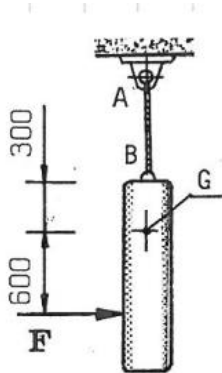


Tampereen Yliopisto / Rakennustekniikan yksikkö
RAK-31040 STATIIKAN JA DYNAMIIKAN PERUSTEET, 5 op
 Kesä 2020, Harjoitus 10.

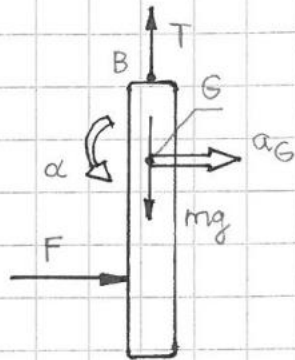
(Dynamiikka: Jäykän kappaleen kinetiikkaa)



1. Kuvan hiekkasäkkiä, jonka massa on 20 kg, ja hitaussäde massakeskiön suhteen 0,40 m, isketään vaakasuoralla voimalla $F = 30 \text{ N}$. Laske säkin kulmakiihtyvyys kuvan tilanteessa, kun säkki on aluksi levossa. Laske tehtävä käyttämällä momenttipisteenä massakeskiötä G.

Vast: $5,63 \text{ 1/s}^2$

Järj. (kg, m, s)

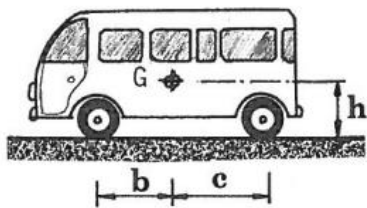


b) Momenttipisteenä massakeskiö G:

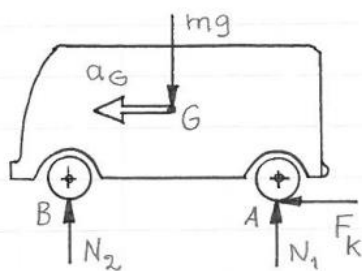
$$\vec{M}_G = J_G \vec{\alpha}$$

$$\textcircled{G} + F \cdot 0,6 = m k_G^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{0,6 F}{m k_G^2} = \frac{0,6 \cdot 30 \text{ N}}{20 \text{ kg} \cdot 0,4^2 \text{ m}^2} \approx 5,63 \frac{1}{\text{s}^2}$$



4. Kuvan takapyörävetoisen auton massakeskiö G on korkeudella h maanpinnasta. Määritä auton suurin mahdollinen kiihtyvyys, jolla se voi lisätä vauhtiaan takapyöräin luistamatta vaakasuoralla tiellä, jonka pinnan kitkakerroin on μ .



Auto on translaatiossa, joten kulmakiihtyvyys $\alpha \equiv 0$.

Pyörä luistamaisillaan, joten

$$F_k = \mu N_1 \quad (\text{COULOMB})$$

1. TAPA: Momenttipisteenä G

$$\rightarrow -\mu N_1 = -m a_G \Rightarrow a_G = \mu N_1 / m$$

$$\uparrow +N_1 + N_2 - mg = 0 \Rightarrow N_2 = mg - N_1$$

$$\curvearrowleft \textcircled{G} \quad -\mu N_1 \cdot h + N_1 \cdot c - N_2 b = J_G \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (-\mu h + c) N_1 - b(mg - N_1) = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{bmg}{b+c-\mu h}$$

$$\Rightarrow a_G = \frac{\mu b g}{b+c-\mu h}$$

2. TAPA: Momenttipisteenä maan pinnan piste \hat{B} , joka on kosketuspisteen B alla. \hat{B} kiinteä piste!

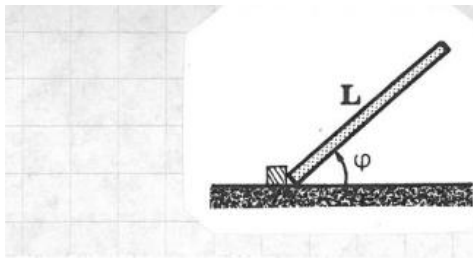
$$\vec{M}_{\hat{B}} = \vec{r}_{G/\hat{B}} \times m \vec{a}_{G/\hat{B}} + J_G \vec{\alpha} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \rightarrow -\mu N_1 = -m a_G$$

$$\Rightarrow N_1 = m a_G / \mu$$

$$\curvearrowleft \textcircled{\hat{B}} \quad +N_1(b+c) - mgb = +m a_G \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{m a_G}{\mu} (b+c) - mgb = m a_G h$$

$$\Rightarrow a_G = \frac{\mu g b}{b+c-\mu h}$$



6. Kuvan sauva on aluksi pystyasennossa, jossa sitä häiritään niin, että se lähtee kaatumaan. Määritä se rajakulma $\bar{\varphi}$, jolla sauvan alapää irtoa alustasta. Kitka estää sauvan alapään luistamisen alustalla.

Vast: $19,5^\circ$

Oletetaan, että kitka estää sauvan alapään liikkumisen. Tällöin

$$M_A = J_A \alpha \quad , \quad J_A = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\Rightarrow -mg \frac{L}{2} \cos \varphi = + J_A \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \varphi$$

Koska $\dot{\varphi} d\varphi = \ddot{\varphi} d\varphi$, niin

$$\int_{\dot{\varphi}=0}^{\omega} \dot{\varphi} d\varphi = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \int_{\pi/2}^{\varphi} \cos \varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 = +\frac{3}{2} \frac{g}{L} (1 - \sin \varphi) \Rightarrow \omega^2 = 3 \frac{g}{L} (1 - \sin \varphi) = \dot{\varphi}^2$$

$$\nearrow +N_x \cos \varphi + N_y \sin \varphi - mg \sin \varphi = -m \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$\nwarrow -N_x \sin \varphi + N_y \cos \varphi - mg \cos \varphi = m \frac{L}{2} \ddot{\varphi}$$

Tarkasteluhetkellä $N_y = 0$, joten

$$\begin{cases} N_x \cos \varphi - mg \sin \varphi = -m \frac{L}{2} \cdot 3 \frac{g}{L} (1 - \sin \varphi) \\ -N_x \sin \varphi - mg \cos \varphi = m \frac{L}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \varphi \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_x \cos \varphi = \frac{mg}{2} (-3 + 5 \sin \varphi) \\ N_x \sin \varphi = -\frac{mg}{4} \cos \varphi \end{cases} \quad | :$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -2 \frac{-3 + 5 \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \varphi = 6 \sin \varphi - 10 \sin^2 \varphi$$

$$9 \sin^2 \varphi - 6 \sin \varphi + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,5^\circ$$