

Luku 4

Elementtimenetelmä tasoalueessa

Elementtimenetelmän yleistys useampiulotteisiin tapauksiin on sängen suoraviivaista. Kaksidimensionaalisuus mahdollistaa erilaisia elementtigeometrioita, joista tässä luvussa esitetään kolmio ja nelikulmio. Geometrian kuvaaminen mahdollistaa mielivaltaisten alueiden analysoimisen. Isoparametrisissa elementeissä elementin geometriaa kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla kuin itse ratkaistavaa suuretta. Luvussa sovelletaan elementtimenetelmää kvasiharmonisen yhtälön ratkaisuun.

4.1 Kvasiharmoninen yhtälö

Elementtimenetelmää olisi tuskin kehitetty alkua pidemmälle, jollei sen yleistäminen useampiulotteisiin tapauksiin ja mutkikkaisiin geometrioihin olisi ollut mahdollista. Tarkastellaan seuraavassa ns. kvasiharmonisen yhtälön

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) + cu = f \quad (4.1)$$

ratkaisua elementtimenetelmällä. Tällä yhtälöllä on näennäisestä yksinkertaisuudesta huolimatta suuri merkitys fysikaalisten ongelmien mallinnuksessa. Taulukossa 4.1 on esitetty yhtälön (4.1) tärkeimpiä sovellutusalueita ja suureiden merkityksiä. Mikäli yhtälön (4.1) kerroin c on negatiivinen vakio ja lähdetermi $f = 0$, on yhtälö ominaisarvotehtävä, jota kutsutaan myös Helmholtzin yhtälöksi.

Otetaan esimerkkinä kvasiharmonisesta yhtälöstä lämmön siirtymistä johtumalla kuvaava osittaisdifferentiaaliyhtälö, jossa lämmönlähde ei riipu lämpötilasta itsestään ($c = 0$)

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) = f \quad (4.2)$$

kaksidimensioisessa alueessa Ω reunaehdoilla

$$u = u_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_u, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s, \quad \text{reunan } S \text{ osalla } S_q. \quad (4.4)$$

Taulukko 4.1 Kvasiharmonisen yhtälön $-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u) + cu = f$ sovellutusalueita.

Fysikaalinen ongelma	Suure	Suureen tulkinta	Materiaalilain nimitys
lämmönjohtuminen ($c = 0$)	u \mathbf{D} f	lämpötila lämmönjohtavuudet lämmönlähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = lämpövuoto Fourier
diffuusio ($c = 0$)	u \mathbf{D} f	konsentraatio diffuusio kertoimet lähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = vuoto Fick
suotovirtaus ($c = 0$)	u \mathbf{D} f	hydraulinen korkeus vedenläpäisykertoimet virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = virtavuoto Darcy
st. sähkökenttä eristeessä ($c = 0$)	u \mathbf{D} f	jännite permittiivisyys sähkövarauksen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ = sähkövuon tiheys -
virtastationääri tila johteessa ($c = 0$)	u \mathbf{D} f	jännite sähkönjohtavuus sähkövarauksen antoisuus	$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u$ virrantiheys Ohm
kitkattoman ja kokoonpuristumattoman nesteen pyörteetön virtaus ($c = 0$)	u $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ f	nopeuspotentiaali virtauslähteen antoisuus	$\mathbf{v} = -\nabla u$ = nopeusvektori (1)
kalvon taipuma ($c = 0$)	u $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ $f = p/S$	poikittainen taipuma paine/kalvon jännitys	
massiivipoikkileikkausten vapaa vääntö ($c = 0$) (B. de St. Venant/L. Prandtl)	u $\mathbf{D} = G^{-1}\mathbf{I}$ $f = 2\theta$	Prandtlin jännitysfunktio G =leikkausmoduuli θ =vääntymä	
matalan veden seisova aaltoliike (Seiche-aalto) $f = 0$	u $\mathbf{D} = h\mathbf{I}$ $c = -\frac{4\pi^2}{gT^2}$ T	aallonkorkeus perustilaan h = veden syvyys perustilassa g = painovoiman kiihtyvyyden värähdysliikkeen jaksonaika	
akustiset värähtelyt $f = 0$	u $c = -(w/v)^2$ v	paineen muutos perustilaan w = aaltoliikkeen taajuus aallon nopeus väliaineessa	

(1) ei ole materiaalilaki

Lämpövuoto \mathbf{q} on yhteydessä lämpötilan gradienttiin konstitutiivisen yhteyden

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla u, \quad (4.5)$$

välityksellä. Yhtälö (4.2) voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f, \quad (4.6)$$

josta kertomalla painofunktioilla \hat{u} ja integroimalla alueen Ω yli seuraa

$$\int_{\Omega} \hat{u} \nabla \cdot \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.7)$$

Osittaisintegroimalla ja käyttämällä Gaussin lausetta ensimmäiseen termiin, saadaan muoto

$$\oint_S \hat{u} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{q} dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA. \quad (4.8)$$

Ottamalla huomioon se, että testifunktio häviää reunan osalla S_u ($u_s = 0$) ja lämpövuoto on annettu reunan osalla S_q ($\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$) sekä sijoittamalla yhtälöön materiaalilaki (4.5), päädytään lopulliseen muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} f dA - \int_{S_q} \hat{u} \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad (4.9)$$

joka on yhtälön (4.2) heikko muoto. Otetaan käyttöön elementtimenetelmän mukainen kantafunktiojärjestelmä $N_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, missä n on solmupisteiden lukumäärä ratkaisualueessa. Funktio u ja painofunktio \hat{u} voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa kantafunktioista N_i seuraavasti:

$$u = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad \hat{u} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.10)$$

missä pystyvektorit \mathbf{u} ja $\hat{\mathbf{u}}$ sisältävät u :n ja \hat{u} :n vapausasteet, jotka ovat tässä tapauksessa suureiden solmupistearvot koko alueessa Ω . Käytetään gradienttioperaattorin diskreetille vastineelle merkintää

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}. \quad (4.11)$$

Suorakulmaisessa kaksiulotteisessa karteesisessä koordinaatistossa gradienttioperaattori on muotoa

$$\nabla = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right]^T, \quad (4.12)$$

jolloin

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

Nyt heikko muoto (4.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds \right) = 0. \quad (4.14)$$

Koska painofunktiot ovat mielivaltaisia, on oltava

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f dA + \int_{S_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Koska elementtimenetelmän kantafunktiot ovat paikallisia vain elementin alueella $\Omega^{(e)}$ määriteltyjä funktioita, voidaan integrointi suorittaa elementteittäin ja merkitään elementin jäykkyyismatriisia

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA. \quad (4.16)$$

Osittamalla diskreetti gradienttimatriisi \mathbf{B} elementin paikallisten solmujen mukaan seuraavasti

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_m], \quad (4.17)$$

voidaan diffuusioyhtälön heikko muoto lausua myös muodossa

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^m \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA u_j \\ = & \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^{(e)}} N_i f dA - \sum_{e(S_q)} \int_{S_q^{(e)}} N_i \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} ds, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.18)$$

missä m on yksittäisen elementin solmupisteiden lukumäärä. Viimeisessä lausekkeessa summaus suoritetaan niiden elementtien yli, joiden reunaviiva osuu kappaleen reunan osalle S_q .

4.2 Lineaarinen kolmioelementti

Yksinkertaisin mahdollinen kaksidimensioinen elementti on lineaarinen kolmioelementti, katso kuva 4.1. Lineaarisen funktion kuvaamiseen tarvitaan kolme parametria, joten funktion u interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.19)$$

jossa

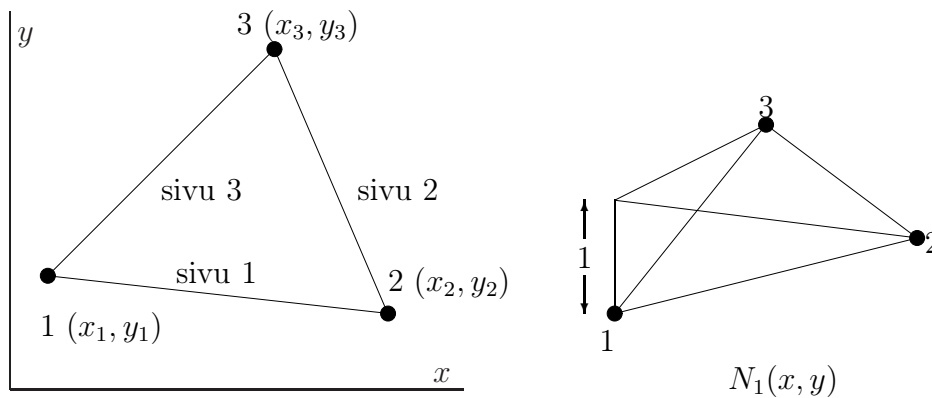
$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad y], \quad \boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Sijoittamalla interpolaatioyhtälöön solmujen koordinaattien arvot ja vastaava funktion u arvo päädytään kolmen tuntemattoman yhtälöryhmään, josta kertoimet α voidaan ratkaista, eli

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}. \quad (4.21)$$

Interpolaatio elementin e alueella voidaan nyt kirjoittaa interpolaatiofunktioiden

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (4.22)$$



Kuva 4.1 Lineaarinen kolmioelementti.

avulla muodossa

$$u = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}. \quad (4.23)$$

Matriisin \mathbf{A} käänteismatriisin muodostaminen onnistuu helposti, ja se on

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

missä A on kolmion 1-2-3 pinta-ala

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}), \quad (4.25)$$

jossa on käytetty merkintää $x_{ij} = x_i - x_j$ ja $y_{ij} = y_i - y_j$. Yhtälö (4.23) voidaan nyt kirjoittaa auki muodossa

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.26)$$

jossa lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1 = (a_1 + b_1x + c_1y)/2A, \quad (4.27a)$$

$$N_2 = (a_2 + b_2x + c_2y)/2A, \quad (4.27b)$$

$$N_3 = (a_3 + b_3x + c_3y)/2A, \quad (4.27c)$$

sekä vakiot

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Havaitaan, että indeksit vakioiden a_i , b_i ja c_i lausekkeissa muodostavat syklisen permutaation solmunumeroiden suhteen.

Palataan nyt hieman taaksepäin muotoon (4.15) tai (4.18). Siinä olevat elementtien osuudet ovat

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA. \quad (4.29)$$

Gradienttimatriisi \mathbf{B} saa kolmisolmuisen elementin tapauksessa muodon

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Koska interpolaatiofunktio N_1, N_2 ja N_3 ovat lineaarisia funktioita, on matriisi \mathbf{B} kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin tapauksessa vakiomatriisi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Tarkastellaan nyt hieman yksityiskohtaisemmin konstitutiivista yhteyttä eli materiaalilakia, joka sitoo toisiinsa lämmönjohtumisyhtälön tapauksessa lämpötilagradientin ja lämpövuon muodossa

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D} \nabla u. \quad (4.32)$$

Fysikaalisten syiden vuoksi lämpö virtaa kuumemmasta kohti kylmempää aluetta, josta seuraa miinusmerkki yllä olevaan yhtälöön. Siitä seuraa myös, että lämpötilagradientin ja lämpövuovektorin sisätulo on negatiivinen, eli ne muodostavat tylpän kulman keskenään

$$(\nabla u) \cdot \mathbf{q} = (\nabla u)^T \mathbf{q} < 0, \quad (4.33)$$

joka on havainnollistettu myös kuvassa 4.2. Sijoittamalla yllä olevaan epäyhtälöön materiaalilaki (4.32) seuraa epäyhtälö

$$(\nabla u)^T \mathbf{D} \nabla u > 0 \quad \forall \nabla u \neq 0, \quad (4.34)$$

joka osoittaa konstitutiivisen matriisin \mathbf{D} olevan positiivisesti definiitin. Energiaargumenttien perusteella se on myös symmetrinen eli

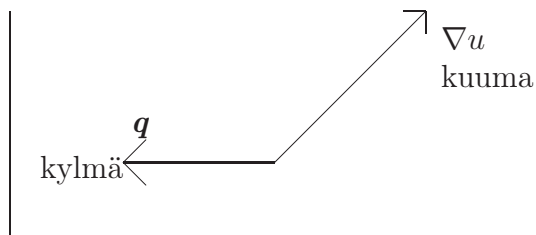
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \quad (4.35)$$

ja sen yleinen muoto kahdessa dimensiossa on:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

jossa k_{xx}, k_{xy} ja k_{yy} ovat lämmönjohtumiskertoimia. Mikäli koordinaattiakselit yhtyvät materiaalin pääsuuntiin, saadaan ortotrooppisen aineen konstitutiivinen yhteys

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$



Kuva 4.2 Lämpövuovektori \mathbf{q} ja lämpötilagradientti ∇u .

Materiaalia kutsutaan isotrooppiseksi, mikäli sen ominaisuudet ovat jokaisessa suunnassa samanlaiset. Tällöin materiaalilaki yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k\mathbf{I}. \quad (4.38)$$

Koordinaatiston muunnoksella voidaan matriisiin \mathbf{D} täysi muoto (4.36) aina saattaa diagonaaliseen muotoon (4.37). Tämä on laskentateknisesti edullista, sillä tällöin jäykkyysmatriisia muodostettaessa suoritettavien kertolaskujen määrä vähenee huomattavasti.

Kolmisolmuisen lineaarisen kolmioelementin jäykkyysmatriisi voidaan kvasiharmonisen yhtälön tapauksessa kirjoittaa auki eksplisiittisesti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA \\ &= \frac{k_{xx}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kuormitusvektori on tasan jakautuneen lämmönlähteen ja reunoille tasan jakautuneen lämpövuon tapauksessa

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{f A^{(e)}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_{n1} s_1 + q_{n3} s_3 \\ q_{n1} s_1 + q_{n2} s_2 \\ q_{n2} s_2 + q_{n3} s_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

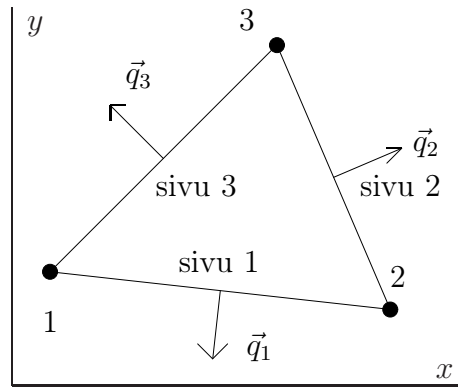
jossa q_{ni} viittaa reunaehtona annetun lämpövuon normaalikomponenttiin sivulla i , ja vastaavasti s_i on sivun i pituus, katso kuva 4.3.

4.3 Alakoordinaatit

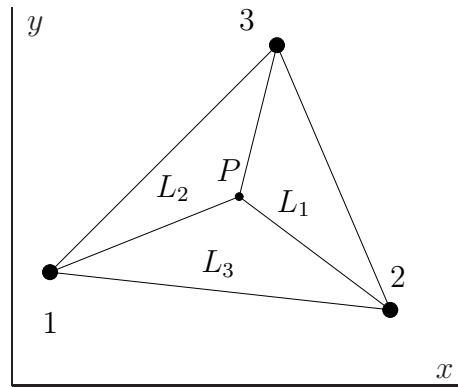
Ajatellaan kolmio 1-2-3 jaetuksi kolmeen osa-alueeseen joiden pinta-alat ovat A_1 , A_2 ja A_3 ja jotka kohtaavat pisteessä P , katso kuva 4.4. Kolmion luonnolliset eli alakoordinaatit ¹ määritellään suhteina

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (4.41)$$

¹Kutsutaan myös barysentrisiksi koordinaateiksi.



Kuva 4.3 Kolmion sivujen numerointi ja lämpövuon normaalikomponentit.



Kuva 4.4 Alakoordinaatit.

jossa A on kolmion 1-2-3 pinta-ala. Koordinaatit L_1 , L_2 ja L_3 eivät ole riippumattomia, sillä niitä sitoo rajoiteyhtälö

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (4.42)$$

Alakoordinaatit voidaan tulkita myös etäisyysuhteina. Esimerkiksi koordinaatin L_1 tasa-arvoviivat on piirretty kuvaan 4.4. Jokainen näistä viivoista on yhdensuuntainen sen sivun kanssa josta koordinaatin mittausta alkaa.

Tarkastellaan lähemmin koordinaatin L_1 lauseketta. Mielivaltaisen, kolmion 1-2-3 alueella olevan pisteen P koordinaatit ovat (x, y) . Kolmion P -2-3 alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} |[(x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}] \times [(x_3 - x)\vec{i} + (y_3 - y)\vec{j}]| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \end{aligned} \quad (4.43)$$

joten alakoordinaatin L_1 lauseke on

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y). \quad (4.44)$$

Se on täsmälleen sama kuin aikaisemmin johdettu lineaarisen interpolaatiofunktion lauseke (4.27a). Vastaavasti voidaan myös johtaa alakoordinaateille L_2 ja L_3 samanlainen kaava ja tulos voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.45)$$

Nyt lukijalle helposti herää kysymys onko alakoordinaateista mitään etua ensin esitettyyn lähestymistapaan nähden. Lineaarisen kolmioelementin tapauksessa ne eivät tuo mitään erikoista formulaatioon, mutta korkeamman asteen elementtien yhteydessä ne helpottavat käsittelyä huomattavasti.

4.4 Korkeamman asteen kolmioelementtejä

Tasoalueessa lineaarisen funktion esittäminen vaatii kolme parametriä, kvadraattisen muodon kuvaaminen vastaavasti kuusi ja kuubisen kymmenen parametria. Funktion u interpolointi kvadraattisella tai kuubisella esityksellä voitaisiin kirjoittaa muodoissa

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2, \\ u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Mikäli nyt otetaan käyttöön Lagrangen tyylinen interpolaatio tarvitaan joko kuusi tai kymmenen pistettä, joiden kautta kyseinen interpolaatio voidaan pakottaa kulkemaan. Vastaavasti, kuten lineaarisenkin elementin tapauksessa, voidaan solmuinterpolaatiofunktiot konstruoida kirjoittamalla nämä yhtälöt, jolloin päädytään lineaariseen, tyyppiä (4.21) olevaan yhtälösystemiin



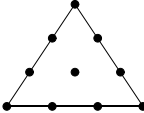
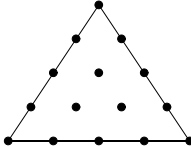
$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.47)$$

jossa \mathbf{A} on solmupisteiden koordinaateista riippuva vakiomatriisi ja josta parametrit $\boldsymbol{\alpha}$ voidaan, ainakin muodollisesti, helposti ratkaista.

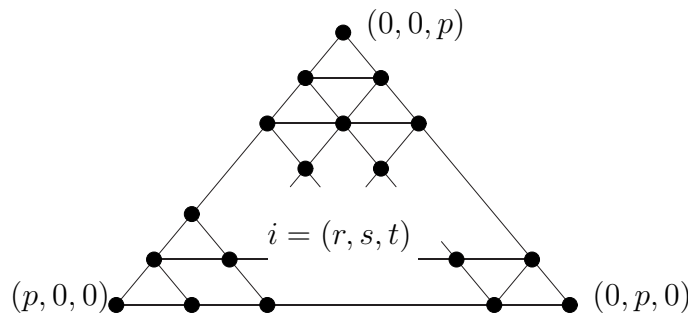
Edellä kuvattu menettely on kuitenkin epäkäytännöllisen hankala. Miellyttävämpi tapa konstruoida interpolaatiofunktiot on kirjoittaa ne auki suoraan kuten yksidimensioisessa tapauksessakin käyttäen hyväksi joitain tunnettuja polynomeja.

Kolmioelementit sallivat täydellisen tiettyä astetta olevan polynomin käytön kenttäsuureen interpolaatiossa. Kuvassa 4.5 on esitetty interpolaatiossa olevien kantapolynomien ja solmukonfiguraation suhdetta aina asteeseen neljä saakka. Havaitaan, että kolmannen ja sitä korkeamman asteen elementeissä joudutaan käyttämään sisäsolmuja. Niiden mukaantulo ei kuitenkaan ole haitallista, vaan päinvastoin edullista, sillä niihin liittyvät vapausasteet on mahdollista kondensoida elementtitasolla pois globaalista yhtälösystemistä.

Tarkastellaan yleistä tapausta, jossa kolmioelementin alueella interpolaatioon käytetään täydellistä astetta p olevaa polynomia. Elementin solmupisteet voidaan

Pascalin kolmio	polynomien		kolmioelementtien solmukonfiguraatiot
	aste p	n	
1	0	1	
$x \quad y$	1	3	
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2	6	
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	3	10	
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	4	15	

Kuva 4.5 Lagrangen tyyppisen kolmioelementin interpolaatio ja solmukonfiguraatio. Kolmioelementissä on solmuja sama määrä kuin interpolaatiossa termijä ($n = (p + 1)(p + 2)/2$).



Kuva 4.6 Astetta p oleva kolmioelementti.

määrittää kuvan 4.6 mukaisesti jakamalla kukin sivu p :n osaan. Tarkastellaan mielivaltaista solmua i , jonka kuvaamiseen tarvittavien alakoordinaattien arvot olkoot $L_{1(i)}$, $L_{2(i)}$ ja $L_{3(i)}$. Määritellään solmuun i liittyvä interpolaatiofunktio

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = l_r^r(L_1)l_s^s(L_2)l_t^t(L_3), \quad (4.48)$$

jossa l_r^r , l_s^s ja l_t^t ovat Lagrangen astetta r , s ja t olevia interpolaatiopolynomeja (3.16), jossa nyt ξ :n tilalla argumenttina on alakoordinaatit L_i . Lukukolmikun r, s, t arvoja sitoo tietenkin ehto

$$r + s + t = p. \quad (4.49)$$

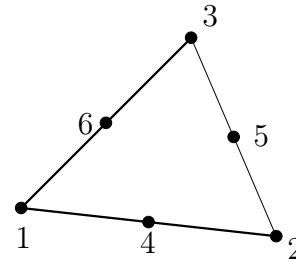
Suoritetaan yksityiskohtainen interpolaatiofunktioiden johto kvadraattiselle elementille. Solmuun 1 liittyvä funktio on kaavan (4.48) mukaan

$$N_1 = l_2^2(L_1). \quad (4.50)$$

Funktion N_1 kulku voidaan mieltää yksiulotteisena paraabelina pitkin reunaviivaa 1-2 tai 1-3, se kumpaa ajatellaan on yhdentekevää. Funktio saa tunnetut arvot sol-

mupisteissä, eli arvon 1 solmussa 1 ja arvon 0 solmuissa 2 ja 4, mikäli tutkitaan kulkua viivalla 1-2. Vastaavasti alakoordinaatin L_1 arvot ovat $1, \frac{1}{2}, 0$. Täten interpolaatiofunktion N_1 kulku voidaan konstruoida mainittujen kolmen pisteen kautta. Kirjoitetaan funktion N_1 interpolaatiodata vielä taulukon muodossa.

Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1	2
elementin solmun #	2	4	1
alakoordinaatin L_1 arvo $L_{1(k)}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$N_1(L_1, L_2, L_3) = l_2^2(L_1)$	0	0	1



Nyt voidaan funktio N_1 kirjoittaa

$$N_1 = l_2^2(L_1) = \frac{(L_1 - L_{1(0)})(L_1 - L_{1(1)})}{(L_{1(2)} - L_{1(0)})(L_{1(2)} - L_{1(1)})} = \frac{L_1(L_1 - \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{1}{2}} = L_1(2L_1 - 1). \quad (4.51)$$

Vastaavasti saadaan kaikille kolmion kärkien interpolaatiofunktioille samanlainen lauseke, joten parabolisen kolmioelementin solmufunktioille voidaan kirjoittaa

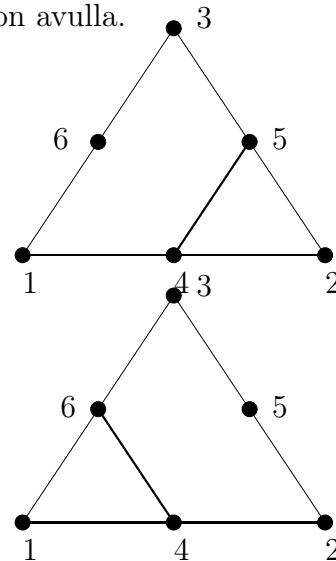
$$N_i = L_i(2L_i - 1). \quad (4.52)$$

Sivujen keskisolmujen lausekkeet saadaan samalla tavalla, esimerkiksi

$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2). \quad (4.53)$$

Tämä on siis lineaarinen polynomi kummankin koordinaatin L_1 ja L_2 suhteen. Lausekkeen muodon ymmärtämiseksi on syytä kuvitella funktion N_4 kulkua pitkin linjoja 4-5 ja 4-6, joita pitkin interpolaatiopolynomit $l_1^1(L_1)$ ja $l_1^1(L_2)$ voidaan konstruoida. Havainnollistetaan asiaa uudelleen taulukon avulla.

Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	5
alakoordinaatin L_1 arvo $L_{1(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0



Lagrangen interpolaatiopisteen # (k)	0	1
elementin solmun #	4	6
alakoordinaatin L_2 arvo $L_{2(k)}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_4(L_1, L_2, L_3) = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2)$	1	0

Muodostetaan nyt lauseke

$$N_4 = l_1^1(L_1)l_1^1(L_2) = 4L_1L_2. \quad (4.54)$$

Muiden sivujen keskiolosmujen lausekkeet ovat vastaavanlaisia, joten kvadraattisen elementin kuusi interpolaatiofunktioita ovat:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad (4.55a)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad (4.55b)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1), \quad (4.55c)$$

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad (4.55d)$$

$$N_5 = 4L_2L_3, \quad (4.55e)$$

$$N_6 = 4L_1L_3. \quad (4.55f)$$

Elementin jäykkyyismatriisia muodostettaessa tarvitaan derivaattojen lausekkeitä koordinaattien x ja y suhteen. Ne on helppo muodostaa ketjuderivoinnin avulla seuraavaan tapaan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_3}, \quad (4.56b)$$

jossa

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}. \quad (4.57)$$

Vakiot b_i ja c_i on annettu yhtälöissä (4.28).

Yleinen lauseke interpolaatiofunktion (4.48) osuudelle $l_q^q(L_k)$ on

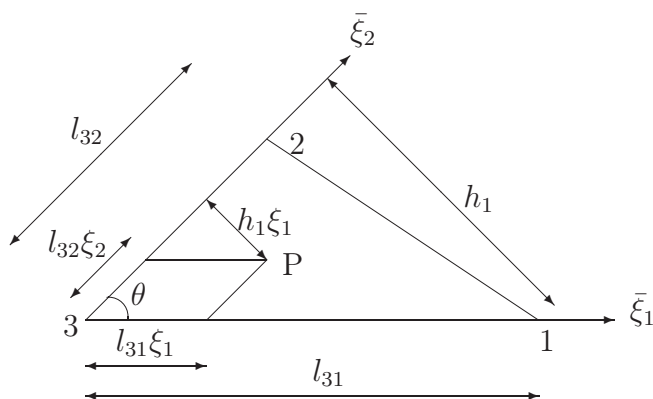
$$l_q^q(L_k) = \begin{cases} \prod_{j=1}^q \frac{pL_k - j + 1}{j} & \text{kun } q \geq 1, \\ 1 & \text{kun } q = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Alakoordinaattien potenssien integraaleja tarvitaan elementtimatriiseja ja vektoreita muodostettaessa, jossa seuraava kaava on hyödyllinen

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \frac{i!j!k!}{(2+i+j+k)!}, \quad A^{(e)} = \text{ala}(\Omega^{(e)}). \quad (4.59)$$

Yllä oleva kaava voidaan johtaa seuraavasti. Alakoordinaatit on määritelty pintaalojen suhteina

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\text{kolmion 3P2 pinta-ala}}{\text{kolmion 123 pinta-ala}} \\ &= \frac{\bar{\xi}_1}{l_{31}} = \frac{l_{32}h_1\xi_1\frac{1}{2}}{l_{32}h_1\frac{1}{2}} = \xi_1 \end{aligned} \quad (4.60)$$



Koska kaikki alakoordinaatit eivät ole riippumattomia, niille pätee ehdot

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \Rightarrow L_3 = 1 - L_1 - L_2 \text{ ja reunalla 1-2: } L_1 + L_2 = 1. \quad (4.61)$$

Differentiaalinen alaelementti dA on

$$dA = l_{31}dL_1 \sin \theta l_{32}dL_2 = l_{31}h_2dL_1dL_2 = 2A^{(e)}dL_1dL_2, \quad (4.62)$$

missä $A^{(e)}$ on kolmion 123 pinta-ala. Täten on

$$\int_{\Omega^{(e)}} L_1^i L_2^j L_3^k dA = 2A^{(e)} \int_0^1 L_1^i \left[\int_0^{1-L_1} L_2^j (1-L_1-L_2)^k dL_2 \right] dL_1. \quad (4.63)$$

Integroimalla alakoordinaatin L_2 yli antaa tuloksen

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-L_1} L_2^j (1-L_1-L_2)^k dL_2 = \\ & -\frac{1}{k+1} \Big|_0^{1-L_1} L_2^j (1-L_1-L_2)^{k+1} + \frac{j}{k+1} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1-L_1-L_2)^{k+1} dL_2 = \\ & \frac{j}{k+1} \left[-\frac{1}{k+2} \Big|_0^{1-L_1} L_2^{j-1} (1-L_1-L_2)^{k+2} + \frac{j-1}{k+2} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-2} (1-L_1-L_2)^{k+2} dL_2 \right] = \\ & \frac{j}{k+1} \frac{j-1}{k+2} \dots \frac{j-j+1}{k+j} \int_0^{1-L_1} L_2^{j-j} (1-L_1-L_2)^{k+j} dL_2 = \\ & \frac{j!k!}{(k+j)!} \frac{-1}{k+j+1} \Big|_0^{1-L_1} (1-L_1-L_2)^{k+j+1} = \frac{j!k!}{(k+j+1)!} (1-L_1)^{k+j+1}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

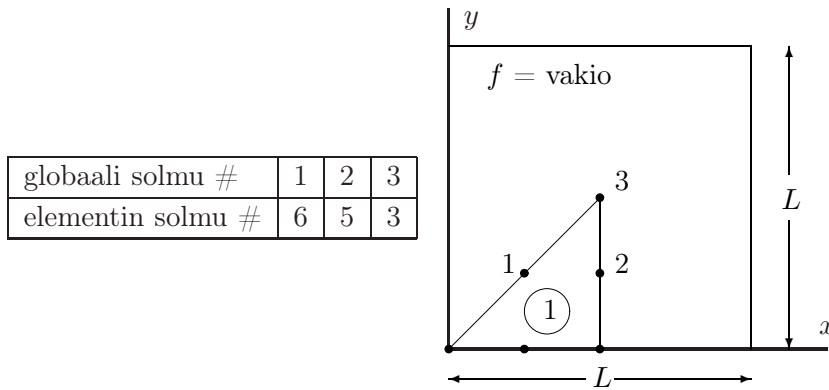
Integroimalla alakoordinaatin yli L_1 , saadaan

$$\begin{aligned}
 & \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \int_0^1 L_1^i (1-L_1)^{k+j+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i}{k+j+2} \cdots \frac{i-i+1}{k+j+i+1} \int_0^1 L_1^{i-i} (1-L_1)^{k+j+i+1} dL_1 \\
 &= \frac{j!k!}{(k+j+1)!} \frac{i!}{(k+j+2) \cdots (k+j+i+2)} \Big|_0^1 [-(1-L_1)^{k+j+i+2}] \\
 &= \frac{i!j!k!}{(k+j+i+2)!}. \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

Kokoamalla tulokset yhteen saadaan tulos (4.59).

4.5 Esimerkkejä diffuusioyhtälön ratkaisusta tasoalueessa

Esimerkki 4.1 Määritä lämpötilajakauma oheisessa neliön muotoisessa alueessa käyttäen yhtä parabolista elementtiä alueen kahdeksasosalle. Oletetaan, että materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin k on vakio koko alueessa. Otaksutaan lisäksi homogeeniset reunaehdot ja että lämmönlähteen antoisuus on vakio.



Lasketaan elementin jäykkymatriisin ja kuormavektorin lausekkeet:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \tag{4.66}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T f dA - \int_{S_q^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{nyt } \mathbf{q}_s \equiv \mathbf{0}). \tag{4.67}$$

Interpolaatiofunktio matriisi \mathbf{N} on kvadraattiselle elementille muotoa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}, \tag{4.68}$$

jossa interpolaatofunktiot on annettu yhtälöissä (4.55a). Tarvitaan derivaattojen lausekkeita:

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= \frac{\partial}{\partial x} [L_i (2L_i - 1)] = (4L_i - 1) \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A^{(e)}} (4L_i - 1), \\ N_{i+3,x} &= \frac{\partial}{\partial x} (4L_i L_{i+}) = 4 \left(L_i \frac{\partial L_{i+}}{\partial x} + L_{i+} \frac{\partial L_i}{\partial x} \right) = \frac{2}{A^{(e)}} (L_i b_{i+} + L_{i+} b_i), \\ N_{i,y} &= \frac{c_i}{4A^{(e)}} (2L_i - 1), \\ N_{i+3,y} &= \frac{2}{A^{(e)}} (L_i c_{i+} + L_{i+} c_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Merkintä $i+$ tarkoittaa elementin solmunumeroa, joka seuraa solmua i vastapäivään kierrettäessä.

Jäykkyydsmatriisin termi $K_{11}^{(e)}$ on siten:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) (16L_1^2 - 8L_1 + 1) dA \\ &= \frac{1}{4(A^{(e)})^2} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2) 2A^{(e)} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4A^{(e)}} (k_{xx} b_1^2 + k_{yy} c_1^2), \end{aligned} \quad (4.70)$$

jossa on käytetty kaavaa (4.59) integrointien suorittamiseen.

Suorittamalla muiden termien integrointi samaan tapaan, saadaan kvadraattisen elementin jäykkyydsmatriisiksi (vastaten solmupistevapausasteita u_1, u_2, \dots, u_6):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \frac{k_{xx}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}b_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & \frac{1}{4}b_2^2 & 0 & \frac{1}{3}b_1b_2 & \frac{1}{3}b_2b_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}b_3^2 & 0 & \frac{1}{3}b_2b_3 & \frac{1}{3}b_1b_3 \\ & & & \frac{2}{3}B_{12} & \frac{1}{3}B_{213} & \frac{1}{3}B_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}B_{23} & \frac{1}{3}B_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}B_{13} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{k_{yy}}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}c_1^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & 0 & \frac{1}{4}c_1c_3 \\ & \frac{1}{4}c_2^2 & 0 & \frac{1}{3}c_1c_2 & \frac{1}{2}c_2c_3 & 0 \\ & & \frac{1}{4}c_3^2 & 0 & \frac{1}{3}c_2c_3 & \frac{1}{3}c_1c_3 \\ & & & \frac{2}{3}C_{12} & \frac{1}{3}C_{213} & \frac{1}{3}C_{123} \\ & & & & \frac{2}{3}C_{23} & \frac{1}{3}C_{312} \\ & & & & & \frac{2}{3}C_{13} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$B_{ij} = b_i^2 + b_i b_j + b_j^2, \quad (4.72a)$$

$$C_{ij} = c_i^2 + c_i c_j + c_j^2, \quad (4.72b)$$

$$B_{ijk} = b_i(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_j b_k, \quad (4.72c)$$

$$C_{ijk} = c_i(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_j c_k. \quad (4.72d)$$

Kuormitusvektoriksi saadaan

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{1}{3} f A^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.73)$$

Rakenteen jäykkyysmatriisi on siten

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} K_{66}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{63}^{(1)} \\ & K_{55}^{(1)} & K_{53}^{(1)} \\ & & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{A^{(1)}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(B_{13} + C_{13}) & \frac{1}{3}(B_{312} + C_{312}) & \frac{1}{3}(b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ & \frac{2}{3}(B_{23} + C_{23}) & \frac{1}{3}(b_2 b_3 + c_2 c_3) \\ & & \frac{1}{12}(b_3^2 + c_3^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Määritetään vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{1}{2}L, \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{1}{2}L, \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0, \\ c_1 &= x_3 - x_2 = 0, \\ c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{1}{2}L, \\ c_3 &= x_2 - x_1 = \frac{1}{2}L, \end{aligned} \quad (4.75)$$

ja lasketaan termit

$$B_{13} = b_1^2 + b_1 b_3 + b_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76a)$$

$$C_{13} = c_1^2 + c_1 c_3 + c_3^2 = \frac{1}{4}L^2, \quad (4.76b)$$

$$B_{321} = b_3(b_1 + b_2 + b_3) + 2b_1 b_2 = -\frac{1}{2}L^2, \quad (4.76c)$$

$$C_{321} = c_3(c_1 + c_2 + c_3) + 2c_1 c_2 = 0. \quad (4.76d)$$

Kolmion pinta-alahan on $\frac{1}{8}L^2$, joten yhtälösystemiksi saadaan

$$k \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}fL^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.77)$$

Ratkaisuksi saadaan siten $u_1 = \frac{7}{160}fL^2/k$, $u_2 = \frac{9}{160}fL^2/k$, $u_3 = \frac{12}{160}fL^2/k = 0,075fL^2/k$.

Keskipisteen tarkka ratkaisu on

$$u_3 = \frac{16}{\pi^4} \frac{fL^2}{k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(\frac{1}{2}m\pi) \sin(\frac{1}{2}n\pi)}{(m^2 + n^2)mn} \approx 0.07367fL^2/k. \quad (4.78)$$

joten virhe siinä on noin 1,8 %.

Määritetään vielä lämpövuoto x -akselilla. Lämpötilan approksimaatio elementin alueella on

$$\begin{aligned} u &= N_3 u_3^{(1)} + N_5 u_5^{(1)} + N_6 u_6^{(1)} = N_3 u_3 + N_5 u_2 + N_6 u_1 \\ &= \left(\frac{3}{40}N_3 + \frac{9}{160}N_5 + \frac{7}{160}N_6 \right) \frac{\bar{f}L^2}{k}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

josta lämpövuoto reunalla 1-2 (elementin solmunumeroita) saadaan

$$q_{n1} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_1, \quad (4.80)$$

jossa \mathbf{n}_1 on elementin sivun 1 yksikkönormaali $\mathbf{n}_1 = -\vec{j}$. Täten lämpövuoksi elementin reunalla 1 saadaan

$$q_{n1} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.81)$$

Määritetään interpolaatiofunktioiden N_3, N_5 ja N_6 derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{c_3}{2A^{(1)}}(4L_3 - 1) = -\frac{2}{L}, \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_2c_3 + L_3c_2) = \frac{8}{L}L_2, \\ \frac{\partial N_6}{\partial y} &= \frac{2}{A^{(1)}}(L_3c_1 + L_1c_3) = \frac{8}{L}L_1, \end{aligned} \quad (4.82)$$

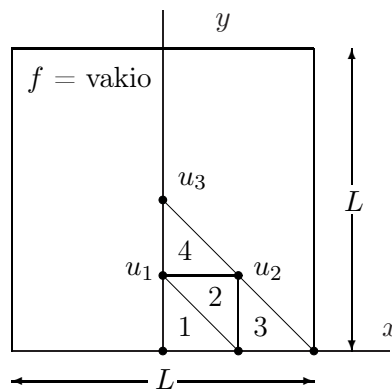
jossa on otettu huomioon että alakoordinaatti L_3 saa arvon nolla pitkin reunaa 1. Interpolaatiofunktioiden L_1 ja L_2 lausekkeet reunalla 1 ovat

$$L_1 = 1 - 2\frac{x}{L}, \quad L_2 = 2\frac{x}{L}, \quad (4.83)$$

joten lämpövuon lauseke pitkin reunaviivaa 1 on

$$q_{n1} = \left[-\frac{3}{20} + \frac{9}{160}16x + \frac{7}{160}8(1-2x)\right] \bar{f}L = \frac{1}{5}(1+x)\bar{f}L. \quad (4.84)$$

Esimerkki 4.2 Ratkaise elementtimenetelmällä lämmönjohtumisongelma neliöalueessa (sivun pituus L) kun kuormituksenä on tasa-antoinen lämmönlähde ($f(x, y) = f = \text{vakio}$). Reunaehdot ovat homogeeniset, eli $u = 0$ koko reunalla. Käytä hyväksesi symmetriaa oheisen kuvan mukaisesti ja ratkaise tehtävä käyttäen neljää lineaarista elementtiä. Määritä myös lämpövuon reunalla $y = 0$. Materiaali on isotrooppista ja sen lämmönjohtavuuskerroin on k .



Havaitaan, että elementtimatriisit elementeistä 1, 3 ja 4 ovat identtiset. Täten riittää muodostaa vain elementit 1 ja 2. Kolmioelementin lausekkeissa ovat b_i ja c_i vakiot

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.85)$$

on määritetty alla olevaan taulukkoon

i	elementit 1,3,4		elementti 2	
	b_i	c_i	b_i	c_i
1	$-L/4$	$-L/4$	0	$-L/4$
2	$L/4$	0	$L/4$	$L/4$
3	0	$L/4$	$-L/4$	0

Kaikkien elementtien pinta-ala on $A^{(e)} = L^2/32$ ja elementtimatriisit ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(2)} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Elementtien paikallisten solmupisteiden ja kuvan globaalien solmunumeroiden välillä on seuraavan taulukon mukainen yhteys.

elem.	solmu		
	1	2	3
1	-	-	1
2	-	2	1
3	-	-	2
4	1	2	3

Taulukosta voidaan nyt lukea globaalin jäykkyyismatriisin elementtialkiot:

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(4)}, \\ K_{12} &= K_{32}^{(2)} + K_{12}^{(4)}, \\ K_{13} &= K_{13}^{(4)}, \\ K_{22} &= K_{22}^{(2)} + K_{33}^{(3)} + K_{22}^{(4)}, \\ K_{23} &= K_{23}^{(4)}, \\ K_{33} &= K_{33}^{(4)}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

Globaali jäykkyyismatriisi on siten

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

jonka käänteismatriisi on

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Rakenteen kuormitusvektori on

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3^{(1)} + f_3^{(2)} + f_1^{(4)} = 3 \cdot \frac{1}{3} f \frac{1}{32} L^2 = \frac{1}{32} f L^2, \\ f_2 &= \frac{1}{32} f L^2, \\ f_3 &= \frac{1}{96} f L^2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Solmupisteiden lämpötiloiksi saadaan

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{11}{192} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0573 \frac{f L^2}{k}, \\ u_2 &= \frac{17}{384} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0443 \frac{f L^2}{k}, \\ u_3 &= \frac{5}{64} \frac{f L^2}{k} \approx 0.0781 \frac{f L^2}{k}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Keskipisteen tarkka ratkaisu on $u_3 = 0.07367 f L^2 / k$, joten virhe on noin 6 %.

Lämpövuoto määritellään Fourierin lämmönjohtumislain mukaan seuraavasti

$$\vec{q} = -k \nabla u. \quad (4.93)$$

Nyt kysyttiin lämpövuota reunalla 1-2, jonka normaalin suunta on negatiivisen y -akselin suunta, eli $\vec{n} = -\vec{j}$, joten lämpövuoto reunalla 1-2 saadaan lausekkeesta

$$q_{n_{12}} = \vec{q} \cdot \vec{n} = k \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.94)$$

Elementissä 1 on lämpötilaratkaisu muotoa

$$u = N_3 u_1 = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y) u_1, \quad (4.95)$$

joten

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A} u_1 = \frac{L}{4} \frac{32}{2L^2} \frac{11}{192} \frac{f L^2}{k} = \frac{11}{48} \frac{f L}{k} = 0.2292 \frac{f L}{k}, \quad (4.96)$$

ja

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{11}{48} f L \vec{j}. \quad (4.97)$$

Vastaavasti elementille 3:

$$u = N_3 u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_3}{2A} u_2 = \frac{17}{96} \frac{f L}{k} = 0.1771 \frac{f L}{k}, \quad (4.98)$$

$$\vec{q}_{n_{12}} = -\frac{17}{96} f L \vec{j}. \quad (4.99)$$

Vuoto on tietenkin vakio jokaisessa elementissä erikseen, koska kysymyksessä on lineaarinen kolmioelementti.

Esimerkki 4.3 Määritä ja piirrä edellisen tehtävän lämpötilan tasa-arvokäyrät $u_{max}/3$ ja $2u_{max}/3$, jossa u_{max} on keskipisteen lämpötila.

Lasketuista solmupistearvoista voidaan päätellä, että tasa-arvoviiva $\frac{2}{3}u_3$ leikkaa elementit 1, 2 ja 4. Vastaavasti tasa-arvoviiva $\frac{1}{3}u_3$ leikkaa elementit 1, 2 ja 3.

Käydään jokainen elementti lävitse. Aloitetaan elementistä 4. Interpolaatio on

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3, \quad (4.100)$$

jossa

$$N_i = L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y). \quad (4.101)$$

Vakiot b_i ja c_i ovat jo määritetyt edellisessä tehtävässä. Vakiot a_i on määritettävä kussakin elementissä erikseen, sillä

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Elementissä 4 vakioiden arvot ovat $a_1 = L^2/8$, $a_2 = 0$, $a_3 = -L^2/16$. Ratkaistavana on siis suora, joka toteuttaa

$$N_1 \frac{u_1}{u_3} + N_2 \frac{u_2}{u_3} + N_3 = \frac{u}{u_3}. \quad (4.103)$$

Sijoittamalla lukuarvot saadaan

$$\frac{2}{3} = N_1 \frac{11}{15} + N_2 \frac{17}{30} + N_3. \quad (4.104)$$

Elementissä 4 alakoordinaattien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= 16 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{x}{L} - \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = 2 - 4\xi - 4\eta, \\ N_2 &= 16 \frac{1}{4} \frac{x}{L} = 4\xi, \\ N_3 &= 16 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \frac{y}{L} \right) = -1 + 4\eta, \end{aligned} \quad (4.105)$$

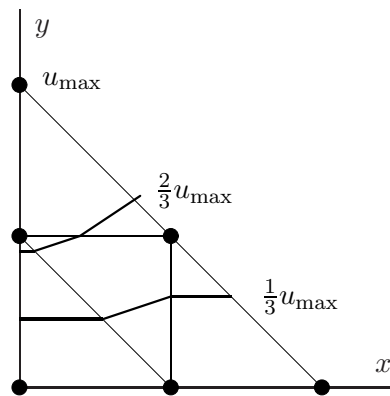
jossa on merkitty $\xi = x/L$ ja $\eta = y/L$. Yhtälöstä (4.104) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= (2 - 4\xi - 4\eta) \frac{11}{15} + 4\xi \frac{17}{30} + 4\eta - 1 \\ \Rightarrow 0 &= -10\xi + 16\eta - 3. \end{aligned} \quad (4.106)$$

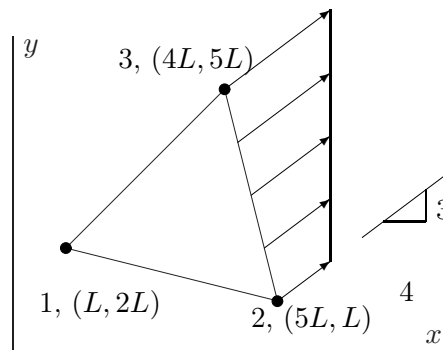
Ratkaistaan nyt yllä olevan suoran leikkauspisteet elementin 4 reunaviivojen $\eta = \frac{1}{4}$ ja $\eta = \frac{1}{2} - \xi$ kanssa. Saadaan ratkaisut

$$\xi = \frac{1}{10}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \text{ja} \quad \xi = \frac{5}{26} \approx 0.1923, \quad \eta = \frac{4}{13} \approx 0.3077. \quad (4.107)$$

Vastaavalla tavalla käydään muut elementit lävitse ja saadaan oheisen kuvan mukainen tasa-arvoviivasto.



Esimerkki 4.4 Määritä oheisen lineaarisen tasolementin kuormitusvektori kun lämpövuoto muuttuu lineaarisesti arvosta q_1 arvoon q_2 reunalla 2 (solmuväli 2 – 3).



Kuvion perusteella vuovektori reunalla 2 on

$$\vec{q}_1 = q_1 \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 1,} \quad (4.108)$$

$$\vec{q}_2 = q_2 \left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \right), \quad \text{solmussa 2,} \quad (4.109)$$

ja reunan 2 normaalivektori on

$$\vec{n}_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}. \quad (4.110)$$

Vuon normaalikomponentit reunan 2 alku ja loppupisteessä 1 ja 2 ovat

$$q_{1n} = \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_1, \quad q_{2n} = \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{5} \frac{19}{\sqrt{17}} q_2. \quad (4.111)$$

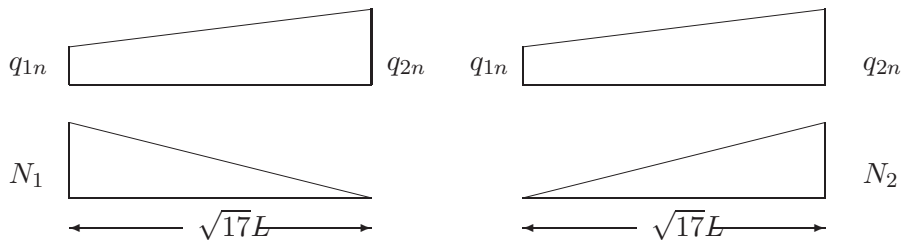
Elementin kuormitusvektorin komponentit ovat

$$f_i = - \int_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n}_2 N_i ds. \quad (4.112)$$

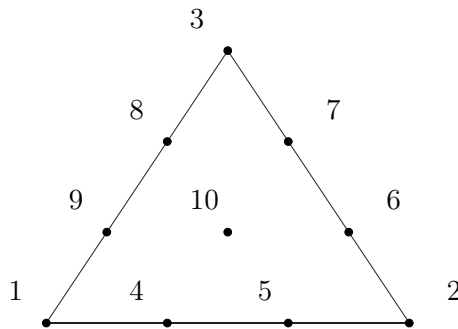
Solmua 1 vastaava termi on tietenkin nolla ja muut ovat (suoritetaan integrointi Simpsonin kaavalla):

$$f_2 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{6} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left(\frac{19}{30} q_2 + \frac{19}{15} q_1 \right) L, \quad (4.113)$$

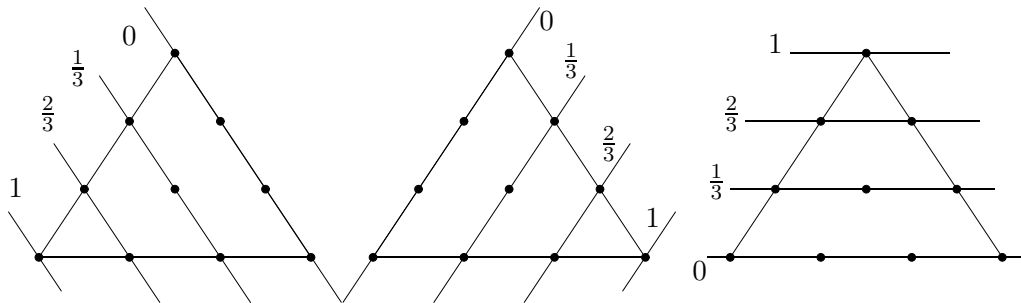
$$f_3 = -\frac{1}{2} q_{1n} \sqrt{17} L - \frac{1}{3} (q_{2n} - q_{1n}) \sqrt{17} L = -\left(\frac{16}{15} q_2 + \frac{8}{15} q_1 \right) L. \quad (4.114)$$



Esimerkki 4.5 Määritä kuubisen elementin solmuihin sidotut interpolaatiofunktiot N_1, N_4, N_5 ja N_{10} .



Koordinaattien L_1, L_2 ja L_3 tasa-arvoviivat ovat seuraavanlaiset.



Interpolaatiofunktioilla on arvo $N_i = 0$ kaikissa muissa salmuissa paitsi solmussa i .

Solmu 1: Etsitään kolme tasa-arvoviiva, jotka kulkevat kaikkien muiden, paitsi solmun 1, kautta.

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_1 = \frac{2}{3} \\
 \Rightarrow &N_1 = c_1 L_1 (L_1 - \frac{1}{3})(L_1 - \frac{2}{3}), \text{ ja sillä on arvo 1 solmussa 1, eli } N_1(1, 0, 0) = 1 \\
 \Rightarrow &c_1 \cdot 1(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{2} \tag{4. 15}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3})(L_1 - \frac{2}{3}) \tag{4. 16}$$

Solmu 4:

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = 0 \\
 \Rightarrow &N_4 = c_4 L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2, N_4(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{27}{2} \quad (4.117) \\
 \Rightarrow &N_4 = \frac{27}{2} L_1 (L_1 - \frac{1}{3}) L_2 \quad (4.118)
 \end{aligned}$$

Solmu 5:

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_2 = 0, L_2 = \frac{1}{3} \\
 \Rightarrow &N_5 = c_5 L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}), N_5(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) = 1 \Rightarrow c_5 = \frac{27}{2} \quad (4.119) \\
 \Rightarrow &N_5 = \frac{27}{2} L_1 L_2 (L_2 - \frac{1}{3}) \quad (4.120)
 \end{aligned}$$

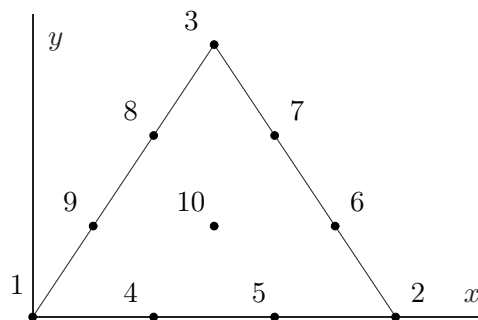
Solmu 10:

$$\begin{aligned}
 &L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0 \\
 \Rightarrow &N_{10} = c_{10} L_1 L_2 L_3, N_{10}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow c_{10} = 27 \quad (4.121) \\
 \Rightarrow &N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (4.122)
 \end{aligned}$$

Esimerkki 4.6 Ratkaisun stationäärinen lämmönsiirto-ongelma

$$-k(u_{,xx} + u_{,yy}) = f = \text{vakio}$$

tasasivuisessa kolmiossa homogeenisilla oleellisilla reunaehdoilla $u = 0$. Käytä yhtä kuubista elementtiä ja määritä myös lämpövuon lauseke reunalla 1-2. Kolmion sivun pituus on L .



Käyttäen yhtä kuubista elementtiä on ratkaistavana vain yksi tuntematon, u_{10} , joka voidaan ratkaista yhtälöstä

$$K_{10,10} u_{10} = f_{10}, \quad (4.123)$$

jossa

$$K_{10,10} = k \int_A (N_{10,x}N_{10,x} + N_{10,y}N_{10,y}) dA, \quad (4.124)$$

ja edellisen esimerkin mukaan on solmuun 10 liittyvä interpolaatiofunktio: $N_{10} = 27L_1L_2L_3$. Lasketaan tarvittavat derivaatat:

$$\begin{aligned} N_{10,x} &= 27 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} L_2 L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial x} L_1 L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial x} L_1 L_2 \right) \\ &= \frac{27}{2A} (b_1 L_2 L_3 + b_2 L_1 L_3 + b_3 L_1 L_2) \\ N_{10,y} &= \frac{27}{2A} (c_1 L_2 L_3 + c_2 L_1 L_3 + c_3 L_1 L_2). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Kerroinmatriisiin alkioille saadaan lauseke

$$\begin{aligned} K_{10,10} &= \left(\frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A [(b_1 L_2 L_3 + b_2 L_1 L_3 + b_3 L_1 L_2)^2 \\ &\quad + (c_1 L_2 L_3 + c_2 L_1 L_3 + c_3 L_1 L_2)^2] dA \\ &= \left(\frac{27}{2A} \right)^2 k \int_A (b_1^2 L_2^2 L_3^2 + b_2^2 L_1^2 L_3^2 + b_3^2 L_1^2 L_2^2 + 2b_1 b_2 L_1 L_2 L_3^2 \\ &\quad + 2b_1 b_3 L_1 L_2^2 L_3 + 2b_2 b_3 L_1^2 L_2 L_3 + \text{c-termit}) dA, \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} &\text{käytetään kaavaa } \int_A L_1^i L_2^j L_3^k dA = \frac{2A^{(e)} i! j! k!}{(2+i+j+k)!}, \quad 0! = 1 \\ &= k \frac{27^2}{2A} \left(b_1^2 \frac{2!2!}{6!} + b_2^2 \frac{4}{6!} + b_3^2 \frac{4}{6!} + 2b_1 b_2 \frac{2}{6!} + \dots \right) \\ &= k \frac{27^2}{2A} [(b_1^2 + c_1^2) + (b_2^2 + c_2^2) + (b_3^2 + c_3^2) \\ &\quad + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3] \frac{4}{6!} \\ &= \frac{81}{40} \frac{k}{A} (b_1^2 + c_1^2 + b_2^2 + c_2^2 + b_3^2 + c_3^2 + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Kuormatermiksi saadaan

$$f_{10} = \int_A f 27 L_1 L_2 L_3 dA = 54 A f \frac{1}{5!} = \frac{9}{20} f A. \quad (4.128)$$

Lasketaan kertoimet ja elementin pinta-ala:

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} L & c_1 &= x_3 - x_2 = -\frac{L}{2} \\ b_2 &= y_3 - y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} L & c_2 &= x_1 - x_3 = -\frac{L}{2} \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0 & c_3 &= x_2 - x_1 = L \\ A &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow K_{10,10} &= \frac{81}{40} \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] k \\ &= \frac{243}{20\sqrt{3}} k\end{aligned}\quad (4.130)$$

Ratkaisuyhtälö on siten

$$\Rightarrow \frac{243}{20\sqrt{3}} k u_{10} = \frac{9\sqrt{3}}{80} L^2 f, \quad \text{jonka ratkaisu on } u_{10} = \frac{1}{36} \frac{f L^2}{k}. \quad (4.131)$$

Lämpötilajakauma elementin alueella on siten: $u = N_{10} u_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 u_{10}$. Lämpövuon lauseke on $\vec{q} = -k \nabla u = -k(u_{,x} \vec{i} + u_{,y} \vec{j})$. Lämpövuon normaali-komponentti on $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$. Reunalla 1-2 on $\vec{n} = -\vec{j}$ ja $L_3 = 0$, siten

$$\begin{aligned}q_n &= k u_{,y} = k u_{10} 27 \left(\frac{\partial L_1}{\partial y} L_2 L_3 + \frac{\partial L_2}{\partial y} L_1 L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial y} L_1 L_2 \right) \\ &= k u_{10} 27 L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial y} = 27 k u_{10} \frac{c_3}{2A} L_1 L_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} f L L_1 L_2.\end{aligned}\quad (4.132)$$

Koska $L_1 = 1 - x/L$ ja $L_2 = x/L$ lämpövuon normaalikomponentin lausekkeeksi saadaan

$$q_n = \frac{3}{2\sqrt{3}} \bar{f} L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (4.133)$$

Esimerkki 4.7 *Ratkaise massiivipoikkileikkauksisen sauvan vääntöjäyhyys siirtymämenetelmällä De Saint-Venantin vapaan väännön teorian mukaisesti.*

De Saint-Venant otaksui siirtymätilan olevan muotoa

$$\begin{aligned}u &= -y\phi = -yz\theta, \\ v &= x\phi = xz\theta, \\ w &= \theta\psi(x, y),\end{aligned}\quad (4.134)$$

missä ϕ on vääntökulma, $\theta = d\phi/dz$ vääntymä ja $\psi(x, y)$ poikkileikkauksen käyritymäfunktio. Sauvan akselin z suuntaisen tasapainoehdon

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4.135)$$

perusteella saadaan soveltamalla Hooken lakia

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\theta(\psi_{,x} - y), \quad (4.136)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta(\psi_{,y} + x). \quad (4.137)$$

Täten saadaan Laplacen yhtälö käyritymäfunktiolle:

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0. \quad (4.138)$$

Jos sauvan reunalla ei ole kuormitusta, niin reunaehto on

$$\tau_n = \tau_{zn}n_x + \tau_{zy}n_y = 0, \quad (4.139)$$

missä n_x ja n_y ovat reunan normaalivektorin komponentit. Lausumalla jännityskomponentit siirtymien avulla reunaehto saadaan muotoon

$$(\psi_{,x} - y)n_x + (\psi_{,y} + x)n_y = 0. \quad (4.140)$$

Suoritetaan vääntöprobleeman likiratkaisu Galerkinin keinolla minimoimalla potentiaalienergian funktionaali

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A G(\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2) dA = \frac{1}{2} \int_A G[(\psi_{,x} - y)^2 + (\psi_{,y} + x)^2] dA. \quad (4.141)$$

Minimin välttämätön ehto on

$$\delta\Pi = \int_A G[(\psi_{,x} - y)\delta\psi_{,x} + (\psi_{,y} + x)\delta\psi_{,y}] dA = 0, \quad (4.142)$$

eli

$$\int_A G(\psi_{,x}\delta\psi_{,x} + \psi_{,y}\delta\psi_{,y}) dA + \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA = 0, \quad (4.143)$$

missä toinen termi saadaan osittaisintegroimalla muotoon

$$\begin{aligned} \int_A G(-y\delta\psi_{,x} + x\delta\psi_{,y}) dA &= \int_A G[(-y\delta\psi)_{,x} + (x\delta\psi)_{,y}] dA \\ &= \int_{\partial A} G(-yn_x + xn_y) \delta\psi ds. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Sijoittamalla interpolaatio $\psi(x, y) = \sum N_i(x, y)\psi_i$ saadaan elementin jäykkymatriisiin alkioksi lauseke

$$K_{ij} = \int_A G(N_{i,x}N_{j,x} + N_{i,y}N_{j,y}) dA. \quad (4.145)$$

Vastaavasti kuormavektorin lauseke on

$$f_i = \int_{\partial A} G(yn_x - xn_y) N_i ds. \quad (4.146)$$

Huomaa, että yhtälön (4.138) reunaehdot (4.139) ovat luonnolliset. Mikäli käyristymäfunktion arvoa ei sidota, on globaali jäykkymatriisi singulaarinen ja käyristymäfunktion arvo on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty. Singulaarisen systeemin käsittelyltä välttytään, mikäli käyristymäfunktion arvo sidotaan jossain poikkileikkauksen pisteessä.

Vääntöjäyhyys I_t voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA \\ &= \int_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\psi}{\partial y} - y \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) dA = I_p - \sum_i \psi_i f_i. \end{aligned} \quad (4.147)$$

4.6 Nelikulmioelementtejä

4.6.1 Elementtiperheet

Nelikulmioelementit tarjoavat vielä kolmioelementtejäkin yksinkertaisemman tavan konstruoida interpolaatiofunktioita. Tarkastellaan vain C_0 -jatkuvia elementtejä. Tässä luvussa käsitellään myös geometrian parametrissa kuvaamista interpolaatiofunktioiden avulla. Näin voidaan helposti mallintaa geometrisesti monimutkaisia alueita. Tällaisten elementtien jäykkyysmatriisiin ja kuormavektorin analyttinen muodostaminen ei aina ole mahdollista, vaan joudutaan käyttämään numeerista integrointia, joten myös yleisimmät käytössä olevat numeeriset integrointimenetelmät esitellään.

Tarkastellaan interpolaatiopolynomeja ns. perusneliössä, joka määritellään luonnollisten koordinaattien ξ ja η avulla seuraavasti: $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$. Yksinkertaisin tapa konstruoida kaksidimensioisia interpolaatiofunktioita on käyttää suoraan yksidimensioisia Lagrangen polynomeja tulomuodossa eli

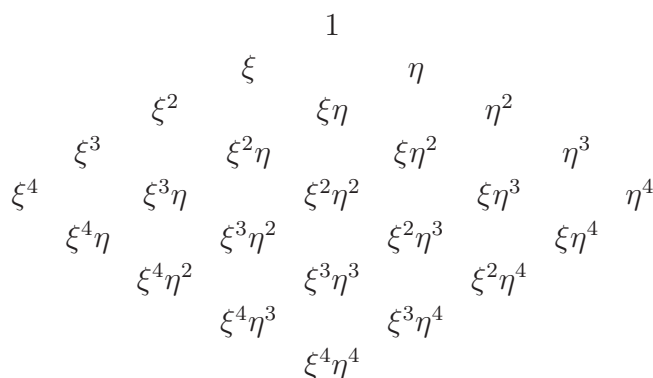
$$N_i(\xi, \eta) = l_a^{p_1}(\xi)l_b^{p_2}(\eta), \quad (4.148)$$

jossa p_1 ja p_2 ovat interpolaation asteet ξ ja η suunnissa. Mikäli interpolaation aste on sama kummassakin suunnassa ($p_1 = p_2 = p$), pitää Lagrangen tyyppinen elementti sisällään kaikki termit, joissa toisen tekijän asteluku on pienempi tai yhtäsuuri kuin p . Kaksidimensioiseen Lagrangen interpolaatioon tulevat termit on piirretty Pascalin² kolmioon kuvassa 4.7, ja elementin solmukonfiguraatioita on esitetty kuvassa 4.9.

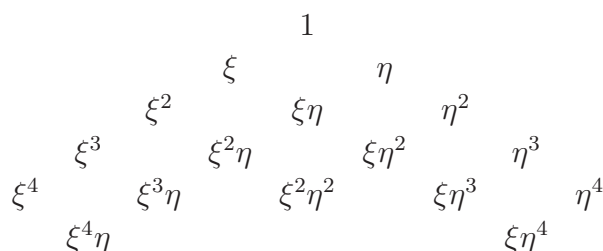
Havaitaan, että interpolaation asteen kasvaessa elementtien sisäisten solmujen määrä kasvaa merkittävästi. Tätä on usein pidetty Lagrangen elementtien haittana, koska tällöin myös vapausastemäärä tarpeettomasti kasvaa, sillä approksimaatio-teoreettiselta kannalta Lagrangen elementissä on ‘turhia’ vapausasteita. Elementin tarkkuusominaisuudet pysyvät kertaluokalleen samoina, kun mukana ovat kaikki astetta p olevat polynomit. Lisätermit, jotka ovat esimerkiksi astetta p kummankin koordinaatin suhteen, eivät siten vaikuta ratkaisevasti elementin approksimaatio-ominaisuuksiin. Näillä termeillä on kuitenkin suuri merkitys elementin käyttäytymiseen, kun tarkastellaan ns. isoparametrisia elementtejä, joten ei ole syytä unohtaa Lagrangen elementtejä kahdessa (tai kolmessa) dimensiossa.

On mahdollista konstruoida elementtiperhe, jossa on vähemmän vapausasteita kuin vastaavissa Lagrangen elementeissä ja jonka interpolaatiofunktioit sisältävät täydellisen astetta p olevan polynomin kahdessa dimensiossa. Tämä elementtiperhe kulkee nimellä Serendipity. Siinä kanta konstruoidaan polynomeista, jotka ovat vähintään astetta p ja jota täydennetään polynomeilla, jotka ovat muotoa $\xi^p\eta$ ja $\xi\eta^p$. Tällainen kanta on piirretty kuvaan 4.8 ja elementtien solmukonfiguraatioita kuvaan 4.10.

²Blaise Pascal (1632–1662): ranskalainen filosofi, fyysikko, matemaatikko ja kirjailija. 1654 Pascal kävi läpi vaikean henkisen kriisin jonka jälkeen hän keskittyi uskonnollisiin kysymyksiin.



Kuva 4.7 Lagrangen interpolaatio asteeseen neljä saakka.



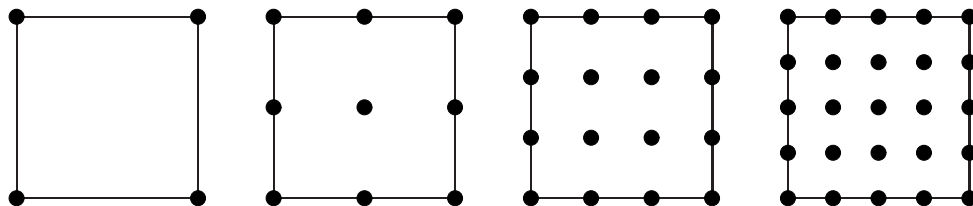
Kuva 4.8 Serendipity interpolaatio asteeseen neljä saakka.

4.6.2 Parametrinen kuvaus

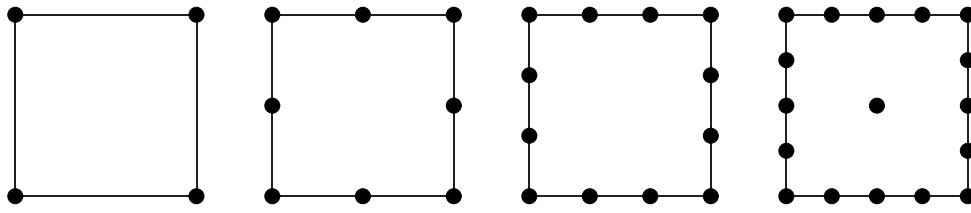
Tähän asti on elementtien geometria otaksuttu joko suorista sivuista koostuviksi kolmioksi tai nelikulmioksi. Geometriaa voidaan myös interpoloida kuten itse ratkaistavaa funktiota. Mikäli elementissä on m solmua, voidaan yksinkertaisesti kirjoittaa kaksidimensioisessa alueessa

$$x = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i^*(\xi, \eta) y_i, \quad (4.149)$$

jossa x_i ja y_i ovat elementin solmujen koordinaatit. Interpolaatiofunktioita N_i^* voidaan hyvällä syyllä kutsua muotofunktioiksi. Mikäli muotofunktiot N_i^* ovat identtiset ratkaistavan funktion (tai funktioiden) interpolaatiossa käytettyjen funktioiden kanssa, käytetään elementistä nimitystä *isoparametrinen*. Mikäli elementin geometriaa kuvataan muotofunktioilla, jotka ovat matalampaa astetta kuin itse ratkaistavan suureen interpolaatiopolynomit, on elementti *aliparametrinen* (engl. subpara-



Kuva 4.9 Lagrangen nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.



Kuva 4.10 Serendipity-nelikulmioelementtien solmukonfiguraatioita.

metric). Vastaavasti käytetään nimitystä *yliparametrinen* (engl. superparametric), mikäli geometriaa kuvataan tarkemmin kuin itse ratkaistavia suureita.

Isoparametrinen elementtien käyttökelpoisuudesta ja suosioista johtuen käytetään termiä muotofunktio yleisesti myös itse ratkaistavana olevan funktion interpo-laatiofunktioista.

Tarkastellaan ensin asian havainnollistamiseksi yksinkertaista parabolista janaelementtiä. Peruselementti on jana ξ -koordinaatistossa välillä $(-1, 1)$. Merkitään elementin koordinaatteja globaalissa x -koordinaatistossa x_1, x_2 ja x_3 (3=keskisolmu). Elementin geometrian kuvaus on siten

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_i = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)x_1 + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)x_2 + (1 - \xi^2)x_3. \quad (4.150)$$

Elementin jäykkymatriisiin ja kuormavektorin integrointia varten tarvitaan derivaatan lausekkeita x -koordinaatin suhteen:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \frac{d}{d\xi} = J^{-1} \frac{d}{d\xi}, \quad (4.151)$$

jossa J on kuvauksen (4.150) mittakaavatekijä. Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen ja säilyttäisi suuntaisuuden, on mittakaavatekijän oltava aina positiivinen

$$J > 0. \quad (4.152)$$

Tämä ehto asettaa rajoituksia elementin solmujen sijoitteluun eli siis keskisolmun sijaintiin päätesolmuihin nähden.

Esimerkki 4.8 Tutki parabolisen isoparametrisen janaelementin keskisolmun sijainnin sallittua aluetta.



Yleisyyttä menettämättä voidaan tutkia tilannetta, jossa elementin päätesolmuilla on arvot $x_1 = 0$ ja $x_2 = L$. Geometrian kuvaus on siten lausuttavissa kaavalla

$$x = N_2L + N_3x_3, \quad (4.153)$$

ja ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$J = \frac{dx}{d\xi} = N_{2,\xi}L + N_{3,\xi}x_3 = \left(\frac{1}{2} + \xi\right)L - 2\xi x_3 > 0, \quad (4.154)$$

josta seuraa

$$2\xi x_3 < \left(\frac{1}{2} + \xi\right)L. \quad (4.155)$$

Tutkitaan erikseen tapaukset $\xi > 0$ ja $\xi < 0$, jolloin saadaan epäyhtälöt

$$x_3 < \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi}L = f(\xi)L, \quad (4.156)$$

$$x_3 > \frac{\frac{1}{2} + \xi}{2\xi}L = f(\xi)L. \quad (4.157)$$

Funktion $f(\xi)$ derivaatta on aina negatiivinen, joten f on monotonisesti laskeva funktio. Täten pätee

$$x_3 < f(1)L < f(\xi)L, \quad f(1)L = \frac{3}{4}L, \quad (4.158)$$

$$x_3 > f(-1)L > f(\xi)L, \quad f(-1)L = \frac{1}{4}L. \quad (4.159)$$

Elementin keskisolmu ei siten saa sijaita elementin reunaneljännesten alueella.

4.6.3 Bilineaarinen interpolaatio

Lagrangen ja Serendipity-tyyppisten elementtiperheiden alimman asteen jäsen on bilineaarisesti interpoloitu elementti. Siinä kantafunktioina ovat $1, \xi, \eta$ ja $\xi\eta$. Interpolaatiofunktiot ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (4.160a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (4.160b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (4.160c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (4.160d)$$

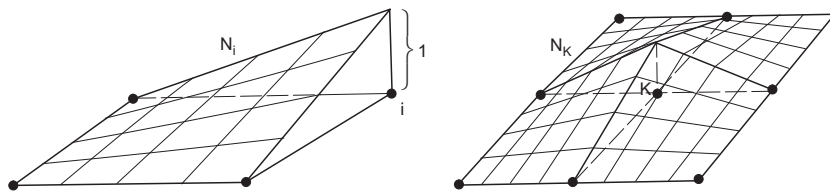
jotka voidaan kirjoittaa lyhyesti yleisessä muodossa

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad (4.161)$$

jossa ξ_i ja η_i ovat peruselementin solmun i koordinaatit. Elementin interpolaatiofunktio N_1 on esitetty kuvassa 4.11.

Mikäli myös elementin geometriaa interpoloidaan funktioilla (4.161), on tuloksena isoparametrinen bilineaarinen elementti. Kuvauksen munnosmatriisi saadaan, kun tarkastellaan funktion

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (4.162)$$



Kuva 4.11 Lineaarinen interpolaatio tasoalueessa.

derivaattojen lausekkeita peruselementin koordinaattien ξ ja η suhteen:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (4.163)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (4.164)$$

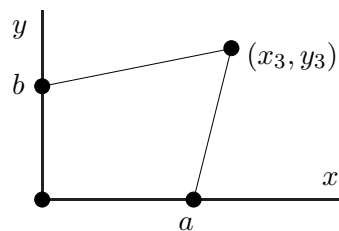
joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{u}_{,\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}^T \mathbf{u}_{,x}, \quad (4.165)$$

jossa \mathbf{J} on geometriakuvauksen Jacobin matriisi.³ Jotta kuvaus olisi yksikäsitteinen, on Jacobin matriisin determinantin oltava nolasta eroava ja jotta kuvaus säilyttäisi suuntaisuutensa on sen oltava positiivinen, eli vaaditaan

$$\det \mathbf{J} = J > 0. \quad (4.166)$$

Esimerkki 4.9 Tutki oheisen bilineaarisen isoparametrisen elementin solmun 3 sijainnin sallittua aluetta.



Elementin geometrian kuvaus kaavoja (4.160a) käyttäen on

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = N_2 a + N_3 x_3 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \xi) [(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \end{aligned} \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = N_3 y_3 + N_4 b \\ &= \frac{1}{4}(1 + \eta) [(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b]. \end{aligned} \quad (4.168)$$

³Monissa elementimenetelmää käsittelevissä kirjoissa kutsutaan \mathbf{J} :n transpoosia parametrisen kuvauksen Jacobin matriisiksi. Tässä esityksessä noudatetaan kuitenkin yleisempää käytäntöä, missä kuvauksen $x_i = f_i(y_j)$ Jacobin matriisi määritellään $J_{ij} = \partial f_i / \partial y_j$.

Mittakaavatekijän muodostamista varten tarvitaan derivaattojen lausekkeet, jotka ovat

$$x_{,\xi} = \frac{1}{4}[(1 - \eta)a + (1 + \eta)x_3], \quad (4.169a)$$

$$y_{,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta)(y_3 - b), \quad (4.169b)$$

$$x_{,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(x_3 - a), \quad (4.169c)$$

$$y_{,\eta} = \frac{1}{4}[(1 + \xi)y_3 + (1 - \xi)b], \quad (4.169d)$$

Ehto kuvauksen yksikäsitteisyydelle on

$$\det \mathbf{J} = x_{,\xi}y_{,\eta} - y_{,\xi}x_{,\eta} > 0, \quad (4.170)$$

josta seuraa epäyhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab > 0. \quad (4.171)$$

Yhtälö

$$(1 + \xi)ay_3 + (1 + \eta)bx_3 - (\xi + \eta)ab = 0 \quad (4.172)$$

esittää laskevaa suoraa, joka leikkaa koordinaattiakselit pisteissä

$$x_3 = 0, \quad y_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \xi}b = f_1(\xi, \eta)b, \quad (4.173)$$

$$y_3 = 0, \quad x_3 = \frac{\xi + \eta}{1 + \eta}a = f_2(\xi, \eta)a. \quad (4.174)$$

Ehdon (4.171) nojalla on oltava voimassa

$$y_3 > f_1(\xi, \eta)b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.175)$$

$$x_3 > f_2(\xi, \eta)a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0. \quad (4.176)$$

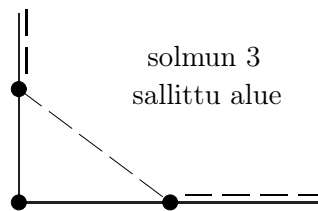
Funktioiden f_1 ja f_2 maksimiarvot ovat 1, kun $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, ja koska ehto (4.171) määrittelee suoran, on solmun 3 sallittu alue määriteltävissä epäyhtälöillä

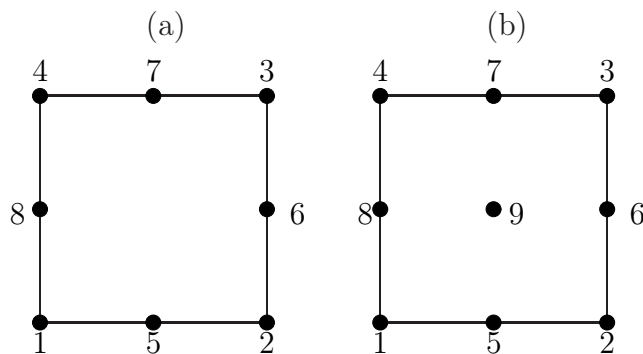
$$y_3 > b \quad \text{kun} \quad x_3 = 0, \quad (4.177)$$

$$x_3 > a \quad \text{kun} \quad y_3 = 0, \quad (4.178)$$

$$y_3 > b - \frac{b}{a}x_3 \quad \text{kun} \quad 0 < x_3 < a. \quad (4.179)$$

Solmun 3 on sijaittava siten, että kuvanelikulmio on konvekksi, ts. siinä ei ole sisäänpistäviä kulmia. Sallittu alue on piirretty alla olevaan kuvaan.





Kuva 4.12 Kvadraattisten elementtien solmunumerointi: (a) Serendipity, (b) Lagrange.

4.6.4 Bikvadraattinen ja korkeamman asteen interpolaatio

Kvadraattisia elementtejä ovat bikvadraattinen 9-solmuinen Lagrangen elementti ja 8-solmuinen Serendipity eli ns. supistettu bikvadraattinen elementti. Numeroidaan elementin solmut kuvan 4.12 mukaisesti. Lagrangen elementin interpolaatiofunktiot ovat siten

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.180a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1), \quad (4.180b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.180c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1), \quad (4.180d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1), \quad (4.180e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2), \quad (4.180f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1), \quad (4.180g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2), \quad (4.180h)$$

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (4.180i)$$

joista muutamia on esitetty kuvassa 4.13.

Supistettu bikvadraattinen eli 8-solmuinen elementti muodostetaan helpoimmin seuraavasti. Lähtökohtana on havainto, että sivusolmuille 5-8 voidaan ottaa Lagrangen tyyppinen interpolaatio, joka on solmun sivun suunnassa kvadraattinen ja sivua vastaan kohtisuorassa suunnassa lineaarinen

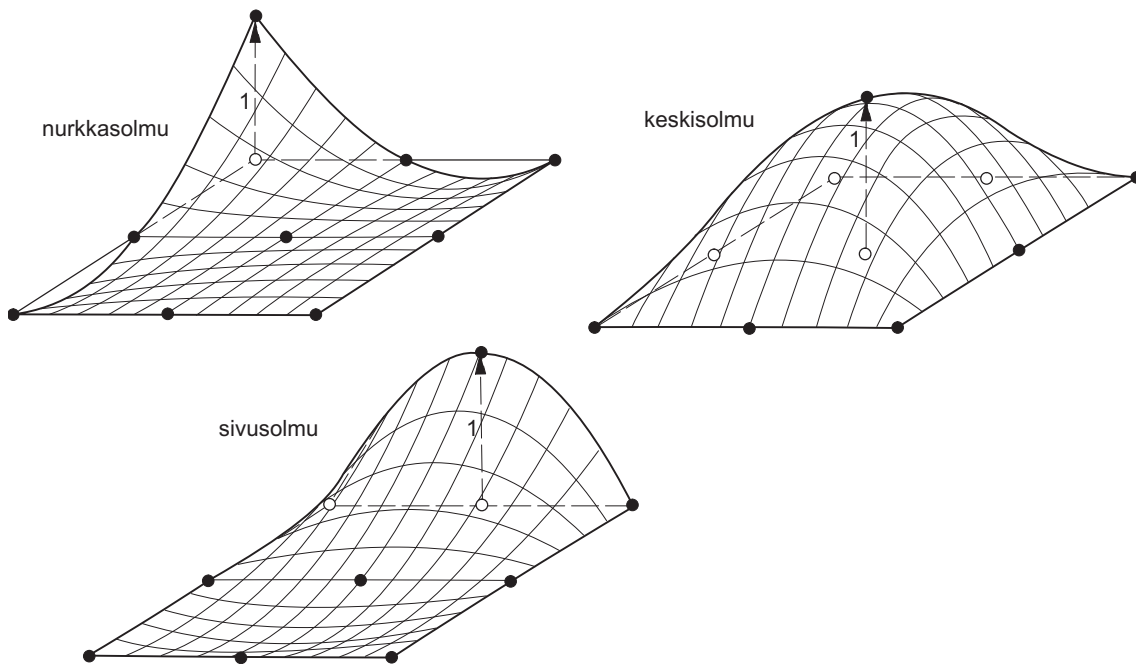
$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (4.181)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (4.182)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (4.183)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \quad (4.184)$$

Nurkkasolmuja 1-4 vastaavat interpolaatiofunktiot voidaan konstruoida bilineaarisista \hat{N}_i ja edellä esitetyistä interpolaatiofunktioista. Tutkitaan esimerkkinä solmun



Kuva 4.13 Lagrangen bikvadraattisia interpolaatiofunktioita.

1 interpolaatiota. Bilineaarinen interpolaatio \hat{N}_1 saa arvon $\frac{1}{2}$ solmuissa 5 ja 8, joi-
ta vastaavat funktiot (4.181a) ja (4.181d) saavat arvot 1. Mikäli nyt bilineaarisesta
funktioista \hat{N}_1 vähennetään sopivasti N_5 :n ja N_8 :n osuus, saadaan haluttu solmujen
5 ja 8 interpolaation arvo:

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8. \quad (4.185)$$

Näin saatu interpolaatiofunktio on piirretty kuvaan 4.14. Kvadraattisen Serendipity-
elementin nurkkasolmuihin liittyviksi interpolaatiofunktioiksi saadaan yleisesti

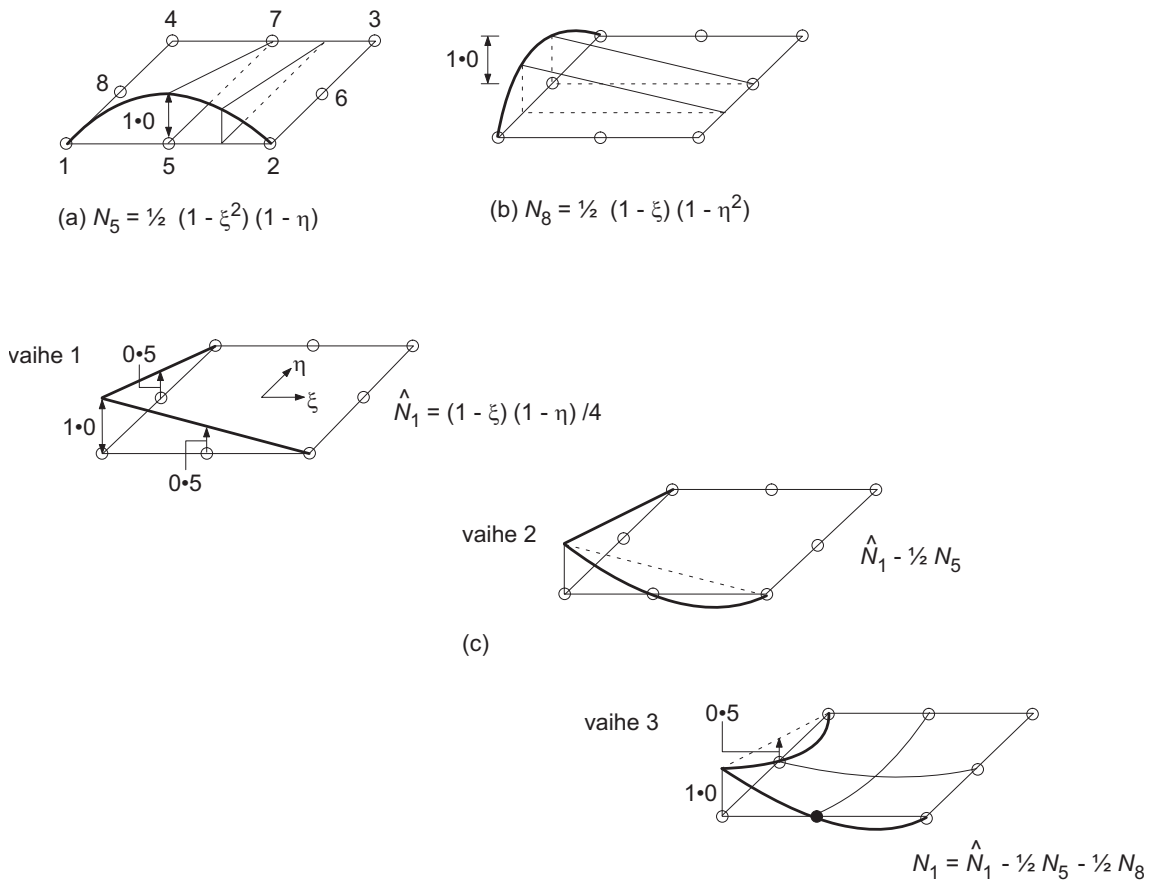
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.186)$$

Aivan vastaavalla tekniikalla voidaan muodostaa korkeamman asteen Serendipity-
tyyppisiä interpolaatioita, esimerkiksi kuubiset interpolaatiofunktioita ovat:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \quad \text{kulmasolmuille,} \quad (4.187)$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_i\eta), \quad \text{sivusolmuille } \xi_i \pm 1 \text{ ja } \eta_i = \pm \frac{1}{3}, \quad (4.188)$$

ja muita sivusolmuja vastaavat interpolaatiot saadaan vaihtamalla muuttujia. Nel-
jännen asteen Serendipity-interpolaatioon tulee polynomin täydellisyysvaatimuksen
takia mukaan yksi keskisolmu. Tähän keskisolmuun liittyvä interpolaatioksi voidaan
asettaa $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$, joka on nolla elementin reunoilla.



Kuva 4.14 Serendipity-tyyppisen elementin interpolaatiofunktion N_1 muodostaminen.

4.7 Elementtimatriisien muodostaminen

Elementin jäykkymatriisi on yleisessä muodossa kirjoitettuna

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega. \quad (4.189)$$

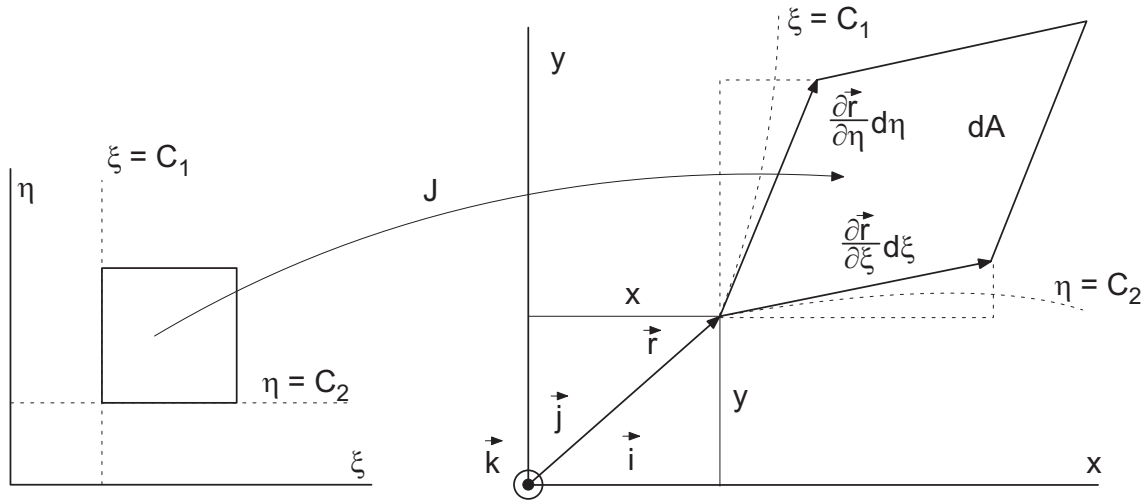
Kahdessa dimensiossa integrointi suoritetaan alan yli, joten $d\Omega = dA$. Parametrisen kuvauksen välityksellä integrointi elementin alan $\Omega^{(e)}$ yli suoritetaan perusneliössä $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$, jolloin (4.189) muuntuu muotoon

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta, \quad (4.190)$$

jossa J on geometriakuvauksen Jacobin matriisin determinantti eli mittakaavatekijä.

Johdetaan seuraavaksi (ξ, η) -tason alkion $d\xi d\eta$ ja (x, y) -tason alkion dA välinen muunnoskaava

$$dA = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.191)$$



Kuva 4.15 Parametrinen kuvaus.

Tarkastellaan kuvan 4.15 kuvausta (ξ, η) -tasosta (x, y) -tasoon. Suora $\xi = C_1 = \text{vakio}$ kuvautuu (x, y) -tason käyräksi $\xi = C_1$ ja vastaavasti suora $\eta = C_2$ kuvautuu käyräksi. Alkioiden dx, dy ja $d\xi, d\eta$ välinen yhteys on ketjusäännön nojalla

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.192)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.193)$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.194)$$

Merkitään (x, y) -tason paikkavektoria OP

$$\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (4.195)$$

missä \vec{i} ja \vec{j} ovat koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit. Käyrien $\xi = C_1$ ja $\eta = C_2$ tangenttivektorit ovat

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) d\xi \quad (4.196)$$

$$\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) d\eta \quad (4.197)$$

Pinta-ala-alkio dA muodostetaan vektoritulona

$$dA = |\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{k}, \quad (4.198)$$

missä \vec{k} on (x, y) -tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori. Kaavasta (4.198) seuraa

$$dA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \end{vmatrix} d\xi d\eta = (x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi}) d\xi d\eta, \quad (4.199)$$

eli

$$dA = \det \mathbf{J} d\xi d\eta = J d\xi d\eta. \quad (4.200)$$

Esimerkki 4.10 Muodosta suorakaiteen muotoisen isoparametrisen bilineaarisen elementin jäykkymatriisi kvasiharmoniselle yhtälölle.

Geometrian interpolaatio on

$$x = (N_2 + N_3)a = \frac{1}{2}(1 + \xi)a, \quad y = (N_3 + N_4)b = \frac{1}{2}(1 + \eta)b. \quad (4.201)$$

Kuvauksen Jacobin matriisin transpoosi supistuu diagonaalimatriisiksi

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b \end{bmatrix}, \quad (4.202)$$

jonka käänteismatriisi on yksinkertaisesti

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}, \quad (4.203)$$

ja determinantti

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{1}{4}ab. \quad (4.204)$$

Kvasiharmonisen yhtälön jäykkymatriisille on johdettu lauseke

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + k_{yy} \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y}) dA, \quad (4.205)$$

joka tässä tapauksessa muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{4}{a^2} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{4}{b^2} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) \frac{1}{4} ab d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{b}{a} \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} \mathbf{N}_{,\eta}^T \mathbf{N}_{,\eta} \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.206)$$

Elementtimatriisin yksittäinen alkio on siis

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(k_{xx} \frac{b}{a} N_{i,\xi} N_{j,\xi} + k_{yy} \frac{a}{b} N_{i,\eta} N_{j,\eta} \right) d\xi d\eta. \quad (4.207)$$

Suorittamalla integroinnit, päädytään lopputulokseen

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_{xx}b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{k_{yy}a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.208)$$

Esimerkki 4.11 Muodosta kvasiharmonisen yhtälön bilineaarisen isoparametrisen elementin alkion $K_{11}^{(e)}$ lauseke yleisessä tapauksessa.

Elementin alkion 11 lauseke on

$$K_{11}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (k_{xx} N_{1,x}^2 + k_{yy} N_{1,y}^2) dA. \quad (4.209)$$

Siirrytään peruselementin (ξ, η) koordinaatistoon, jolloin tarvitaan globaalien koordinaattiakselien suhteen ilmoitettujen derivaattojen lausekkeet ilmaistuna luonnollisten koordinaattien avulla, eli joudutaan kääntämään yhteys (4.165)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{x_{,\xi}y_{,\eta} - y_{,\xi}x_{,\eta}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.210)$$

jossa J_{ij} :t ovat Jacobin matriisin komponentit. Lauseke (4.209) saa siten muodon

$$K_{11}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[k_{xx} \left(\frac{J_{22}N_{1,\xi} - J_{21}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 + k_{yy} \left(\frac{-J_{12}N_{1,\xi} + J_{11}N_{1,\eta}}{J} \right)^2 \right] J d\xi d\eta, \quad (4.211)$$

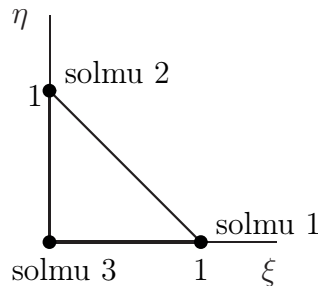
jossa $J = \det \mathbf{J}$. Yllä olevan kaltaiset isoparametrisen elementin jäykkyyssmatriisin alkiot integroidaan yleensä numeerisesti. Tähän seikkaan palataan myöhemmissä luvuissa.

4.8 Parametriset kolmioelementit

Aivan vastaavaan tapaan kuin nelikulmioelementtien tapauksessa voidaan kolmioelementtien geometria kuvata parametrisesti. Mikäli interpolaatiopolynomit lausutaan alakoordinaattien suhteen, on muistettava että vain kaksi kolmesta alakoordinaatista ovat riippumattomia. Toisaalta alakoordinaatit L_1 ja L_2 voidaan assosoida alla olevan kuvan 4.16 mukaisen peruskolmion luonnollisiin koordinaatteihin ξ ja η . Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat siten

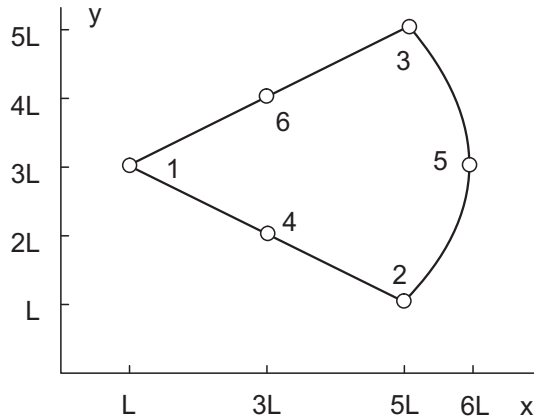
$$N_1 = L_1 = \xi, \quad N_2 = L_2 = \eta, \quad N_3 = L_3 = 1 - \xi - \eta. \quad (4.212)$$

Parametrisen kolmioelementin käsittely selvinnee seuraavasta esimerkistä.



Kuva 4.16 Peruskolmio.

Esimerkki 4.12 Määritä oheisen kvadraattisen isoparametrisen kolmioelementin lämpötilan gradientti kaarevalla reunalla, kun elementin solmulämpötilat ovat $u_1 = 0, u_2 = u_3 = 4\Delta, u_4 = u_6 = 2\Delta, u_5 = 5\Delta$.



Koska elementti on isoparametrinen interpoloidaan geometriaa samoilla funktioilla kuin lämpötilaakin, eli

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i,$$

missä x_i ja y_i ovat solmun i koordinaatit, u_i solmupistelämpötilat. Kvadraattiset interpolaatiofunktiot $N_i, i = 1, \dots, 6$ ovat:

$$N_i = L_i(2L_i - 1), \quad N_{3+i} = 4L_i L_{i+} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.213)$$

Korjoittamalla (ξ, η) -koordinaattien avulla ne ovat

$$N_1 = \xi(2\xi - 1), \quad (4.214a)$$

$$N_2 = \eta(2\eta - 1), \quad (4.214b)$$

$$N_3 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad (4.214c)$$

$$N_4 = 4\xi\eta, \quad (4.214d)$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta), \quad (4.214e)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta). \quad (4.214f)$$

Aivan vastaavalla tavalla kuin isoparametristen nelikulmioelementtien yhteydessä, saadaan tarvittavat derivaatat rakennekoordinaatiston koordinaattien (x, y) suhteen ketjuderivoimalla. Geometriakuvauksen Jacobin matriisin transpoosi on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

Intepolaatiofunktioiden derivaatat reunalla 2, jolla $\xi \equiv 0$, ovat:

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -1, & N_{1,\eta} &= 0, \\ N_{2,\xi} &= 0, & N_{2,\eta} &= 4\eta - 1, \\ N_{3,\xi} &= -3 + 4\eta, & N_{3,\eta} &= 4\eta - 3, \\ N_{4,\xi} &= 4\eta, & N_{4,\eta} &= 0, \\ N_{5,\xi} &= -4\eta, & N_{5,\eta} &= 4 - 8\eta, \\ N_{6,\xi} &= 4 - 4\eta, & N_{6,\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.216)$$

Jacobin matriisin muodostamisessa tarvittavien geometriainterpolaatioden derivaatat reunalla 2 ovat:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = -4(1 + \eta)L, \quad (4.217a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i = 4(1 - 2\eta)L, \quad (4.217b)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i = -2L, \quad (4.217c)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = -4L. \quad (4.217d)$$

Jacobin matriisi laskettuna reunalla 2 on

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} -4(1 + \eta) & -2 \\ 4(1 - 2\eta) & -4 \end{bmatrix} L, \quad \det \mathbf{J} = 24L^2, \quad (4.218)$$

ja sen käänteismatriisi on

$$(\mathbf{J}^T)^{-1} = \frac{1}{24L} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4(2\eta - 1) & -4(1 + \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J^{-1})_{11} & (J^{-1})_{21} \\ (J^{-1})_{12} & (J^{-1})_{22} \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

Nyt voidaan laskea gradientin termit

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (J^{-1})_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ &= (J^{-1})_{11} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i + (J^{-1})_{21} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i \\ &= \sum_{i=1}^6 \left[(J^{-1})_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + (J^{-1})_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right] u_i \\ &= \frac{\Delta}{24L} \{ 2(4\eta - 1)4 + [-4(4\eta - 3) + 2(4\eta - 3)]4 + \\ &\quad + (-4 \cdot 4\eta)2 + [-4(-4\eta) + 2(4 - 8\eta)]5 + [-4(4 - 4\eta)]2 \} \\ &= \frac{\Delta}{L}. \end{aligned} \quad (4.220)$$

Gradientin x -komponentti on vakio koko reunalla 2. Tämä on oikein, sillä annettu lämpötilakenttä on $u(x, y) = \Delta x/L$, joten gradientti on vakio koko

alueessa. Totea, että gradientin y -komponentti häviää identtisesti laskemalla tehtävä loppuun.

4.9 Hierarkinen interpolaatio kahdessa dimensiossa

4.9.1 Nelikulmioelementit

Hierarkisia interpolaatiofunktioita voidaan muodostaa useilla tavoilla. Seuraavassa esitetään kuitenkin vain yksi mahdollinen järjestelmä, jonka peruselementtinä on bilineaarinen nelikulmioelementti. Interpolaatiofunktioita voidaan luokitella kolmeen kategoriaan: solmuinterpolaatiofunktioita, sivumuodot ja sisäiset muodot. Seuraavassa esitetään yksi tapa konstruoida Serendipity-tyyppinen hierarkinen kantajärjestelmä.

1. *Solmumuotofunktiot* ovat tavanomaiset bilineaariset interpolaatiofunktioita:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.221)$$

2. *Sivumuotoja* on astetta p olevalla elementillä $4(p-1)$ kappaletta ($p \geq 2$), jotka liittyvät elementin sivujanoihin. Sivuuun 1, katso kuva 4.16, liittyvät sivumuodot ovat

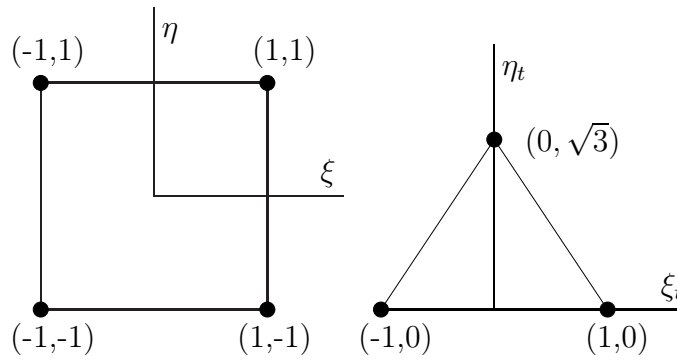
$$N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\psi_i(\xi), \quad i = 2, \dots, p, \quad (4.222)$$

missä funktio $\psi_i(\xi)$ on määritelty yhtälöillä (3.21). Vastaavasti muut sivumuodot ovat

$$\begin{aligned} N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\psi_i(\eta), \\ N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta)\psi_i(\xi), \\ N_i^{(4)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\psi_i(\eta), \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.223)$$

3. *Sisäisiä muotoja* on p -asteisessa Serendipity-tyyppisessä hierarkisessa interpolaatiossa $(p-2)(p-3)/2$ kappaletta ($p \geq 4$). Nämä voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_2^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_3^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_4^{(0)} &= \psi_4(\xi)\psi_2(\eta), \\ N_5^{(0)} &= \psi_3(\xi)\psi_3(\eta), \\ N_6^{(0)} &= \psi_2(\xi)\psi_4(\eta), \quad \text{jne.} \end{aligned} \quad (4.224)$$



Kuva 4.17 Perusneliö ja peruskolmio.

4.9.2 Kolmioelementit

Hierarkiset interpolaatiofunktiot kolmiolle on kätevä lausua alakoordinaattien avulla. Kolmion hierarkiset interpolaatiofunktiot on myös hyvä konstruoida siten, että ne sopivat yhteen vastaavan nelikulmioelementin hierarkisten muotojen kanssa. Määritellään tasasivuinen ns. peruskolmio ja lineaariset alakoordinaatit kolmion luonnollisten koordinaattien ξ_t ja η_t avulla, katso kuva 4.17:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.225a)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi_t - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t \right), \quad (4.225b)$$

$$L_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_t. \quad (4.225c)$$

1. *Solmuinterpolaatiofunktiot* ovat samat kuin jo aikaisemmin esitetyt lineaarisen kolmioelementin interpolaatiofunktiot (4.225a).
2. *Sivumuotoja* on $3(p-1)$ kappaletta, ja ne on konstruoitu siten, että ne sopivat yhteen nelikulmioelementin hierarkisten interpolaatiofunktioiden kanssa. Nelikulmioelementin sivumuodot laskettuna sivuilla ovat funktiot ψ_i (3.21). Koska ψ_i :t ovat funktioita, jotka häviävät sivun päätepisteissä $\xi = \pm 1$, termi $1 - \xi^2$ voidaan jakaa pois. Määritellään uudet funktiot

$$\frac{1}{4}(1 - \xi^2)\phi_i(\xi) = \psi_i(\xi), \quad i = 2, 3, \dots, p. \quad (4.226)$$

Esimerkiksi

$$\phi_2(\xi) = -\sqrt{6}, \quad \phi_3(\xi) = -\sqrt{10}\xi, \quad \phi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{7}{8}}(5\xi^2 - 1). \quad (4.227)$$

Sivuihin 1,2,3 liittyvät interpolaatiomuodot voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} N_i^{(1)} &= L_1 L_2 \phi_i(L_2 - L_1), \\ N_i^{(2)} &= L_2 L_3 \phi_i(L_3 - L_2), \\ N_i^{(3)} &= L_1 L_3 \phi_i(L_1 - L_3), \quad i = 2, 3, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.228)$$

3. *Sisäiset muodot* voidaan määrittellä alakoordinaattien ja Legendren polynomien P_i tuloina. Astetta p olevalla elementillä (sisältäen kaikki astetta p olevat monomit) on $(p-1)(p-2)/2$ sisäistä muotoa, jotka saadaan seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} N_1^{(0)} &= L_1 L_2 L_3, \\ N_2^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1), \\ N_3^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (4.229)$$

4.10 Yhteenveto

Luvussa esitettiin kolmio- ja nelikulmioelementtien interpolaatiofunktioiden muodostamisperiaatteet. Parametrinen kuvaus mahdollistaa kaarevareunaiset elementit. Isoparametrisessä elementissä sekä geometriaa että ratkaistavia funktioita kuvataan samoilla interpolaatiofunktioilla, ja ne ovatkin kaikkein yleisimmin käytettyjä elementtejä.

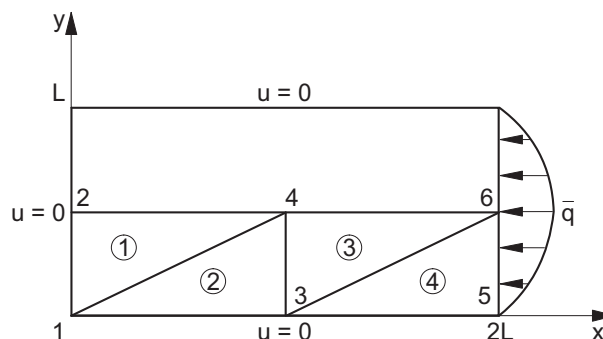
4.11 Harjoitustehtäviä

1. Johda heikko muoto (4.9):

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u})^T \mathbf{D} \nabla u dA = \int_{\Omega} \hat{u} \bar{f} dA - \int_{S_q} \hat{u} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} ds$$

komponenttimuodossa.

2. Ratkaise kuvan kaksidimensioiden lämmönjohtumistehtävä käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä kuvan mukaisesti ottaen huomioon tehtävän symmetria. Materiaalin otaksutaan olevan isotrooppista ja sen lämmönjohtavuus on k . Kuormituksenä on parabolisesti jakautunut lämpövuoto $\vec{q} = -4\bar{q}_c(y/L)(1-y/L)\vec{i}$ reunalla $x = L$.



3. Määritä homogeenisesta isotrooppisesta aineesta valmistetun neliöpoikkileikkauksisen (sivun pituus L) sauvan vääntöjäykkäys käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä

ja sivulla 89 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Prandtin voimamenetelmän mukainen vääntötehtävä palautuu probleemaksi

$$-\Phi_{,xx} - \Phi_{,yy} = 2G\theta, \quad (4.230)$$

jossa $\Phi(x, y)$ on jännitysfunktio, joka saa reunalla arvon $\Phi = 0$. Vääntöjäyhyys saadaan yhtälöstä

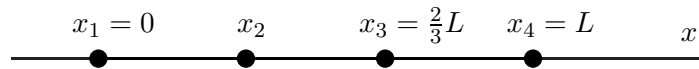
$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_{\Omega} \Phi(x, y) dA. \quad (4.231)$$

Määritä myös leikkausjännitysten jakaantuminen alueessa kun kuormitus on vääntymä $\theta = 1/L$. Leikkausjännitysten lausekkeet ovat

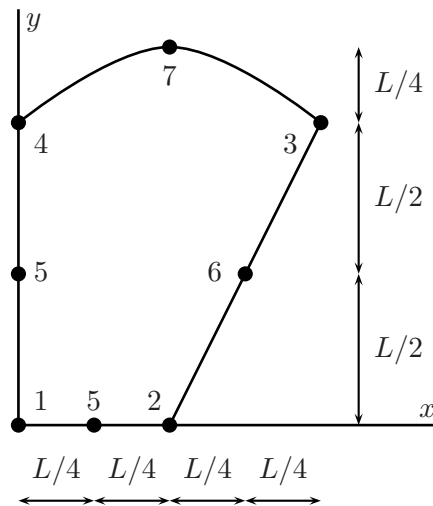
$$\tau_{zx} = \Phi_{,y}, \quad \tau_{zy} = -\Phi_{,x}. \quad (4.232)$$

Voit käyttää hyväksesi sivulla 89 lasketun esimerkin tietoja soveltuvin osin.

4. Ratkaise edellinen tehtävä esimerkin 4.7 mukaisesti siirtymämenetelmällä. Käytä lineaarisia kolmioelementtejä ja sivulla 89 olevan esimerkin kaltaista neljän elementin verkkoa. Vertaa tulosta edellisen tehtävän ratkaisuun.
5. Määritä kuubisen isoparametrisen janaelementin solmun 2 sallittu alue kun muut solmut ovat kohdissa $x_1 = 0, x_3 = 2L/3, x_4 = L$.



6. Määritä kvadraattisen isoparametrisen janaelementin derivaatan lauseke globaalin koordinaatin x funktiona. Elementin solmupisteiden koordinaatit ovat $x_1 = 0, x_2 = \alpha L, x_3 = L$ ($\alpha > 0$). Missä rajoissa parametri α voi vaihdella? Interpoloitavan funktion lauseke on $u(x) = u_3(x/L)^2 = \alpha^2 u_3 N_2 + u_3 N_3$, missä $N_2 = 1 - \xi^2, N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$. Piirrä isoparametrisen elementin derivaatan lauseke koordinaatin x funktiona α :n arvoilla $\alpha = 1/4$ ja $\alpha = 1/3$. Mitä voit sanoa tarkkuudesta?
7. Totea, että luvussa 4.9.1 esitetty kanta on Serendipity-tyyppinen.
8. Miten luvussa 4.9.1 esitettyä kantaa olisi muutettava, jotta saataisiin Lagrangen tyyppinen hierarkinen interpolaatio.
9. Oheisen redusoidun bikvadraattisen elementin solmupistelämpötilat ovat: $u_1 = u_2 = u_5 = 0, u_3 = 2\bar{u}, u_4 = \bar{u}, u_6 = 5/8\bar{u}, u_7 = 35/16\bar{u}, u_8 = 1/2\bar{u}$. Materiaali otaksutaan isotrooppiseksi ja sen lämmönjohtavuus on k . Määritä lämpövektori $\vec{q} = -k\nabla u$ solmussa 4.

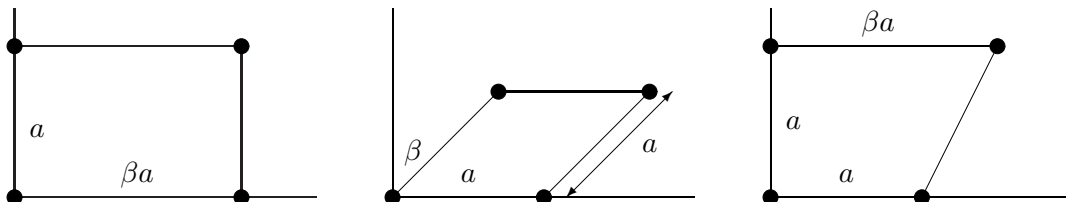


10. Nelikulmioelementin interpolaatio voidaan lausua muodossa

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 \quad (4.233)$$

Muodosta nelikulmioelementin interpolaatiofunktioiden $N_1 \dots N_4$ lausekkeet opetusmonisteen luvun 4.2 tyyliin. Elementin solmutkoordinaatit ovat $(0, 0); (a, 0); (2a, a); (a, 0)$. Onko näin konstuoitu elementti yhteensopiva. Tarkastele u :n lauseketta y :n funktiona oikealla reunalla.

11. Muodosta oheisten isoparametrisen bilineaarisesti interpoloitujen nelikulmioelementtien geometriakuvauksen Jacobin matriisit. Määritä myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa) parametrin β funktiona. Laske myös elementtien pinta-alat.



12. Muodosta isoparametrisen *nelisolmuisen* kolmioelementin solmuihin sidottujen interpolaatiofunktioiden lausekkeet $N_1 \dots N_4$. Muodosta geometriakuvauksen Jacobin matriisi kolmiolle jonka solmujen koordinaatit ovat $(0, 0); (a, -\frac{1}{2}a); (\beta a, 0); (a, \frac{1}{2}a)$. Laske myös Jacobin matriisin ominaisarvot ja häiriöalttius (spektraalinormissa) β :n funktiona sekä elementin pinta-ala. Mitkä ovat β :n sallitut arvot?
13. Muodosta Lagrangen tyyppiset kuusisolmuisen suorakaide-elementin interpolaatiofunktio N_1, \dots, N_6 perusneliössä, $(\xi, \eta) \in (-1, 1)$, kun interpolaatio on lineaarinen ξ -koordinaatin suhteen ja kvadraattinen η -koordinaatin suhteen.

Laske muodonmuutokset oheisen isoparametrisen tasomuodonmuutostilan elementin linjalla $y = L$ kun solmupistesiiirtymät ovat: $u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = v_1 = v_5 = v_6 = 0$ ja $u_3 = -5\Delta, u_4 = -8\Delta, v_2 = 8\Delta, v_3 = \frac{25}{2}\Delta, v_4 = 8\Delta$.

