

Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
 Kesä 2020, Harjoitus 6.

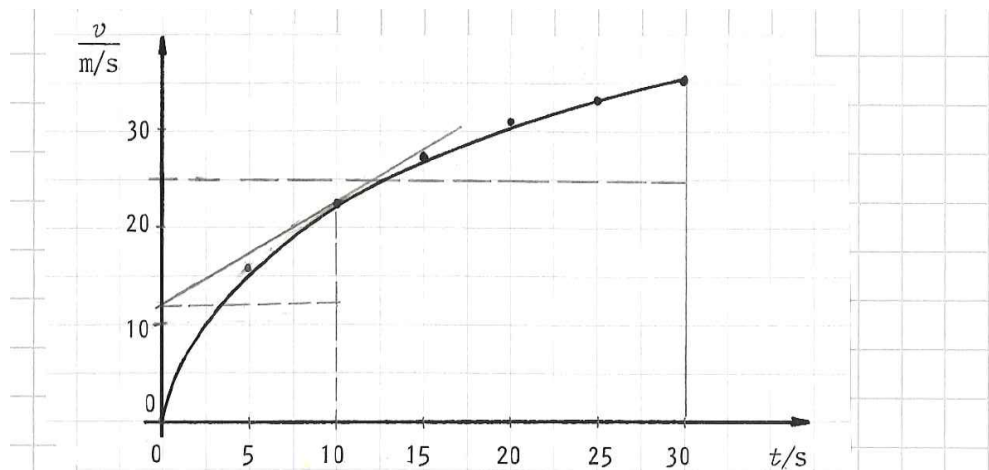
(Dynamiiikka: Partikkelin suoraviivainen liike)

1. Auton kiihtyvyysskoeksessa saatiin seuraavat tulokset:

aika	0	5	10	15	20	25	30	s
nopeus	0	16,1	22,8	27,8	31,1	33,3	35,3	m/s

Piirrä v, t -käyrä ja laske auton kiihtyvyys hetkellä $t = 10$ s ja matka, jonka auto kulkee 30 sekunnin aikana, kun se lähtee liikkeelle levosta.

Vast: $1,0 \text{ m/s}^2$, 750 m



järj. (m, s)

Derivoidaan:

$$a(t=10) = \frac{dv}{dt} \Big|_{t=10} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_{t=10} \approx \frac{22,8 - 0}{10 - 0} \approx 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \blacktriangleleft$$

Integroidaan:

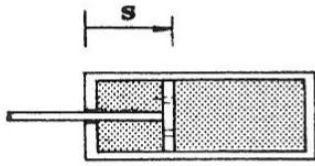
$$S(t=30) = \int_0^{30} v dt \approx \Delta t \cdot v_k \approx 30 \cdot 25 = 750 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

3. Autoilija haluaa ajaa matkan $(0, s_2)$ keskinopeudella 80 km/h siten, että alkumatkan $(0, s_1)$ hän ajaa nopeudella 70 km/h ja loppumatkan (s_1, s_2) nopeudella 90 km/h . Mikä on vastaavien matkojen suhde $s_1/(s_2 - s_1)$ sekä vastaavien ajoaikojen suhde?

Vast: $7/9, 1$

The diagram shows a horizontal axis for distance s (in km) and a vertical axis for time t (in h). A horizontal line represents the total distance s_2 at a constant average speed $v_k = 80 \text{ km/h}$. Below this, the distance is divided into two segments: s_1 at 70 km/h and $s_2 - s_1$ at 90 km/h . The formula $v = s/t$ is written to the right, along with the unit 'järj. (km, h)'. Below the diagram, the time for each segment is calculated: $t_1 = s_1/70$ and $t_2 = (s_2 - s_1)/90$. The total time is $t = t_1 + t_2 = s_1/70 + (s_2 - s_1)/90$. This is simplified to $t = \frac{9s_1}{630} - \frac{s_1}{90} + \frac{7s_2}{90} = \frac{2s_1 + 7s_2}{630}$. The condition $v_k = 80$ is used to find $s_2 = \frac{16}{7}s_1$. Finally, the ratios are calculated: $\frac{s_1}{s_2 - s_1} = \frac{7}{9}$ and $\frac{t_1}{t_2} = 1$.

$v_k = 80 \text{ km/h}$
 $v = s/t$
 järj. (km, h)
 70 km/h 90 km/h
 0 s_1 s_2 s
 ①: $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_1}{70}$ ②: $t_2 = \frac{s_2 - s_1}{v_2} = \frac{s_2 - s_1}{90}$
 Kokonaisaika: $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{70} + \frac{s_2 - s_1}{90}$
 $\Rightarrow t = \frac{9s_1}{630} - \frac{s_1}{90} + \frac{7s_2}{90} = \frac{2s_1 + 7s_2}{630}$
 ehto: $\frac{s_2}{t} = v_k \Rightarrow \frac{s_2 \cdot 630}{2s_1 + 7s_2} = 80$
 $s_2 \cdot 630 = 80(2s_1 + 7s_2)$
 $63s_2 = 16s_1 + 56s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{16}{7}s_1$
 $\Rightarrow \frac{s_1}{s_2 - s_1} = \frac{s_1}{(\frac{16}{7} - 1)s_1} = \frac{7}{9} \quad \checkmark$
 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{s_1/70}{(s_2 - s_1)/90} = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 7} = 1 \quad \checkmark$
 TS 10.12.2007



10. Mäntä liikkuu sylinterissä siten, että sen kiihtyvyyden $a = -kv$, missä v on männän nopeus ja k on tunnettu vakio. Alkuhetkellä $v(0) = v_0$ ja $s(0) = 0$. Määritä männän nopeus $v(t)$, asema $s(t)$ ja $s(v)$ sekä piirrä niiden kuvaajat.

Vast: $v(t) = v_0 e^{-kt}$

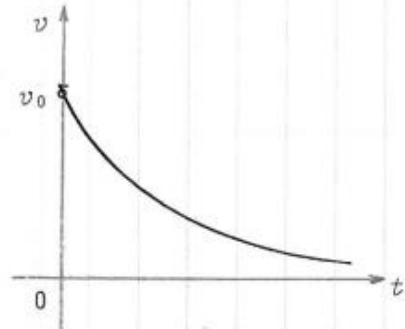
a) $a = -kv$, $a = \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k dt$

$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^t -k dt$

$\Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt$

$\Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$

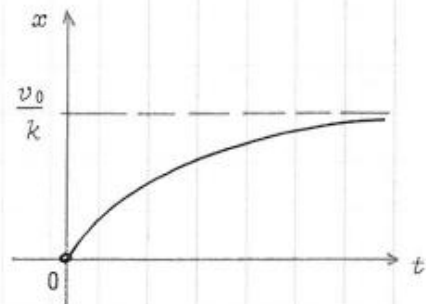


b) $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt$

$\Rightarrow dx = v_0 e^{-kt} dt$

$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$

$\Rightarrow x = \frac{v_0}{k} [1 - e^{-kt}]$



c) $v dv = a dx$

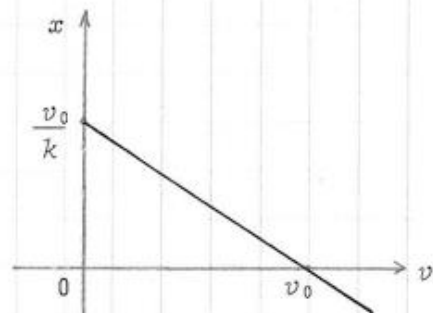
$\Rightarrow v dv = -kv dx$

$\Rightarrow dv = -k dx$

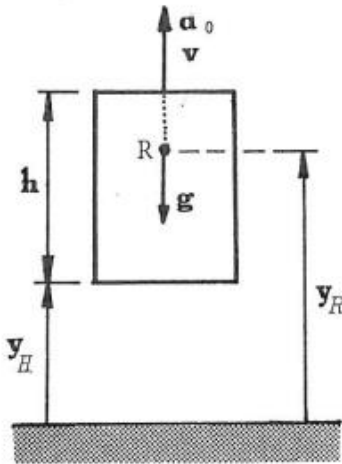
$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^x -k dx$

$\Rightarrow v - v_0 = -kx$

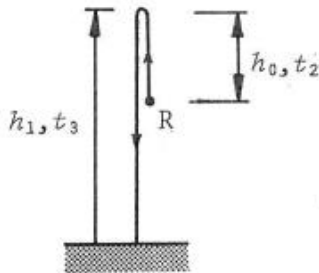
$\Rightarrow x = \frac{1}{k} (v_0 - v)$



19. Hissi liikkuu ylöspäin vakiokiihtyvyydellä $1,4 \text{ m/s}^2$. Hetkellä, jolloin sen nopeus on $0,38 \text{ m/s}$, putoaa katosta ruuvi. Kuinka kauan kestää ruuvin pudota lattialle, kun hissien korkeus on $2,11 \text{ m}$ ja kuinka pitkän matkan ruuvi on kulkenut ilmassa katosta irrottuaan?
Vast: $0,61 \text{ s}$, $1,6 \text{ m}$



Hissin ja ruuvin liike



Ruuvin rata

Ruuvin kulkema matka S on

$$S = h_0 + h_1 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{a_0 + g}} - \frac{v_0}{g} \right)^2 \approx 1,6 \text{ m}$$

Mitataan hissien lattian etäisyyttä jostakin kiinteästä tasosta asemakoordinaatilla y_H ja ruuvin paikka koordinaatilla y_R .

Valitaan $t = 0$, kun $y_H = 0$ ja $y_R = h$.

Hissin ja ruuvin liike on tasaisesti kiihtyvää, joten

$$y_H = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$y_R = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Kohdatkoon ruuvi lattiaa hetkellä t_1 , jolloin $y_H(t_1) = y_R(t_1)$ eli

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = h + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_0 + g}} \approx 0,61 \text{ s}$$

Lakikorkeudella (kuva) ruuvin nopeus on nolla, josta seuraa

$$\dot{y}_R = v_0 - g t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = v_0 / g$$

$$\Rightarrow h_0 = y_R(t_2) - h = h + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 - h$$

$$\Rightarrow h_0 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Koska $t_3 = t_1 - t_2$, niin (kuva)

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_3^2 = g (t_1 - t_2)^2 \cdot \frac{1}{2}$$