

# Luku 7

## Numeerinen integrointi

Luvussa esitetään elementtimenetelmässä yleisimmin käytössä olevat kvadratuurit, eli numeeriset integrointikaavat. Kvadratuurit muodostetaan korvaamalla integroitava funktio sen interpolaatiopolynomilla. Mikäli kvadratuuripisteet valitaan tasavälisesti saadaan Newtonin-Cotesin kvadratuuri, mitä elementtimenetelmässä käytetään vain dimensioreduktiomallien, eli palkkien, laattojen ja kuorien jäykkyysmatriisin paksuussuuntaisessa integroinnissa.

Jäykkyysmatriisin kokoamiseen tarvittava laskentatyön määrä on suoraan verrannollinen integrointipisteiden lukumäärään. Täten on suotavaa, että elementtimatriisien ja voimavektoreiden integrointi suoritetaan mahdollisimman alhaisasteisella kvadratuurilla. Usein käytetään myös ali-integrointia. Ali-integrointi tai valikoiva ali-integrointi voi joissain tapauksissa johtaa parempiin tuloksiin kuin täysi integrointi. Valitettavasti näin ei aina ole, vaan ali-integrointi johtaa usein nollaenergiamuotojen syntymiseen ja ratkaisun epästabiiliuteen.

### 7.1 Johdanto

Isoparametrinen elementtien jäykkyysmatriisit ja kuormavektorit joudutaan yleensä muodostamaan numeerisella integroinnilla. Myös muissa tapauksissa numeerinen integrointi voi olla tarpeen. Materiaaliominaisuudet tai elementin paksuus voivat muuttua paikan mukana siten, että tarkka integrointi on hankalaa. Integrointikaavoista käytetään myös nimitystä kvadratuuri.

Yksiulotteisessa tapauksessa lausutaan integroitava funktio luonnollisen koordinaatin  $\xi$  avulla välillä  $[-1, 1]$ . Funktion  $f$  integraali

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (7.1)$$

voidaan määrittää numeerisesti kaavalla

$$I \approx \sum w_i f(\xi_i), \quad (7.2)$$

missä  $\xi_i$ :t ovat integrointipisteet ja  $w_i$ :t ovat pisteisiin  $\xi_i$  liittyvät painokertoimet. Integraali  $I$  voidaan esittää tarkasti kaavalla

$$I = \sum w_i f(\xi_i) + R, \quad (7.3)$$

missä  $R$  on jäännös. Integraalin (7.1) laskemiseksi pyritään kehittämään kaavoja, joihin liittyvä jäännös on mahdollisimman pieni numeeriseen laskutyöhön nähden.

Kaava (7.2) voidaan yleistää välittömästi kaksiulotteiseen tapaukseen:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j). \quad (7.4)$$

## 7.2 Newton-Cotes menetelmä

Valitaan integrointipisteiden paikat  $\xi_i$  etukäteen ja integroitavaa funktiota approksimoidaan Lagrangen interpolaatiopolynomeilla, eli

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^n l_i^{n-1} f(\xi_i), \quad (7.5)$$

missä

$$l_i^{n-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)}. \quad (7.6)$$

$l_i^{n-1}$  on  $n - 1$  asteinen polynomi, joka saa arvon 1 pisteessä  $\xi_i$  ja  $l_i^{n-1}(\xi_j) = 0$ , kun  $i \neq j$ .

Integraali  $I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$  on likimäärin

$$I \approx \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^n l_i^{n-1}(\xi) f(\xi_i) \right) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i), \quad (7.7)$$

missä

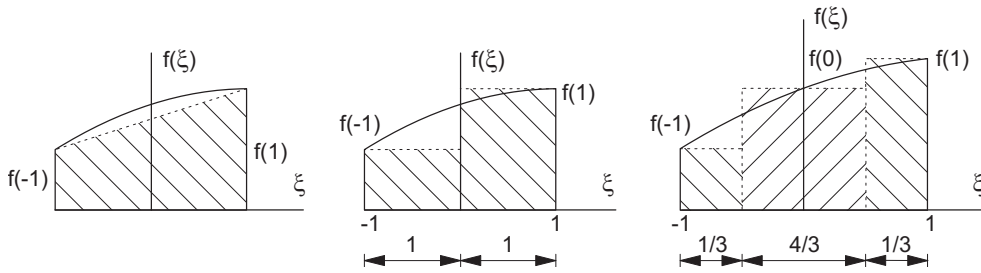
$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^{n-1}(\xi) d\xi. \quad (7.8)$$

Newtonin-Cotesin kaava (7.7) integroi tarkasti  $(n - 1)$ -asteisen polynomin, mikäli  $n$  on parillinen ja  $n$ -asteisen polynomin mikäli  $n$  on pariton. Jäännöksen  $R$  lausekkeelle voidaan johtaa tulos

$$R = C \left( \frac{2}{n-1} \right)^{n+2} \frac{d^{n+1} f}{d\xi^{n+1}}, \quad n \text{ pariton}, \quad (7.9)$$

$$R = C \left( \frac{2}{n-1} \right)^{n+1} \frac{d^n f}{d\xi^n}, \quad n \text{ parillinen}, \quad (7.10)$$

missä  $C$  on funktiosta  $f$  riippumaton vakio. Virheen kaavoista havaitaan, että on syytä käyttää paritonta integrointipisteiden määrää. Huomaa myös, että virhe-estimaatin käyttö edellyttää integroitavalta funktiolta riittävää sileyttä.



**Kuva 7.1** Numeerinen integrointi kahden (a,b) ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavoilla (c).

**Esimerkki 7.1** Kirjoitetaan eksplisiittisesti kahden ja kolmen pisteen Newton-Cotesin kaavat.

Valitaan kahden pisteen integrointikaavassa integrointipisteiden paikoiksi  $\xi_1 = -1$  ja  $\xi_2 = 1$ . Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad l_2^1 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (7.11)$$

Kaavasta (7.7) seuraa  $w_1 = w_2 = 1$ , joten

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) = f(-1) + f(1), \quad (7.12)$$

Lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \frac{1}{2} [f(-1) + f(1)], \quad (7.13)$$

joka on nimeltään trapetsikaava.

Kolmen pisteen tapauksessa valitaan integrointipisteiksi  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  ja  $\xi_3 = 1$ , ja vastaavat Lagrangen interpolaatiopolynomit ovat

$$l_1^2 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, \quad (7.14a)$$

$$l_2^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, \quad (7.14b)$$

$$l_3^2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}, \quad (7.14c)$$

Kaavan (7.7) perusteella painokertoimiksi saadaan  $w_1 = \frac{1}{3}$ ,  $w_2 = \frac{4}{3}$  ja  $w_3 = \frac{1}{3}$ . Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1), \quad (7.15)$$

mikä on kolmen pisteen Simpsonin kaava, katso kuvaa 7.1.

### 7.3 Gaussin-Legendren menetelmä

Gaussin-Legendren menetelmässä sekä integrointipisteet  $\xi_i$  että painokertoimet  $w_i$  pyritään valitsemaan optimaalisesti siten, että menetelmä integroisi tarkasti mahdollisimman korkea-asteisen polynomin.

Tarkastellaan  $(2n - 1)$ -asteista polynomia

$$p(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \cdots + a_{2n-1}\xi^{2n-2} + a_{2n}\xi^{2n-1}, \quad (7.16)$$

missä on  $2n$  termiä. Integroimalla polynomi tulee

$$I = \int_{-1}^1 p(\xi)d\xi = 2a_1 + \frac{2}{3}a_3 + \cdots + \frac{2}{2n-1}a_{2n-1}. \quad (7.17)$$

Sovellettaessa määritelmää (7.2), saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 p(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n p(\xi_i)w_i \\ &= a_1 \sum_{i=1}^n w_i + a_2 \sum_{i=1}^n w_i\xi_i + a_3 \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^2 + \cdots + a_{2n-1} \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-2} + a_{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{2n-1}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Vertaamalla kaavoja (7.17) ja (7.18) havaitaan, että

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 2, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i &= 0, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^2 &= \frac{2}{3}, \cdots \\ \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-2} &= \frac{2}{2n-1}, & \sum_{i=1}^n w_i\xi_i^{2n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Polynomissa (7.16) on  $2n$  termiä. Kaavoissa (7.19) on  $2n$  ehtoa, joiden avulla voidaan määrittää kaavan (7.18)  $2n$  tuntematonta:  $n$  painokerrointa  $w_i$  ja  $n$  integroimis pistettä (Gaussin pistettä)  $\xi_i$ .

Voidaan osoittaa, että  $n$ -pisteisen Gaussin-Legendren kvadratuurin integrointipisteiden paikka määräytyy astetta  $n$  olevan Legendren polynomin nollakohtien perusteella, ja painokertoimiksi saadaan yleisesti lauseke

$$w_i = \frac{2(1 - \xi_i^2)}{[nP_{n-1}(\xi_i)]^2}. \quad (7.20)$$

Gaussin-Legendren  $n:n$  pisteen menetelmä integroi tarkasti  $(2n - 1)$ -asteisen polynomin, joten menetelmä on tarkempi kuin Newton-Cotesin kvadratuuri. Jäännöksen  $R$  lausekkeeksi voidaan johtaa

$$R = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \frac{d^{2n}f}{d\xi^{2n}}. \quad (7.21)$$

**Esimerkki 7.2** Määritetään Gaussin-Legendren menetelmän painokertoimet ja integroimispisteiden paikat kun  $n = 2, 3$ .

Kahden integrointipisteen tapauksessa yhtälöistä (7.19) seuraa

$$w_1 + w_2 = 2, \quad w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0, \quad w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0. \quad (7.22)$$

Symmetrian perusteella  $w_1 = w_2$  ja  $\xi_1 = -\xi_2$ , jolloin ratkaisuksi saadaan

$$w_1 = w_2 = 1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (7.23)$$

Tapauksessa  $n = 3$  saadaan ehdot

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2 \quad (7.24a)$$

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + w_3\xi_3 = 0 \quad (7.24b)$$

$$w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 + w_3\xi_3^2 = \frac{2}{3} \quad (7.24c)$$

$$w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 + w_3\xi_3^3 = 0 \quad (7.24d)$$

$$w_1\xi_1^4 + w_2\xi_2^4 + w_3\xi_3^4 = \frac{2}{5} \quad (7.24e)$$

$$w_1\xi_1^5 + w_2\xi_2^5 + w_3\xi_3^5 = 0 \quad (7.24f)$$

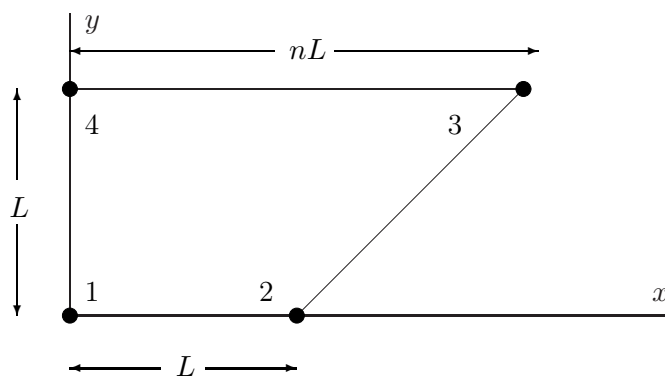
Symmetrian perusteella  $\xi_3 = -\xi_1, \xi_2 = 0$  ja  $w_1 = w_3$ , jolloin ratkaisuksi saadaan

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad w_1 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}, \quad w_3 = \frac{5}{9}. \quad (7.25)$$

**Esimerkki 7.3** Tutki virhettä suhteen  $n$  funktiona ( $n = 2, 3, 5, 10$ ) integraalissa

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det(\mathbf{J})} d\xi d\eta \quad (7.26)$$

kun se integroidaan numeerisesti yhden pisteen,  $2 \times 2$ -pisteen ja  $3 \times 3$ -pisteen Gaussin kaavoilla.



Määritetään geometriakuvauksen Jakobiaani, jota varten tarvitaan siirtymien interpolaatioiden lausekkeet:

$$x = (N_2 + nN_3)L = \frac{1}{4}(1 + \xi) [1 - \eta + n(1 + \eta)] L, \quad (7.27a)$$

$$y = (N_3 + N_4)L = \frac{1}{2}(1 + \eta)L \quad (7.27b)$$

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+n+(n-1)\eta & 0 \\ (1+\xi)(n-1) & 2 \end{bmatrix} L \quad (7.28)$$

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{8} L^2 [1+n+(n-1)\eta] = \frac{1}{8} L^2 (a_0 + a_1 \eta). \quad (7.29)$$

Lasketaan integraali ensin tarkasti

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det \mathbf{J}} d\xi d\eta = \frac{16}{L^2} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{a_0 + a_1 \eta} \\ &= \frac{16}{L^2} \left| \frac{1}{a_1} \ln(a_0 + a_1 \eta) \right|_{-1}^1 = \frac{16}{L^2} \left| \frac{1}{n-1} \ln(1+n+(n-1)\eta) \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{L^2} \frac{1}{n-1} \ln n \end{aligned} \quad (7.30)$$

Koska integrandi on vakio  $\xi$ -koordinaatin suunnassa, voidaan tarkastella vain numeerista integrointia  $\eta$ -koordinaatin suunnassa. Gaussin-Legendren kaavoilla laskettuna saadaan seuraavat tulokset:

1. Yhden pisteen kaavalla  $w_1 = 2, \eta_1 = 0$ :

$$I \approx L^{-2} \frac{32}{1+n} \quad (7.31)$$

2. Kahden pisteen kaavalla  $w_1 = w_2 = 1, \eta_1 = -1/\sqrt{3}, \eta_2 = 1/\sqrt{3}$ :

$$I \approx L^{-2} 16 \left[ \frac{1}{1+n-\frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} + \frac{1}{1+n+\frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)} \right] \quad (7.32)$$

3. Kolmen pisteen kaavalla  $w_1 = w_3 = 5/9, w_2 = 8/9, \eta_1 = -\sqrt{3/5}, \eta_2 = 0, \eta_3 = \sqrt{3/5}$ :

$$I \approx L^{-2} 16 \frac{1}{9} \left[ \frac{5}{1+n-\sqrt{3/5}(n-1)} + \frac{8}{1+n} + \frac{5}{1+n+\sqrt{3/5}(n-1)} \right] \quad (7.33)$$

Kootaan tulokset taulukkoon:

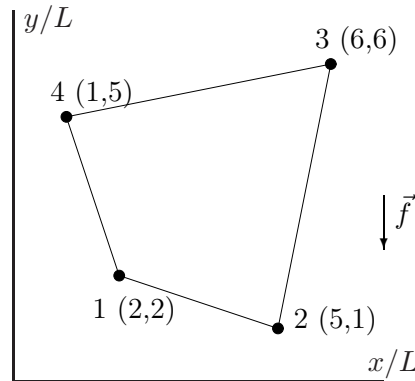
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$
$1 \times 1$	10.666	8.0000	5.3333	2.9090
$2 \times 2$	11.077	8.7772	6.2608	3.7446
$3 \times 3$	11.0899	8.7890	6.4107	3.9939
tarkka	11.0904	8.7889	6.4378	4.0935

Havaitaan, että virhe integraalin numeerisen arvon määrittämisessä Gaussin-Legendren kvadratuurilla kasvaa elementin vääristymän lisääntyessä. Huomaa, että oheinen integraali on seurausta laskettaessa muodon

$$\int_{\Omega} N_{i,x} N_{j,x} dA \quad (7.34)$$

tyyppisiä lausekkeita. Täten on syytä valttää elementtien liiallista vääristämistä.

**Esimerkki 7.4** Määritetään oheisen kuvan mukaisen bilineaarisen elementin tilavuusvoimia vastaava vektori  $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}$  käyttäen numeerista integrointia.



$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f} t J d\xi d\eta, \quad (7.35)$$

kun

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}, \quad (7.36)$$

missä  $\rho$  on materiaalin tiheys ja  $g$  maan vetovoiman kiihtyvyys.

Jacobin matriisi on kuvan elementille

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 4 + \eta & \eta \\ \xi & 4 + \xi \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

ja determinantti  $J = \det \mathbf{J} = (4 + \xi + \eta)L^2$ . Solmuun  $i$  liittyvä osuus,  $(2 \times 1)$ -vektori, on

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = t\rho g \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i J \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} d\xi d\eta, \quad (7.38)$$

missä  $N_i$  on määritelty kaavalla (4.161).

Sovelletaan nyt Gaussin-Legendren kvadratuurikaavoja ensin solmuun 1 liittyvään integraaliin

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 J d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(4 + \xi + \eta) d\xi d\eta L^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(4 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] L^2 \\ &= \frac{10}{3} L^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Samalla tavalla saadaan

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_2 J d\xi d\eta = 4L^2, \quad (7.40)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 J d\xi d\eta = \frac{14}{3}L^2, \quad (7.41)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_4 J d\xi d\eta = 4L^2. \quad (7.42)$$

Tilavuusvoimista  $f_x = 0$  ja  $f_y = \rho g$  aiheutuva voimavektori on siten

$$\mathbf{f}^{(e)} = -\frac{2\rho g t L^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T. \quad (7.43)$$

## 7.4 Gaussin-Lobatto menetelmä

Gaussin-Lobatto integroimiskaava eroaa Gaussin-Legendren kvadratuureista ai-noastaan siinä, että välin päätepisteet valitaan aina myös integroimispisteiksi. Muut kvadratuuripisteet samaten kuin integroimispisteisiin liittyvät painot määritetään vastaavaan tapaan kuin Gaussin-Legendren menettelyssä. Koska kahden integroimispisteen paikka on ennalta määrätty, tarvitaan Gaussin-Lobatto menettelyssä yksi integroimispiste enemmän kuin vastaavassa Gaussin-Legendren menetelmässä tietynasteisen polynomin tarkkaan integrointiin. Integroimispisteiden paikkoja kutsutaan myös Lobatto pisteiksi.

**Esimerkki 7.5** Määritetään sen Gaussin-Lobatto kvadratuurin integroimispisteiden paikat ja painojen arvot, joka integroi tarkasti viidennen asteen polynomin.

Integroimispisteitä tarvitaan siis neljä. Symmetrian perusteella on määritettävänä vain yhden pisteen paikka ja kaksi painokerrointa. Kaavaa (7.18) vastaava yhtälö on

$$I = w_1 p(-1) + w_2 p(-\xi_2) + w_2 p(\xi_2) + w_1 p(1). \quad (7.44)$$

Vertaamalla lauseketta yhtälöön (7.19) saadaan

$$2w_1 + 2w_2 = 2, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}, \quad 2w_1 + 2w_2 \xi_2^4 = \frac{2}{5}, \quad (7.45)$$

josta saadaan ratkaisuksi

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}, \quad w_1 = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{5}{6}. \quad (7.46)$$



## 7.5 Numeerinen integrointi kolmioelementissä

Alakoordinaateista riippuvat funktiot integroidaan kaavalla

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^n 2w_i A f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) + R, \quad (7.47)$$

missä  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ ,  $w_i$ :t ovat integroimispisteisiin  $i$  liittyvät painokertoimet,  $n$  on integroimispisteiden lukumäärä,  $R$  on jäännöstermi ja  $A$  on elementin pinta-ala. Taulukkoon (7.1) on koottu joitakin kolmioalueen integroimiskaavoja.

**Taulukko 7.1** Kolmioalueen integroimispisteitä ja painokertoimia.

Kertaluku	virhetermi $R$	alakoordinaatit			paino $2w_i$
		$L_1$	$L_2$	$L_3$	
lineaarinen	$O(h^2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
kvadraattinen	$O(h^3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
kuubinen	$O(h^4)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
		$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{25}{48}$

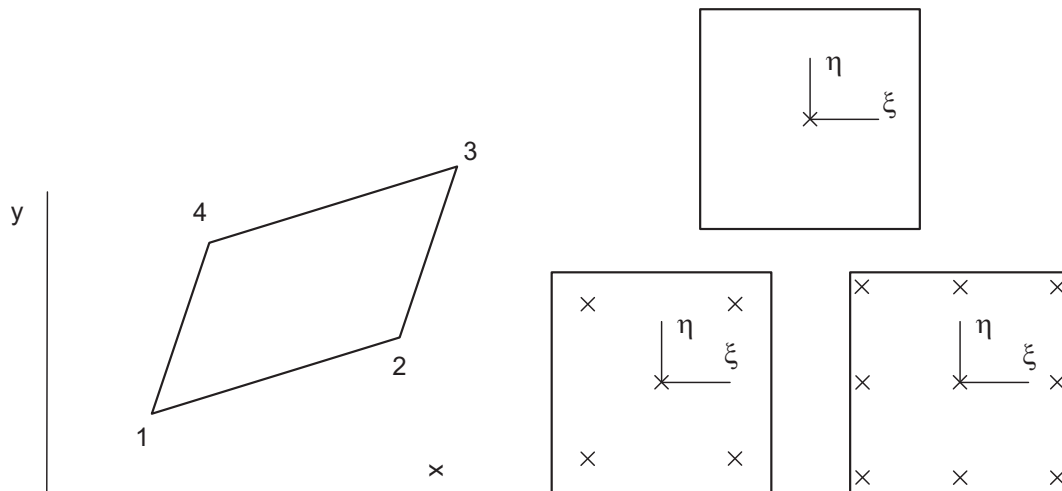
## 7.6 Isoparametrinen elementtien integrointi

### 7.6.1 Yleistä

Gaussin menetelmä soveltuu yhtä hyvin yksi-, kaksi- ja kolmiulotteisiin tehtäviin. Integroimispisteiden lukumäärä on tavallisesti sama eri suunnissa (2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa). Sensijaan integroimispisteiden lukumäärän valinta on monitahoinen tehtävä.

Nelisolmuisen suorakaiteen tai myös kuvan 7.2 vinokaiteen tapauksessa Jacobin determinantti  $J$  on vakio, ja siirtymä-muodonmuutosmatriisiin  $\mathbf{B}$ -alkiot riippuvat lineaarisesti luonnollisista koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$ . Jos materiaalin jäykkyysmatriisiin  $\mathbf{D}$  alkiot ja paksuus  $t$  ovat vakioita, niin Gaussin  $2 \times 2$  pisteen integroimiskaava antaa tarkan tuloksen. Vastaavasti kahdeksansolmuisen suorakaiteen muotoisen elementin tapauksessa  $J$ =vakio, sisältää  $\mathbf{B}$ -matriisi kvadraattiset  $\xi$ :n ja  $\eta$ :n polynomit, ja jäykkyysmatriisin termien laskemisessa joudutaan integroimaan neljännen asteen polynomeja. Tällöin Gaussin  $3 \times 3$  pisteen kaava tuottaa tarkan tuloksen.

Nelisolmuisen elementin tapauksessa  $2 \times 2$  pisteen Gaussin menetelmää sanotaan *täydelliseksi* integroinniksi, koska se integroi tarkasti säännöllisen muotoisen



**Kuva 7.2** Bilineaarinen elementti sekä Gaussin pisteet  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  ja  $3 \times 3$  pisteen kaavoissa.

elementin jäykkyyismatriisiin termit. Samasta syystä  $3 \times 3$  pisteen kaava on täydellinen kvadraattisille elementeille.

Elementin muodon poiketessa suorakaiteesta ei  $J$  enää ole vakio ja  $\mathbf{B}$ -matriisiin alkiot sisältävät  $\xi$ :n ja  $\eta$ :n rationaalifunktioita. Täten elementin jäykkyyismatriisiin alkiot eivät enää ole polynomeja, eivätkä Gaussin kvadratuurit tuota tarkkoja tuloksia. Voidaan päätellä, että elementin muodon on oltava mahdollisimman lähellä suorakaidetta hyvän tarkkuuden saavuttamiseksi.

Integrointipisteiden lukumäärän kasvattaminen parantaa integroinnin tarkkuutta, mutta lisää samalla laskentakustannuksia. Numeerinen integrointi voi tuoda epätarkkuutta elementin muodostamiseen. Tarkka integrointi ei ole välttämättä edes edullista elementtimenetelmän tulosten tarkkuuden kannalta. Elementin otaksuttu siirtymätila sisältää vain rajoitetun määrän deformaatiomuotoja, joiden avulla ei voida yleensä esittää tehtävän tarkkaa siirtymätilaa. Otaksutut siirtymätilat merkitsevät sitä, että analysoitava rakenne on korvattu rakenteella, joka sisältää äärellisen määrän siirtymätiloja. Korvaava rakenne, eli elementtimalli on siten jäykempi kuin todellinen rakenne. Korvausrakenteen liiallista jäykkyyttä voidaan käytännössä pienentää soveltamalla täydellistä integrointia alhaisasteisempaa menetelmää eli redusoitua integrointia. Redusoitu integrointi on myös laskentakustannusten kannalta edullisempää.

Redusoidun integroinnin seurauksena voi syntyä nollaenergiamuotoja eli deformaatiomuotoja, joihin liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja joiden seurauksena jäykkyyismatriisi on singulaarinen tai lähes singulaarinen.

Elementin muodonmuutosenergia on

$$U^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} U_0 dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV, \quad (7.48)$$

missä  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)}$ . Muodonmuutosenergia on täten

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(e)T} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV \mathbf{u}^{(e)} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}. \quad (7.49)$$

Elementtiverkkoa tihennettäessä elementin muodonmuutostila lähenee vakiotilaa eli  $U_0^{(e)}$  lähestyy vakiota elementin alueella. Jos  $U_0^{(e)}$  on vakio, niin  $U^{(e)}$ :n määrittämiseksi täytyy tilavuus integroida tarkasti. Täten esimerkiksi levytehtävissä on numeerisen kvadratuurin integroitava  $tJ$  tarkasti. Esimerkiksi bilineaarisen elementin tapauksessa, jos  $t$ =vakio,  $tJ$  riippuu lineaarisesti koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$ . Tällöin integrointipisteiden vähimmäismäärä on yksi. Kvadraattisen elementin tapauksessa  $J$  sisältää termit  $\xi^3$  ja  $\eta^3$ , joten tarvitaan  $2 \times 2$  Gaussin kaavaa tilavuuden tarkkaan integrointiin.

Isoparametristen elementtien tapauksessa paras integrointimenetelmä on tavallisesti alhaisasteisin menetelmä, joka integroi tilavuuden tarkasti ja joka tuottaa stabiilin jäykkyyismatriisin ja elementtimallin, johon ei sisälly nollaenergiamuotoja.

### 7.6.2 Redusoitu integrointi ja nollaenergiamuodot

Elementtimenetelmän tasapainoyhtälöryhmä on

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (7.50)$$

Mikäli siirtymävektori  $\mathbf{u}$  vastaa jäykän kappaleen liikettä, niin

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} = 0. \quad (7.51)$$

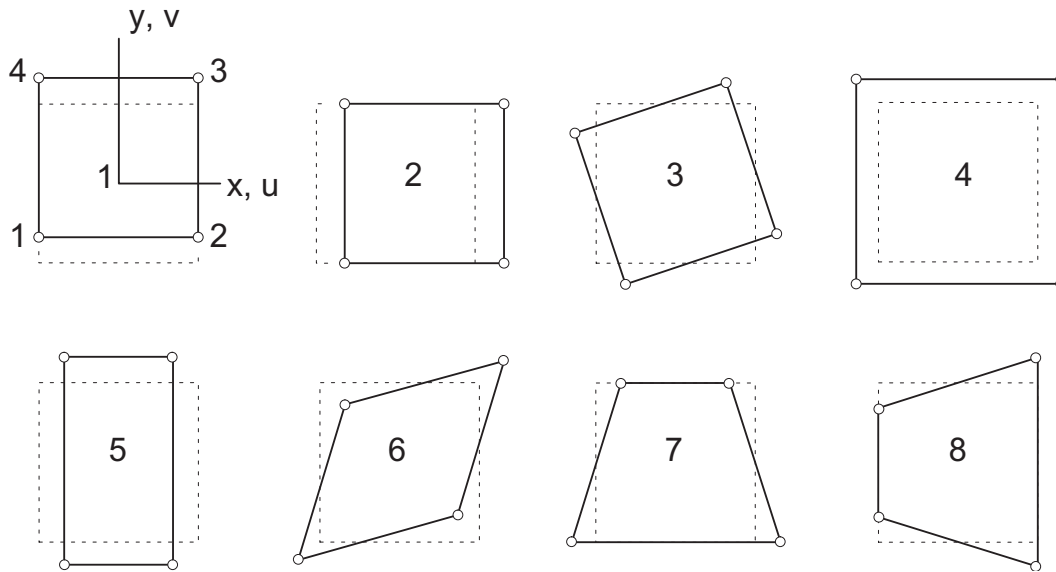
Siirtymätilaa  $\mathbf{u}$ , johon liittyvä muodonmuutosenergia on nolla, voidaan nimittää nollaenergiamuodoksi. Koska jäykänkappaleen liike voidaan ja täytyykin eliminoida siirtymäreunaehtojen avulla, nollaenergiamuotoja ovat varsinaisesti muut kuin yhtälön (7.51) toteuttavat siirtymätilat, jotka eivät vastaa jäykänkappaleen liikettä. Nollaenergiamuotoja voi syntyä elementtiverkkoon ja elementtiin esimerkiksi redusoidun integroinnin seurauksena.

Kuvassa 7.3 on esitetty nelisolmuisen bilineaarisen elementin siirtymätilat eli ominaismuodot.

Kuvan 7.3 siirtymätilat 1,2 ja 3 ovat jäykän kappaleen liikkeitä. Tilat 4,5 ja 6 liittyvät vakiomuodonmuutostiloihin, joissa elementin muodonmuutosenergia  $U^{(e)} > 0$ . Tilat 7 ja 8 ovat taivutusmuotoja. Jos käytetään yhden pisteen Gaussin integrointia, niin tiloihin 7 ja 8 liittyvä muodonmuutosenergia on nolla ja tilat 7 ja 8 ovat tässä tapauksessa nollaenergiamuotoja.

Ominaismuotoon 7 liittyvä elementin siirtymävektori on

$$\mathbf{u}^{(e)T} = [ -c \ 0 \ c \ 0 \ -c \ 0 \ c \ 0 ], \quad (7.52)$$



**Kuva 7.3** Bilineaarisen elementin ominaismuodot.

ja siirtymäkenttä on

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i = (-N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) - N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta))c = (7.53a)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i = 0. \quad (7.53b)$$

Jacobian matriisi on suorakaide-elementin tapauksessa

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & y_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{x_{21}y_{31}} \begin{bmatrix} y_{31} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad x_{21} = x_2 - x_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1. \quad (7.54)$$

Siirtymägradienttivektorin

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (7.55)$$

komponentit ovat tässä tapauksessa

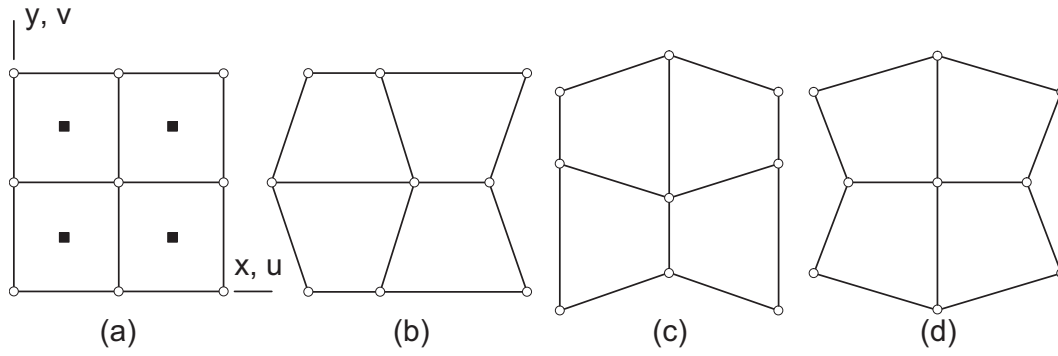
$$u_{,x} = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta \quad \text{ja} \quad u_{,y} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.56)$$

Koska  $v = 0$ , ovat muodonmuutoskomponentit nyt

$$\epsilon_x = -\frac{2c}{(x_2 - x_1)}\eta, \quad \epsilon_y = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = -\frac{2c}{(y_3 - y_1)}\xi. \quad (7.57)$$

Elementin keskipisteessä eli Gaussin yhden pisteen kvadratuurin integrointipisteessä

$$\epsilon_x(0, 0) = \epsilon_y(0, 0) = \gamma_{xy}(0, 0) = 0 \quad (7.58)$$



**Kuva 7.4** Gaussin  $1 \times 1$ -integroinnin synnyttämät mekanismit neljän bilineaarisen elementin verkossa.

ja kyseisellä integrointimenettelyllä määritetty elementin jäykkyydsmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = (twJB^T DB) |_{\xi=\eta=0} \quad (7.59)$$

on epästabiili eli

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad U^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = 0. \quad (7.60)$$

Siirtymämuotoja 7 ja 8 voidaan nimittää mekanismeiksi  $1 \times 1$ -integroinnin yhteydessä. Mekanismeja voi syntyä paitsi elementtiin myös elementtiverkkoon. Kuvan 7.4 mekanismeja nimitetään muotonsa perusteella myös tiimalasimuodoiksi (hourglass modes). Kuvan mekanismit koostuvat siirtymätiloista 7 ja 8, joihin on yhdistetty jäykän kappaleen rotaatio.

Mekanismin synnyttämiseksi elementin ei tarvitse olla suorakaiteen muotoinen. Jos elementin siirtymätila on esimerkiksi

$$u = a_1 \xi \eta \quad \text{ja} \quad v = a_2 \xi \eta \quad (7.61)$$

missä  $a_1$  ja  $a_2$  ovat vakioita, niin Gaussin pisteessä  $\xi = \eta = 0$

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \quad (7.62)$$

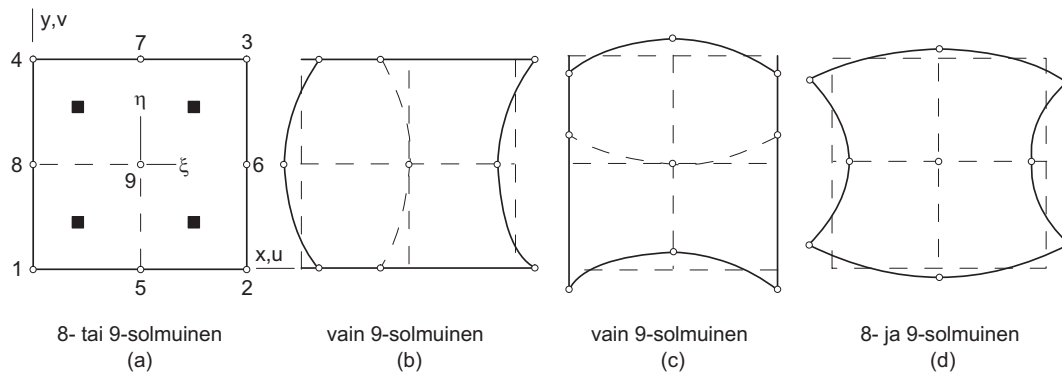
riippumatta elementin muodosta.

Tarkastellaan seuraavaksi kvadraattista elementtiä Gaussin  $2 \times 2$  integroinnin yhteydessä. Kuvan 7.5b yhdeksänsolmuisen elementin siirtymät ovat

$$u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 \quad \text{ja} \quad v = 0. \quad (7.63)$$

Gaussin menetelmän  $2 \times 2$ -pisteen kaavan integroimispisteissä  $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$  ja  $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$  siirtymistä (7.63) seuraa

$$u_{,\xi} = u_{,\eta} = v_{,\xi} = v_{,\eta} = 0 \quad (7.64)$$



**Kuva 7.5** Kvadraattisten elementtien tiimalasimuotoja.

ja muodonmuutokset ovat nollia kyseisissä integroimispisteissä. Kuvien 7.5b ja c muodot eivät ole mahdollisia 8-solmuisessa elementissä, koska sen interpolaatiofunktioit eivät sisällä termiä  $\xi^2\eta^2$ . Sensijaan kuvan 7.5d muoto on mahdollinen sekä 8-että 9-solmuisessa elementissä. Mekanismin liittyvä siirtymäkenttä on

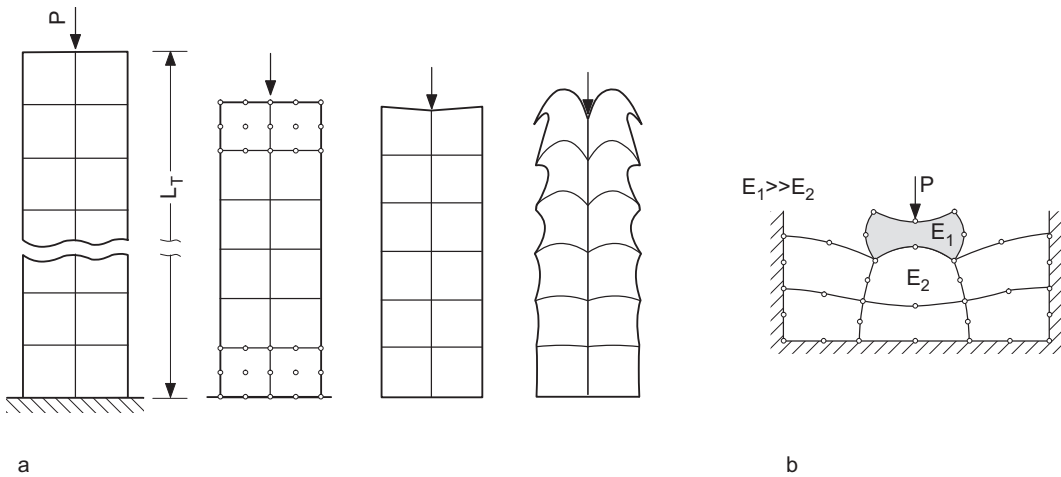
$$u = \xi(3\eta^2 - 1) \quad \text{ja} \quad v = \eta(1 - 3\xi^2) \quad (7.65)$$

ja näitä siirtymiä vastaavat muodonmuutokset ovat nollia Gaussin  $2 \times 2$ -kaavan pisteissä. Kuvan 7.5d mekanismi ei ole mahdollinen vierekkäisissä elementeissä, koska näin deformatuvat vierekkäiset elementit eivät ole yhteensopivia.

Elementin jäykkyydsmatriisin säännöllisyysaste eli rangi on vapausasteiden lukumäärä vähennettynä nollaenergiamuodoilla, joita ovat jäykän kappaleen siirtymämuodot ja mekanismit. Gaussin  $2 \times 2$ -kaavalla integroidun 9-solmuisen elementin rangi on  $2 \times 9 - 3 - 3 = 18 - 6 = 12$ . Vastaavasti 8-solmuisen elementin rangi on  $16 - 3 - 1 = 12$  eli sama kuin vastaavan 9-solmuisen elementin rangi. Elementin epästabiilius voidaan välttää käyttämällä  $3 \times 3$ -integrointia.

Vaikkei elementtiverkkoon sisältyisikään mekanismia, se voi silti käyttäytyä huonosti, jos mekanismin syntymistä estävä rajoite on heikko. Kuvan 7.6a verkko koostuu yhden pisteen kaavalla integroiduista nelisolmuisista elementeistä tai  $2 \times 2$ -kaavalla integroiduista 9 solmuisista elementeistä. Jäykkä kiinnitys estää mekanismin syntymisen keskeisen pistekuorman tapauksessa. Kiinnityksen antaman rajoitteen vaikutus pienenee, kun etäisyys tuelta kasvaa. Pistekuorman läheisyydessä siirtymätilaan ilmestyy kuvien 7.4 ja 7.5 esittämiä deformaatiokomponentteja. Esimerkiksi  $2 \times 24$  elementin verkolla laskettuna siirtymä on 500-kertainen 'tarkkaan tulokseen'  $u = PL/EA$  verrattuna.

Kuvan 7.6b tapauksessa vinoviivoitetun elementin, johon pistekuorma  $P$  kohdistuu, kimmokerroin  $E_1$  on paljon suurempi kuin viereisen osan kimmokerroin  $E_2$ . Jäykkään reunaan tuetut joustavat elementit tukevat heikosti jäykkää elementtiä, ja  $2 \times 2$ -kaavalla integroituihin kvadraattisiin elementteihin syntyy rajoitettu mekanismia muistuttava siirtymätila.



**Kuva 7.6** Tiimalasimuotoja elementtiverkossa.

Mekanismeista aiheutuvien vaikeuksien välttämiseksi, mahdollisen tarkkuuden menetyksen kustannuksella, varovainen analysoija tyytyy käyttämään vain elementtejä, jotka ovat stabiileja kaikissa olosuhteissa.

### 7.6.3 Mekanismin kontrollointi

Redusoidulla integroinnilla saadaan aikaiseksi tarkkoja ja luotettavia elementtejä, jos mekanismin syntyminen voidaan jollakin tavalla estää. Tarkastellaan esimerkiksi bilineaarista elementtiä ja yksinkertaisuuden vuoksi sen  $x$ -akselin suuntaisia solmuisiirtymiä  $\mathbf{u}_x^{(e)}$ . Kuvan 7.3 siirtymämuodoissa 1 ja 8  $\mathbf{u}_x^{(e)} = \mathbf{0}$ . Muotojen 2,...,6 mielivaltainen yhdistelmä on

$$\mathbf{u}_x^{(e)} = a_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_6 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (7.66)$$

missä  $a_i$ :t ovat vakioita. Kuvan 7.3 ominaismuoto 7 on

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.67)$$

Muoto 7 on ortogonaalinen muiden muotojen kanssa eli

$$\mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. \quad (7.68)$$

Muoto 7 voidaan stabiloida ja eliminoida lisäämällä yhden pisteen Gaussin menetelmällä muodostettuun jäykkymatriisiin 'stabiloiva' matriisi

$$\mathbf{K}_7^{(e)} = a_7^2 \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T}. \quad (7.69)$$

Samalla tavalla estetään muodon 8 syntyminen. Kertoimet  $a_7$  ja  $a_8$  voidaan valita siten, että elementin muodonmuutosenergia saa tarkan arvon puhtaassa taivutuksessa. Koska muodot 7 ja 8 ovat ortogonaalisia muiden muotojen kanssa,  $\mathbf{K}_7^{(e)}$  ja  $\mathbf{K}_8^{(e)}$  eivät vaikuta jäykistävästi muihin siirtymämuotoihin. Esimerkiksi muotoon 7 ja matriisiin  $\mathbf{K}_7^{(e)}$  liittyvät solmuvoimat ovat

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \mathbf{K}_7^{(e)} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} \mathbf{u}_{x7}^{(e)T} \mathbf{u}_{xi}^{(e)} = \mathbf{u}_{x7}^{(e)} 0 = \mathbf{0}, \quad (7.70)$$

kun  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ .

Edellä kuvattu stabilointimenetelmä voidaan yleistää myös muille elementeille.

#### 7.6.4 Nollaenergiamuotojen määrä elementtiverkossa

Nollaenergiamuotojen *vähimmäismäärälle* elementtiverkossa voidaan johtaa lauseke seuraavalla tarkastelulla. Otaksutaan, että elementtiverkon integroimispisteiden lukumäärä on  $n_{int}$ . Rakenteen jäykkyysmatriisi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i, \quad (7.71)$$

missä  $\alpha_i$  sisältää painokertoimen ja Jacobin determinantin sekä mahdollisesti elementin paksuuden integrointipisteessä  $i$ . Merkintä  $\mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i$  tarkoittaa sitä, että matriisien termit on muodostettu integrointipisteessä  $i$ . Rakenteen muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \alpha_i \boldsymbol{\epsilon}_i^T \mathbf{D}_i \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (7.72)$$

missä integroimispisteessä  $i$  muodostettu muodonmuutosvektori on

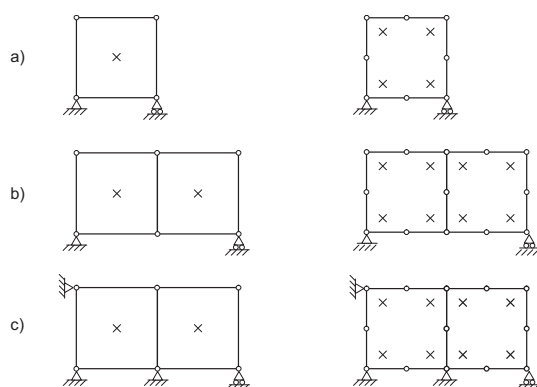
$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{u}. \quad (7.73)$$

Määritelmän mukaan  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  on nollaenergiamuoto, jos siihen liittyvä muodonmuutosenergia  $U$  on nolla. Koska konstitutiivinen matriisi  $\mathbf{D}$  on positiivisesti definiitti, muodonmuutosenergia on nolla, jos ja vain jos muodonmuutosvektori on nollavektori integrointipisteissä  $i = 1, \dots, n_{int}$ , eli jos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n_{int}} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (7.74)$$

Levytehtävässä matriisin  $\mathbf{B}_i$  dimensiot ovat  $3 \times 2n$  ja vektorin  $\mathbf{u}$  dimensiot ovat  $2n \times 1$ , missä  $n$  on elementtiverkon solmujen lukumäärä. Tällöin kaavan (7.74) kerroinmatriisin dimensiot ovat  $3n_{int} \times 2n$  ja kertomisen tuloksena syntyvän vektorin





**Kuva 7.7** Elementtiverkkoja joissa esiintyy nollaenergiamuotoja.

**Taulukko 7.2** Kuvan 7.7 elementtimallien nollaenergiamuodot.

rakenne	4-solm. elem.	8-solm. elem.
a	2	1
b	3	0
c	0	0

dimensiot ovat  $3n_{int} \times 1$ . Homogeenisessa yhtälöryhmässä (7.74) on  $2n$  tuntematonta solmuisiirtymää ja  $3n_{int}$  yhtälöä. Jos  $2n > 3n_{int}$ , niin tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä ja ryhmällä (7.74) on vähintään  $2n - 3n_{int}$  ei-triviaalia ratkaisua siirtymävektoriksi  $\mathbf{u}$ . Verkossa on siten vähintään

$$2n - 3n_{int} = N_0 \quad (7.75)$$

nollaenergiamuotoa. Nelisolmuisen elementin ja yhden pisteen integroinnin tapauksessa  $n = 4$  ja  $n_{int} = 1$ . Kaavan (7.75) perusteella nollaenergiamuotojen lukumäärä on  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$ , ja ne ovat kuvan 7.3 jäykänkappaleen siirtymät 1,2 ja 3 sekä muodot 7 ja 8. Jäykänkappaleen liikkeen estämiseksi rakenne tuetaan reunaehdoilla, joiden lukumäärä olkoon  $n_r$ . Tällöin kaavan (7.75) perusteella elementtimalliin jää vähintään

$$2n - n_r - 3n_{int} = N_0 \quad (7.76)$$

nollaenergiamuotoa. Kuvan 7.7 rakenteiden mahdollisten nollaenergiamuotojen lukumäärät on esitetty taulukossa 7.2 Esimerkiksi kuvan 7.7b nelisolmuisen elementin tapauksessa  $n = 6$ ,  $n_r = 3$ ,  $n_{int} = 2$ , ja kaavasta (7.76) seuraa  $N_0 = 2 \times 6 - 3 \times 2 - 3 = 3$ . Jos malliin jää reunaehtojen asettamisen jälkeen nollaenergiamuotoja, niin redusoidusta integroinnista on luovuttava.

Edellisen perusteella päätellään, että täydellinen integrointi tuottaa luotettavan mallin, redusoitu integrointi voi parantaa tulosten tarkkuutta, jos nollaenergiamuotoja ei synny ja elementin muodon on oltava mahdollisimman vähän vääristynyt eli

lähellä suorakaiteen muotoa.

### 7.6.5 Reunakuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa, joka kuuluu levyn reunan osaan  $S_\sigma$ , jolla reunavoimat tunnetaan. Reunavoimavektori olkoon

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix}, \quad (7.77)$$

ja elementin reunan viiva-alkio on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (7.78)$$

missä differentiaalit  $dx$  ja  $dy$  määritellään kaavoilla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (7.79b)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}. \quad (7.80)$$

Elementin reunalla  $\xi$  on vakio

$$dx^2 + dy^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2} d\eta. \quad (7.81)$$

Vastaavasti reunalla  $\eta =$  vakio, saadaan pituusalkion lausekkeeksi

$$ds = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2} d\xi. \quad (7.82)$$

Mikäli reunan  $S_\sigma$  jakautunut kuormitus on määritelty normaali- ja tangentialikomponenttien  $\bar{p}_n$  ja  $\bar{p}_t$  avulla, niin  $\bar{p}_x$  ja  $\bar{p}_y$  saadaan muunnoskaavoilla, katso kuvaa 7.8

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \cos \alpha - \bar{p}_t \sin \alpha, \quad (7.83a)$$

$$\bar{p}_y = \bar{p}_n \sin \alpha + \bar{p}_t \cos \alpha. \quad (7.83b)$$

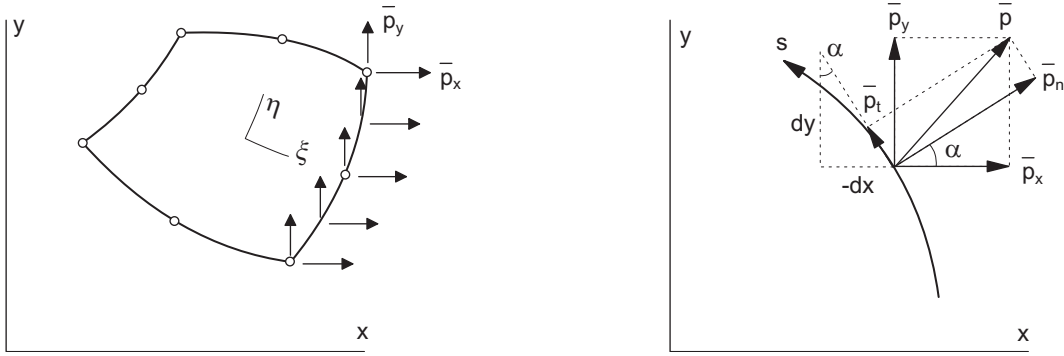
Sijoittamalla

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad (7.84)$$

saadaan

$$\bar{p}_x = \bar{p}_n \frac{dy}{ds} + \bar{p}_t \frac{dx}{ds}, \quad (7.85a)$$

$$\bar{p}_y = -\bar{p}_n \frac{dx}{ds} + \bar{p}_t \frac{dy}{ds}. \quad (7.85b)$$



**Kuva 7.8** Levyelementin reunakuormitus.

Reunalla  $\xi = \text{vakio}$  saadaan lausekkeet

$$\bar{p}_x = \left( \bar{p}_n \frac{dy}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (J_{22}\bar{p}_n + J_{12}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86a)$$

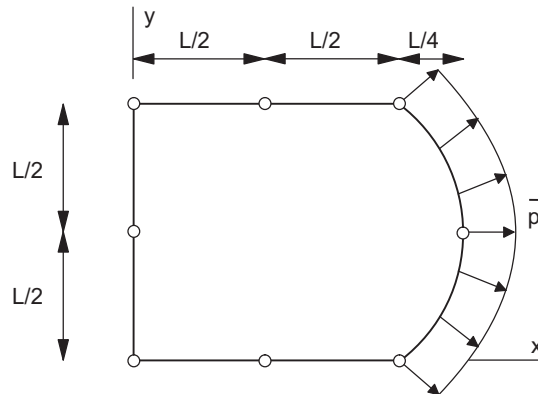
$$\bar{p}_y = \left( -\bar{p}_n \frac{dx}{d\eta} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds} = (-J_{12}\bar{p}_n + J_{22}\bar{p}_t) \frac{d\eta}{ds}, \quad (7.86b)$$

ja vastaavasti reunalla  $\eta = \text{vakio}$

$$\bar{p}_x = \left( \bar{p}_n \frac{dy}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (J_{21}\bar{p}_n + J_{11}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}, \quad (7.87a)$$

$$\bar{p}_y = \left( -\bar{p}_n \frac{dx}{d\xi} + \bar{p}_t \frac{dy}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{ds} = (-J_{11}\bar{p}_n + J_{21}\bar{p}_t) \frac{d\xi}{ds}. \quad (7.87b)$$

**Esimerkki 7.6** Määritä oheisen bikvadraattisen Serendip-tyyppisen elementin kuormavektorin lauseke reunalla 2 olevasta painekuormasta. Suorita integroinnit Gaussin kaavoilla.



Kuormitusvektorin komponentit saadaan lausekkeista

$$\bar{f}_{xi} = \int_s N_i \bar{p}_x ds = \int_{-1}^1 N_i J_{22} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88a)$$

$$\bar{f}_{yi} = \int_s N_i \bar{p}_y ds = - \int_{-1}^1 N_i J_{12} \bar{p}_n d\eta, \quad (7.88b)$$

missä  $J_{22}$  ja  $J_{12}$  ovat geometriakuvauksen Jacobin matriisin alkioita:

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.89)$$

Elementin solmujen koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0, 0), & (x_5, y_5) &= \left(\frac{1}{2}L, 0\right), \\ (x_2, y_2) &= (L, 0), & (x_6, y_6) &= \left(\frac{5}{4}L, \frac{1}{2}L\right), \\ (x_3, y_3) &= (L, L), & (x_7, y_7) &= \left(\frac{1}{2}L, L\right), \\ (x_4, y_4) &= (0, L), & (x_8, y_8) &= \left(0, \frac{1}{2}L\right), \end{aligned} \quad (7.90)$$

ja interpolaatiofunktiot ovat

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \quad (7.91a)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \quad (7.91b)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \quad (7.91c)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (7.91d)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (7.91e)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (7.91f)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (7.91g)$$

Tarvittavat Jacobin matriisin alkiot ovat:

$$\begin{aligned} J_{22} &= y_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} y_i \\ &= (N_{3,\eta} + N_{4,\eta} + \frac{1}{2}N_{6,\eta} + N_{7,\eta} + \frac{1}{2}N_{8,\eta})L, \end{aligned} \quad (7.92a)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= x_{,\eta} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} x_i \\ &= (N_{2,\eta} + N_{3,\eta} + \frac{1}{2}N_{5,\eta} + \frac{5}{4}N_{6,\eta} + \frac{1}{2}N_{7,\eta})L. \end{aligned} \quad (7.92b)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden  $\eta$ -derivaatat

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi - 2\eta), & N_{6,\eta} &= -\eta(1 + \xi), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi + 2\eta), & N_{7,\eta} &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2), \\ N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi + 2\eta), & N_{8,\eta} &= -\eta(1 - \xi), \\ N_{5,\eta} &= -\frac{1}{2}(1 - \xi^2), \end{aligned} \quad (7.93)$$

jotka reunalla  $\xi = 1$  saavat arvot

$$\begin{aligned} N_{2,\eta} &= -\frac{1}{2}(1 - 2\eta), \\ N_{3,\eta} &= \frac{1}{2}(1 + 2\eta), \\ N_{6,\eta} &= -2\eta, \\ N_{4,\eta} &= N_{5,\eta} = N_{7,\eta} = N_{8,\eta} = 0. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Alkioiden  $J_{22}$  ja  $J_{12}$  lausekkeet tarkasteltavalla reunalla ovat

$$J_{22} = \frac{1}{2}L, \quad J_{12} = -\frac{1}{2}\eta L. \quad (7.95)$$

Viimein kysytyt kuormitusvektorin komponentit voidaan laskea

$$\begin{aligned} f_{x2} &= \int_{-1}^1 N_2(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \eta)(-\eta) \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n, \\ &= \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^2 - \eta) d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} \bar{p} L, \end{aligned} \quad (7.96a)$$

$$f_{x3} = \int_{-1}^1 N_3(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 + \eta) \eta \frac{1}{2} L d\eta \bar{p}_n = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96b)$$

$$f_{x6} = \int_{-1}^1 N_6(1, \eta) J_{22} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{2} \bar{p} L \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) d\eta = \frac{2}{3} \bar{p} L, \quad (7.96c)$$

$$f_{y2} = - \int_{-1}^1 N_2(1, \eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{4} \bar{p} L \int_{-1}^1 (\eta^3 - \eta^2) d\eta = -\frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96d)$$

$$f_{y3} = - \int_{-1}^1 N_3(1, \eta) J_{12} \bar{p}_n d\eta = \frac{1}{6} \bar{p} L, \quad (7.96e)$$

$$f_{y6} = 0. \quad (7.96f)$$



# Luku 8

## Elementtiapproksimaation tarkkuus

### 8.1 Virheen mittaus

Elementtimenetelmän antaman likiratkaisun konvergoiminen, eli suppeneminen kohti ratkaistavana olevan matemaattisen mallin tarkkaa ratkaisua riippuu pääasiassa elementtiverkon koosta ja siitä minkä asteisia interpolaatiopolynomeja käytetään. Elementtimenetelmän kehityksen alkuvaiheessa käytettiin alhaista astetta olevia polynomeja ja ratkaisun tarkentaminen tapahtui verkkoa hienontamalla eli tihentämällä. Tätä strategiaa kutsutaan elementtimenetelmän  $h$ -versioksi ja se on nykyisinkin hallitseva elementtimenetelmäversio. Modernimpaa tapaa edustaa elementtimenetelmän  $p$ -versio, jossa elementtien lukumäärä pidetään vakiona, usein melko pienenä, ja korottamalla interpolaation astetta saavutetaan numeerisen ratkaisun tarkentuminen. Mikäli ongelman ratkaisufunktiot ovat sileitä, saavutetaan tällä menetelmällä optimaaliset suppenemisominaisuudet. Tämä on johtanut hierarkisten interpolaatiofunktioiden käyttöönottoon, joilta lisäksi vaaditaan kantajärjestelmän mahdollisimman suurta stabiiliutta.

Miten ratkaisun tarkkuuden paranemista mitataan? Tähän on olemassa joukko kriteerejä, joista yksinkertaisin on tutkia tietyn suuren arvon muuttumista kun elementtiverkkoa tihennetään ja/tai interpolaatiopolynomien kertalukua kasvatetaan. Yksinkertaisin mahdollinen tapa on käyttää halutun suuren tiettyä pistearvoa. Tämä on kuitenkin yleisesti ottaen kyseenalainen tapa tulkita numeerisen ratkaisun hyvyttä, ellei kyseessä ole suuren ratkaisualueessa esiintyvä maksimiarvo. Luotettavamman kuvan ratkaisun paranemisesta saadaan tutkimalla suppenemista tiettyjen normien avulla. Tällaisia voivat olla vaikkapa maksiminormi

$$\|u(x)\|_{\infty} = \max_x |u(x)|, \quad (8.1)$$

tai ns.  $L^2$ -normi, joka mittaa funktiota neliöintegraalin mielessä

$$\|u\|_{L_2} = \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Normi siis kuvaa tietyllä tavalla funktion suuruutta ja on vektorilaskennasta tutun käsitteen “vektorin pituus” laajennus.

Malliprobleeman (3.1) tapauksessa luontevia suureita olisivat lämpötilan (siirtymän) virhe

$$\|u - \tilde{u}\|_\infty, \quad \text{tai} \quad \|u - \tilde{u}\|_{L_2}, \quad (8.3)$$

tai ns. energiavirhe

$$\|u - \tilde{u}\|_E = \left( \int_\Omega k(u' - \tilde{u}')^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Huomaa, että kyseisellä suureella ei kuitenkaan ole energian yksikköä. Edellä esitetyt approksimaatiovirheen lausekkeet ovat absoluuttisia lukuja. Virheen suuruus tulee monissa tapauksissa paremmin miellettyä kun käytetään suhteellisia virheen arvoja, esimerkiksi

$$e_r = \frac{\|u - \tilde{u}\|_E}{\|u\|_E}. \quad (8.5)$$

Elementtimenetelmän virhearvioanalyysi on monimutkainen ja matemaattisesti vaativa alue, joka nojautuu abstraktiin funktionaalianalyysiin. Asiasta kiinnostuneelle suositeltavia lähteitä ovat [32], [18], [26].

## 8.2 A priori virhearviot

Elementtimenetelmän yhteydessä puhutaan usein etukäteisvirhearvioista eli *a priori* virhearvioista. Nämä ovat asymptoottisia tuloksia ja usein muotoa (elementtimenetelmän  $h$ -versio)

$$\|e\| \leq Ch^k, \quad (8.6)$$

jossa  $e$  on numeerisen tuloksen virhe tarkkaan ratkaisuun verrattuna,  $h$  on elementtiverkon tiheyttä kuvaava lineaarinen mitta ns. verkkoparametri ja  $k$  on suppenemisnopeus. Mitä suurempi eksponentti  $k$  on sitä nopeammin likiratkaisu lähestyy kohti tarkkaa ratkaisua. Vakio  $C$  on tehtäväkohtainen, moninaisista seikoista (mm. elementtityypistä, tarkan ratkaisun sileydestä jne.) riippuva positiivinen verkkoparametrissa  $h$  riippumaton kerroin. Suppenemisnopeuseksponentti on puolestaan riippuvainen käytetyistä interpolaatiofunktioista ja myös siitä normista jossa virhettä mitataan, sekä itse ratkaisun sileydestä.

Funktion sileydellä tarkoitetaan sitä, kuinka monta derivointia siihen voidaan kohdistaa, jotta tulos olisi vielä neliöintegroituva, eli jos

$$\int_0^L \left( \frac{d^r u}{dx^r} \right)^2 dx < \infty \quad (8.7)$$

niin funktio  $u$  on  $r$  kertaa neliöintegroitivasti derivoituva. Funktio on sitä sileämpi mitä suurempi  $r$  on. Matemaattisesti ilmaistuna sanotaan funktion  $u$  kuuluvan *Hilbert-avaruuksien*  $H^r(0, L)$ , eli  $u \in H^r(0, L)$ . Hilbert-avaruus on normiavaruus ja



sen normia merkitään  $\|\cdot\|_{H^r}$  tai vain yksinkertaisesti  $\|\cdot\|_r$ . Reuna-arvotekävien ratkaisun sileyteen vaikuttaa oleellisesti ratkaisualueen muoto.

Edellä mainittua asymptoottisen *a priori* virhe-estimaatin lauseketta voidaan täsmentää muotoon

$$\|e\|_s \leq Ch^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.8)$$

Vakio  $C$  jää vielä riippumaan elementtityypistä, interpolaation asteesta  $p$  ja ratkaisun sileydestä (korkeimmasta mahdollisesta  $r$ :stä). Tasaiselle elementtiverkolle on kuitenkin onnistuttu johtamaan seuraavanlainen arvio

$$\|e\|_s \leq Cp^{1-r} h^k \|u\|_r \quad k = \min(p+1-s, r-s+1). \quad (8.9)$$

Arviosta nähdään, että mikäli ratkaisu  $u$  on hyvin sileä ( $r$  suuri), on interpolatiopolynomien asteen kasvattaminen ( $p$ :n kasvattaminen) nopeampi tapa pienentää virhettä kuin elementtien koon pienentäminen ( $h$ :n pienentäminen) pitämällä interpolaation aste kiinnitettynä. Mikäli ratkaisu on epäsäännöllinen ( $r$  pieni), vaikuttavat verkon tihentäminen ja polynomiavaruuden laajentaminen oleellisesti samalla tavalla, jolloin pelkästään *a priori* asymptoottisten virhetarkastelujen pohjalta ei voida päätellä, mikä olisi optimaalinen numeerinen menettelytapa.

### 8.3 Säännöllisyysluokat

Jotta voitaisiin valita optimaalinen elementtimenetelmäformulaatio, on tiedettävä ratkaisun luonne. Szabó ja Babūška [33] luokittelevat ongelmat tarkan ratkaisun  $u$  ja elementtimenetelmäratkaisun  $u_{FE}$  mukaan kolmeen luokkaan:

**Luokka A:** Tarkka ratkaisu  $u$  on analyyttinen koko ratkaisualueessa alueen reuna mukaanlukien tai alue voidaan jakaa osa-alueisiin, joissa tarkka ratkaisu on analyyttinen reunat mukaanlukien. Elementtiverkko on konstruoitu siten, että elementtien reunat yhtyvät osa-alueiden reunoihin.

**Luokka B:** Tarkka ratkaisu  $u$  on analyyttinen koko alueessa reunat mukaanlukien, lukuunottamatta äärellistä määrää alueen pisteitä (kolmessa dimensiossa viivoja). Elementtiverkko on siten konstruoitu, että pisteet joissa ratkaisu  $u$  ei ole analyyttinen ovat solmupisteitä. Kolmessa dimensiossa viivat, joissa  $u$  ei ole analyyttinen yhtyvät elementin reunaviivoihin. Singulaarisen pisteen läheisyydessä ratkaisu  $u$  voidaan tyypillisesti kirjoittaa kahden tekijän summana  $u = u_1 + u_2$ , missä  $u_1$  on sileä (analyyttinen) komponentti ja  $u_2$  on muotoa

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{\lambda_i} \Phi_i(\theta), \quad (8.10)$$

missä  $r, \theta$  ovat singulaariseen pisteeseen keskitetyt polaarikoordinaatit,  $\lambda_i$ :t positiivisia lukuja,  $A_i$ :t reunaehdoista ja kuormituksesta riippuvia kertoimia

ja  $\Phi_i$ :t ovat sileitä funktioita. Mikäli nyt  $\min(\lambda_i) < 1$  sanotaan ongelman olevan *vahvasti luokassa B*, muutoin se on *heikosti luokassa B*.

**Luokka C:** Elementtiverkkoa ei voida konstruoida siten, että solmupisteet (tai elementtien reunaviivat 3-D ongelmissa) yhtyisivät ei-analyttisiin pisteisiin. Ongelman sanotaan kuuluvan vahvasti luokkaan C, mikäli ratkaisun epäanalyttisten pisteiden asemalla ei ole ennalta määritettävissä olevaa muotoa. Jos epäanalyttiset pisteet jakautuvat alueeseen säännöllisen kaavan mukaisesti sanotaan tehtävän kuuluvan *heikosti luokkaan C*.

## 8.4 Elementtimenetelmän $h$ -, $p$ - ja $hp$ -versiot

Kuten jo kappaleessa 8.1 mainittiin, voidaan elementtimenetelmäratkaisun suppeneminen saavuttaa (a) hienontamalla verkkoa, eli pienentämällä elementtien kokoa ( $h \rightarrow 0$ ) tai (b) kohottamalla interpolaatiopolynomien astetta  $p \rightarrow \infty$ . Näitä tapoja kutsutaan elementtimenetelmän  $h$ - ja  $p$ -versioiksi. Mikäli suppeneminen saadaan aikaan sekä hienontamalla verkkoa että korottamalla interpolaatiopolynomien astetta puhutaan  $hp$ -versiosta.<sup>1</sup>

Tärkeä kysymys on eri versioiden suorituskyky ja miten sitä mitataan. Kuten *a priori* estimaateista (8.8) ja (8.9) voidaan todeta on yhteismitallisen argumentin löytäminen olla hankalaa. Sekä  $h$ - että  $p$ -laajennuksessa vapausasteiden määrä kasvaa, ja sitä voidaan pitää eräänlaisena työmäärään verrannollisena mittarina. Seuraavat tulokset ovat Szabón ja Babüskan kirjasta [33] ja pätevät kaksidimensioisille ongelmille.

**$h$ -versio:** Asymptoottinen virheestimaatti (8.8) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq CN^{-k}, \quad (8.11)$$

missä  $C$  ja  $k$  ovat positiivisia vakioita ja  $N$  on vapausasteiden lukumäärä. Erotellaan elementtiverkon tyypistä riippuen seuraavat kaksi tapausta:

1. Käytettäessä tasavälistä tai miltei tasavälistä elementtiverkkoa, eksponentti  $k$  on

$$k = \frac{1}{2} \min(p, \lambda), \quad (8.12)$$

missä  $\lambda = \min \lambda_i$  ja  $\lambda_i$  on määritelty yhtälöllä (8.10). Mikäli ratkaisu  $u$  on analyttinen koko ratkaisualueessa ja reunoilla määrittää suppenemisnopeuden pelkästään interpolaatiopolynomien aste  $p$ .

<sup>1</sup>Szabó ja Babüska [33] käyttävät termiä laajennusprosessi (extension) kuvaamaan tapahtumaa jossa diskretoinnin systemaattisilla muutoksilla vapausasteiden määrän kasvaessa saavutetaan asteittain parempi approksimaatio tarkasteltavana olevalle ongelmalle. Versio sanaa he käyttävät laajennusprosessien elementtimenetelmäimplementoinneista. Tässä esityksessä ei tehdä eroa termien laajennusprosessi ja versio välillä.

2. Mikäli elementtiverkko voidaan konstruoida siten, että virhe on tasan jakautunut elementtiverkossa, voidaan riippuvuus singulaarisuuden asteesta menetelmän konvergenssinopeuden rajoittimena eliminoida. Tällöin siis pätee

$$k = \frac{1}{2}p. \quad (8.13)$$

***p*-versio:**

1. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla ei ole singulariteettejä, on suppenemisnopeus *eksponentiaalinen*:

$$\|u - u_{FE}\|_E \leq C \exp(-k_1 N^{k_2}), \quad (8.14)$$

missä  $C, k_1$  ja  $k_2$  ovat positiivisia vakioita,  $k_2 \geq 1/2$ .

2. Mikäli ratkaisualueessa tai sen reunalla esiintyy singulaarisia pisteitä, on suppenemisnopeus *algebrallista*. Suppenemisnopeus on muotoa (8.11) ja  $k$  on riippuvainen singulaarisuuden asteesta  $\lambda$  seuraavasti:

- (a) Mikäli singulaarinen piste ei ole solmupiste,

$$k = \frac{1}{2}\lambda. \quad (8.15)$$

- (b) Mikäli singulaarinen piste yhtyy solmupisteeseen,

$$k = \lambda. \quad (8.16)$$

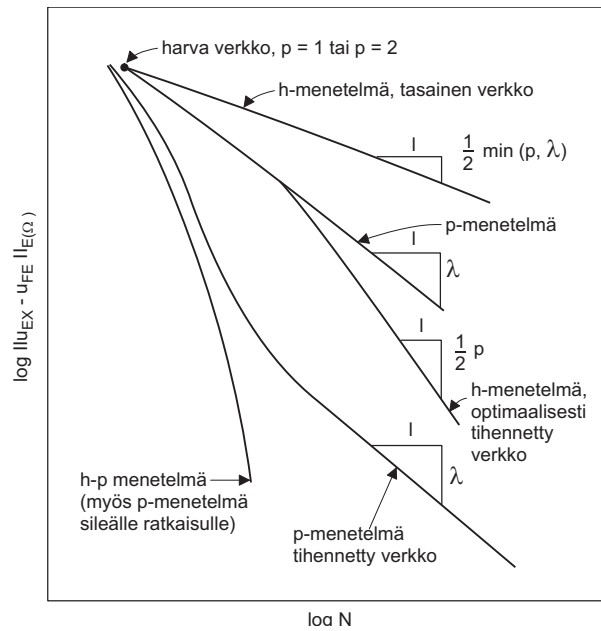
***hp*-versio:** Elementtimenetelmän *hp*-versio tarjoaa tehokkaimman tavan kontrolloida diskreetointivirhettä ja eksponentiaalinen suppenemisnopeus (muotoa (8.14) ja  $k_2 \geq 1/3$ ) voidaan saavuttaa sopivalla verkon ja polynomiasteiden valinnalla.

Optimaalinen elementtiverkko ja interpolaatiopolynomien astejakauma konstruoidaan siten, että elementit ovat pieniä singulaaristen pisteiden lähellä ja näissä elementeissä interpolaatiopolynomien aste on alhaisin. Etäännyttäessä singulaarisesta pisteestä elementtien koko kasvaa geometrisessa suhteessa ja interpolaatiopolynomien asteluku kasvaa. Kuvassa 8.1 on kaavamainen kuva eri menetelmien käyttäytymisestä.

## 8.5 Elementtimenetelmän geometrinen tulkinta

Tarkastellaan jälleen esimerkkinä malliprobleemaa (3.1), jonka virtuaalisen lämmön (tai siirtymän) periaatteen mukainen heikko muoto on

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx, \quad (8.17)$$



**Kuva 8.1** 2-D elementtimenetelmäversioiden suppeneminen mitattuna energianormissa [33].

missä virtuaalinen lämpötila  $\hat{u}$  (tai siirtymä) toteuttaa homogeeniset reunaehdot, eli kuuluu kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukkoon. Matemaatikot kirjoittavat variaatiotehtävän muodossa: etsi funktio  $u$  siten, että

$$\int_0^L ku'\hat{u}'dx = \int_0^L f\hat{u}dx \quad \forall \hat{u} \in V(I), \quad (8.18)$$

missä funktioavaruus  $V$  (tuo kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukko) tässä tapauksessa on välillä  $I = \{x|x \in [0, L]\}$  määriteltyjen jatkuvien funktioiden joukko, joiden ensimmäinen derivaatta on paloittain jatkuva ja funktio saa nolla-arvon välin päätepisteissä. Funktioavaruus  $V(I)$  voidaan määritellä seuraavasti:

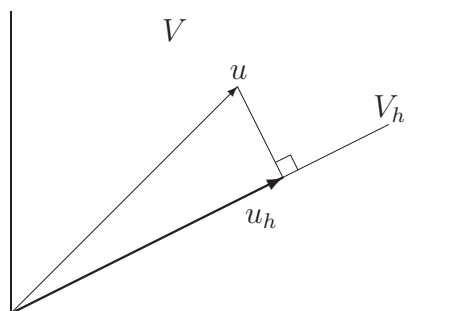
$$V(I) = \{v|v \in L^2(I), v' \in L^2(I), v(0) = 0, v(L) = 0\}, \quad (8.19)$$

missä neliöintegroituviin funktioiden joukko  $L^2(I)$  on

$$L^2(I) = \left\{ v \mid \int_I v^2 dx < \infty \right\}. \quad (8.20)$$

Skalaaritulolla varustettua täydellistä lineaariavaruutta kutsutaan *Hilbertin*<sup>2</sup> avaruudeksi.

<sup>2</sup>David Hilbert (1862-1943) saksalainen matemaatikko. Hilbertin oppilas Richard Courant (1888-1972) julkaisi 1943 artikkelin "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations" *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1-23, jota voidaan pitää elementtimenetelmään alkuna. Hilbert ja hänen aikalaisensa Felix Klein (1849-1925) loivat Göttingenin yliopistoon



**Kuva 8.2** Elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio.

Elementtimenetelmässä variaatio-ongelman (8.18) ratkaisua etsitään funktioavaruuden  $V$  äärellisulotteisessa aliavaruudessa  $V_h$ . Täten elementtimenetelmään perustuva variaatioformulaatio voidaan lausua muodossa: etsi funktio  $u_h \in V_h(I)$  siten, että

$$\int_I k u'_h \hat{u}' dx = \int_I \bar{f} \hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.21)$$

Koska  $V_h$  on  $V$ :n aliavaruus ( $V_h \subset V$ ), voidaan yhtälössä (8.18) valita variaation  $\hat{u}$  kuuluvan funktioavaruuteen  $V_h$ , jolloin vähentämällä (8.21) yhtälöstä (8.18) saadaan

$$\int_I k (u' - u'_h) \hat{u}' dx = 0, \quad \forall \hat{u} \in V_h(I), \quad (8.22)$$

eli virhe  $u - u_h$  on ortogonaalinen kaikkien  $V_h$ :n alkioiden suhteen. Tämä voidaan tulkita myös seuraavasti: elementtimenetelmäratkaisu on tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio aliavaruuteen  $V_h$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.2, jossa avaruus  $V$  assosioidaan kaksidimensioiseen Euklidiseen vektoriavaruuteen, jonka yksidimensioinen aliavaruus kuvaa avaruutta  $V_h$ .

Elementtimenetelmäratkaisu antaa siten energianormin mielessä pienimmän mahdollisen virheen aliavaruudessa  $V_h$ , eli ortogonaalisuudesta (8.22) seuraa elementtimenetelmän ns. parasapproksimaatio-ominaisuus

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - \hat{u}\|_E \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.23)$$

## 8.6 Elementtimenetelmän abstrakti formulaatio

Otetan käyttöön lyhenteitä joilla yhtälössä (8.21) tai (8.18) olevia integraaleja merkitään:

$$a(u, \hat{u}) = \int_I k u' \hat{u}' dx \quad \text{ja} \quad L(\hat{u}) = \int_I \bar{f} \hat{u} dx. \quad (8.24)$$

kukoistavan matematiikan laitoksen, jossa yhdistyivät oivallisesti matematiikka ja sitä soveltavat luonnontieteet. Vuosisadan vaihteen Göttingenissä vaikuttivat sellaiset kuuluisuudet kuten Herman Minkowski (1864-1909), Theodore von Kármán (1881-1963), Herman Weyl (1885-1955) ja filosofian laitoksella fenomenalisti Edmund Husserl (1859-1938). Courantin ristiriitoja herättävästä elämästä kiinnostuneille suositellaan Constance Reidin kirjoittamaa elämäkertaa [59].

Nyt voidaan malliprobleeman elementtimenetelmän mukainen variaatiomuoto kirjoittaa muodossa: etsi  $u_h \in V_h$  siten, että

$$a(u, \hat{u}) = L(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in V_h(I). \quad (8.25)$$

Samanlaiseen muotoon voidaan kirjoittaa muidenkin stationaaristen ongelmien virtuaalisen työn yhtälöt, tällöin vain bilineaarimuodon  $a(u, \hat{u})$ , lineaarisen funktionaalil  $L(\hat{u})$  ja avaruuden  $V_h$  merkitys on erilainen. Toisin sanoen abstraktin variaatioformulaation (8.25) voidaan ajatella kattavan suuren joukon erilaisten fysikaalisten ongelmien matemaattisia malleja.

Elementtimentelmäprobleemin (8.25) *a priori* virhearvio on suoraviivaisesti johdettavissa, mikäli seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V, \quad (8.26)$$

$$a(v, w) \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \quad (8.27)$$

ja vakiot  $\alpha$  ja  $M$  löydettävissä siten, että  $\alpha > 0$  ja  $0 < M \leq \infty$ . Mikäli (8.26) toteutuu sanotaan bilineaarimuodon  $a(v, w)$  olevan  $V$ -elliptinen. Ehto (8.27) ilmaisee bilineaarimuodon jatkuvuusominaisuuden. Näiden avulla voidaan osoittaa parasapproksimaatio-ominaisuus (8.23), nyt kirjoitettuna muodossa

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (8.28)$$

Standardi elementtimenetelmäformulaatiota voidaan menestyksellisesti soveltaa mikäli kerroin  $M/\alpha \approx 1$ . Edellisissä luvuista liemee käynyt ilmi, että standardi elementtimenetelmää voidaan hyvin soveltaa isotrooppiseen lämmönjohtumis- ja elastisuusongelmaan ja että vaikeuksia on odotettavissa kun mallinamme esim. diffuusio-konvektioyhtälöä. Ongelmia esiintyy myös kokoonpuristumattoman, tai lähes kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa, hyvin anisotrooppisten materiaalien mallinnuksessa sekä ohuiden kappaleiden (palkkien, laattojen, kuorien) analysoinnissa.