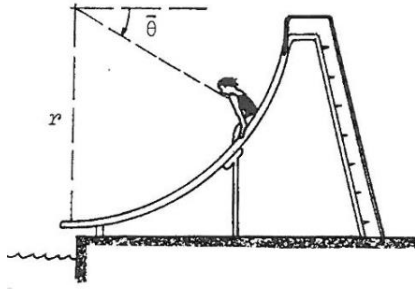


$$\uparrow + N - m_L g \cos \theta = 0 \Rightarrow N = m_L g \cos \theta$$

$$\rightarrow + \mu N - m_L g \sin \theta = m_L a_L$$

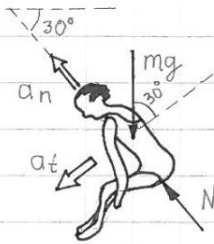
$$\Rightarrow \mu m_L g \cos \theta - m_L g \sin \theta = m_L a_L$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\cos \theta} \left(\sin \theta + \frac{a_L}{g} \right) = 0,05 + 0,335 = 0,385$$



4. Lapsi, jonka massa on 30 kg, laskee alas kitkatonta ympyränkaaren muotoista liukumäkeä. Lapsi lähtee liikkeelle levosta kohdasta $\bar{\theta} = 15^\circ$. Laske lapsen nopeus ja kiihtyvyys sekä tukireaktio, kun a) kulma $\bar{\theta} = 30^\circ$ ja b) kulma $\bar{\theta} = 90^\circ$. $r = 2,60$ m

järj. (N, m, s)



$$a) \quad +mg \cos 30^\circ = m a_t$$

$$\Rightarrow a_t = g \cos \theta = g \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} g$$

$$a_t ds = v dv, \quad ds = r d\theta$$

$$\Rightarrow g \cos \theta r d\theta = v dv$$

$$gr \int_{\theta_0}^{\theta} \cos \theta d\theta = \int_0^v v dv \Rightarrow \frac{v^2}{2} = gr (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gr (\sin \theta - \sin \theta_0)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,60 (\sin 30^\circ - \sin 15^\circ)} \approx 3,508 \quad \blacktriangleleft$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{3,508^2}{2,60} \approx 4,733$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(0,8667 \cdot 9,81)^2 + 4,733^2} \approx 9,725 \frac{m}{s^2} \quad \blacktriangleleft$$

$$\uparrow +N - mg \sin 30^\circ = m a_n = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow N = m \left(\frac{1}{2} g + \frac{v^2}{r} \right) = 30 \text{ kg} \cdot (0,5 \cdot 9,81 + 4,733) \frac{m}{s^2} \approx 289 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

$$b) \quad a_t = 0, \quad v = \sqrt{2gr (1 - \sin \theta_0)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,6 (1 - \sin 15^\circ)} \approx 6,15 \frac{m}{s} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{\theta} = 90^\circ$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{6,15^2}{2,60} \approx 14,55 \text{ m/s}^2 = a \quad \blacktriangleleft$$

$$\uparrow +N - mg = m a_n$$

$$\Rightarrow N = m \left(g + \frac{v^2}{r} \right) = 30 \text{ kg} (9,81 + 14,55) \frac{m}{s^2} \approx 731 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

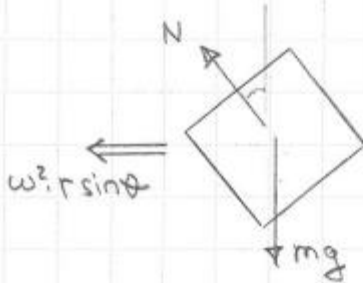


5. Pieni holkki pääsee kitkattomasti liukumaan ympyrän kaaren muotoisessa tangossa AB. Tanko pyörii pystysuoran akselin ympäri kulmanopeudella ω . Määritä holkin stabiili asema θ tangossa.

Vast. $\theta = \arccos g/(r\omega^2)$

$$\omega \geq (g/r)^{1/2}$$

Ratkaisu



- VKK-luvua stabiilissa dynaamisessa tasapainoasemassa.

$$\uparrow \quad N \cos \theta - mg = 0 \quad (1)$$

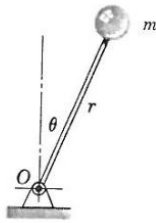
$$\leftarrow \quad N \sin \theta = m \omega^2 r \sin \theta \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \cos \theta = \frac{mg}{N}$$

$$(2) \Rightarrow N = m \omega^2 r$$

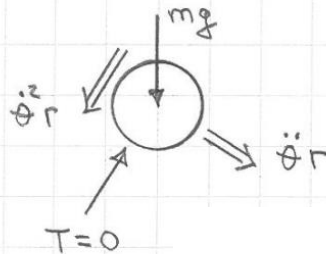
$$\Rightarrow \underline{\underline{\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 r}}}$$

Ratkaisu pätee kun $\theta \geq 0^\circ$ eli $\omega \geq \sqrt{g/r}$



6. Pieni pallo on kiinnitetty hyvin kevyen sauvan päähän. Pallon massa on m ja etäisyys kiertonivelestä on r . Määritä se kulman θ arvo, jolla sauvan puristus vaihtuu vedoksi, kun heiluri lähtee levosta labiilista t.p.-asemastaan liikkeelle.
Vast. $\theta \approx 48.19^\circ$

Ratk.



Merkitään kysyttyä kulmaa: θ_0

$$\downarrow \quad mg \cos \theta_0 = m \dot{\theta}^2(\theta_0) r \quad (1)$$

Kulmanopeus $\dot{\theta}^2(\theta_0)$ voidaan laskea kulmakiihtyvyydestä integroimalla tai energiaperiaatteella.

$$\rightarrow \quad mg \sin \theta = m \ddot{\theta} r \quad \ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta}{r}$$

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \quad \int_0^{\dot{\theta}(\theta_0)} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta_0} \frac{g \sin \theta}{r} d\theta = \frac{g}{r} (1 - \cos \theta_0)$$

$$\dot{\theta}^2(\theta_0) = \frac{2g}{r} (1 - \cos \theta_0) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{\theta_0 \approx 48.19^\circ}}$$