

Luku 3

Johdatus elementtimenetelmään

Luvun tarkoituksena on esitellä elementtimenetelmän perusosat ja tarkastella interpolaatiofunktioiden muodostamista yksidimensioisissa tapauksessa. Elementtimenetelmän h - ja p -version peruseriaatteet esitetään. Tavanomaisen elementtimenetelmän ongelmista käsitellään esimerkkinä diffuusio-konvektioyhtälön tapaus. Luvun lopussa annetaan lyhyt johdatus stabiloituihin formulaatioihin.

3.1 Malliprobleema

Elementtimenetelmä voidaan johtaa edellä esitetyistä periaatteista, eli painotettujen jäännösten menetelmästä tai sen eri muunnoksista. Ainoa ero klassisten variaatiomenetelmien ja elementtimenetelmän välillä on se, että klassisissa menetelmissä interpoloivat kantafunktiot ovat määritellyt koko tarkasteltavassa alueessa, kun taas elementtimenetelmässä interpoloivat funktiot määritellään paikallisesti osa-alueen eli elementin sisällä, josta myös menetelmän nimi äärellisten elementtien menetelmä. Ratkaisu saadaan kokoamalla kunkin elementin osuudet globaaliin yhtälösystemiin.

Tarkastellaan asiaa yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön (tai aksiaalisesti kuormitetun sauvan) tapauksessa. Olkoon ratkaistavana probleema

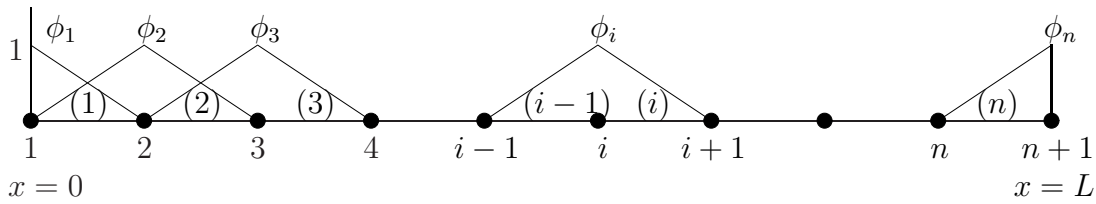
$$-(ku')' = f \tag{3.1}$$

alueessa $\Omega = \{x|x \in (0, L)\}$ reunaehdoilla $u(0) = u(L) = 0$. Valitaan yhtälöiden muodostamistavaksi Galerkinin menetelmä, jolloin malliprobleeman (3.1) heikko muoto eli variaatiomuoto saadaan kun kyseinen differentiaaliyhtälö kerrotaan puolittain testifunktioilla \hat{u} ja integroidaan ratkaisualueen ylitse

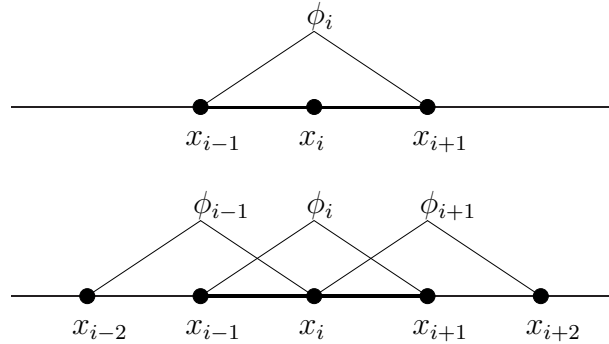
$$-\int_0^L \hat{u}(ku')' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \tag{3.2}$$

Osittaisintegroimalla vasemmanpuoleinen termi saadaan

$$\int_0^L \hat{u}' ku' dx - \left|_0^L \hat{u} ku' \right| = \int_0^L \hat{u} f dx. \tag{3.3}$$



Kuva 3.1 Elementtimenetelmän paloittain lineaariset kantafunktiot.



Kuva 3.2 Solmuun i liittyvä painofunktio ϕ_i , ja välille (x_{i-1}, x_{i+1}) liittyvät yritefunktion kantapolynomit.

Koska variaation \hat{u} on toteutettava homogeeniset reunaehdot, päädytään muotoon

$$\int_0^L \hat{u}' k u' dx = \int_0^L \hat{u} f dx. \quad (3.4)$$

Elementtimenetelmä poikkeaa klassisista painotetun jäännösten menetelmän variaatioista ainoastaan siinä, että kantafunktiot määritellään vain osassa aluetta Ω . Yhtälöstä (3.4) havaitaan, että testifunktioille \hat{u} ja itse ratkaisuyritteelle \tilde{u} riittää valita funktiot jotka ovat vain C_0 -jatkuvia. Toisin sanoen edes ensimmäisen derivaatan jatkuvuudelle ei aseteta ehtoja. Tällaisten interpolaatiosuhteiden muodostaminen onnistuu mutkattomasti jopa useammassa kuin yhdessä dimensiossa. Kuvassa 3.1 on käytetty paloittain lineaarisia kantafunktioita, ja ratkaisuyrite voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \phi_i(x). \quad (3.5)$$

Huomaa, että tuntemattomilla parametreilla on suureen u arvot solmuissa i , joten voidaan kirjoittaa $\alpha_i = u_i$.

Galerkinin menetelmässä testi- eli painofunktiolle valitaan myös sama kanta ϕ_i . Kuten kuvasta 3.2 voidaan havaita, on solmuun i liittyvää testifunktiota $\hat{u} = \phi_i \hat{u}_i$

vastaava osa integraalia (3.4):

$$\begin{aligned} \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i-1}}{dx} dx u_{i-1} + \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_i}{dx} dx u_i + \hat{u}_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_{i+1}}{dx} dx u_{i+1} \\ = \hat{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i f dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Koska painofunktion arvo solmussa \hat{u}_i on mielivaltainen, on se voitu supistaa pois yllä olevasta yhtälöstä. Merkitään osavälin $(i) = \{x | x \in (x_i, x_{i+1})\}$ pituutta symbolilla $h^{(i)} = x_{i+1} - x_i$, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{i-1}}{dx} = -\frac{1}{h^{(i-1)}} \quad \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \frac{d\phi_i}{dx} = -\frac{1}{h^{(i)}} \quad \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ \frac{d\phi_i}{dx} = \frac{1}{h^{(i-1)}} \quad \text{kun } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \frac{d\phi_{i+1}}{dx} = \frac{1}{h^{(i)}} \quad \text{kun } x \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Olettamalla lähdetermin vakioisuus integraalista (3.6) saadaan

$$k \left[-\frac{1}{h^{(i-1)}} u_{i-1} + \left(\frac{1}{h^{(i-1)}} + \frac{1}{h^{(i)}} \right) u_i - \frac{1}{h^{(i)}} u_{i+1} \right] = \frac{1}{2} f (h^{(i-1)} + h^{(i)}). \quad (3.7)$$

Käytettäessä paloittain lineaarisia kantafunktioita kytkeytyvät yksidimensioisesa ongelmassa ainoastaan tuntemattomat u_{i-1} , u_i ja u_{i+1} toisiinsa. Tämä johtaa nauhamaiseen kerroinmatriisiin, joka kyseisessä tehtävässä on tridiagonaalinen.

Edellä kuvattu ratkaisutapa on kätevä käsinlaskussa. Vielä systemaattisempi tietokonelaskentaan soveltuva lähestymistapa elementtimenetelmään saadaan kokoamalla systeemyhtälön alkioit elementteittäin. Merkitään alueen Ω toisistaan eriäviä osa-alueita $\Omega^{(e)} = \{x | x \in (x_1^{(e)}, x_2^{(e)})\}$. Mikäli jako suoritetaan n :ään elementtiin, katso kuva 3.1, niin integraalin additiivisuuteen nojautuen yhtälö (3.4) saa muodon

$$\sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u}' k u' dx = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^{(e)}} \hat{u} f dx. \quad (3.8)$$

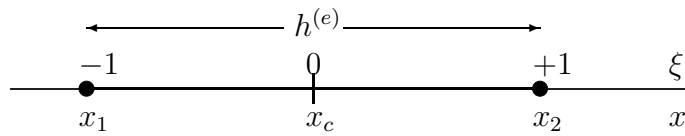
Tämä muoto toimii elementtimenetelmän perustana. Tarkastellaan seuraavassa hieman yksityiskohtaisemmin ja systemaattisemmin elementtimenetelmän interpolointifunktioita ja elementtikohtaista kokoamisprosessia.

3.2 Elementtimenetelmän perusosat

3.2.1 Yleistä

Tietyn elementtityypin määrittely vaatii kolmen perusasian selventämistä:

1. elementin muodon eli geometrian (jana, kolmio, nelikulmio, tetraedri, särmiö, jne.),



Kuva 3.3 Janaelementti.

2. interpoloivien funktioiden ja

3. elementin vapaiden parametrien eli vapausasteiden määrittelyn.

Nämä kolme seikkaa määräävät ns. solmujen lukumäärän ja sijainnin. Riippuen siitä, millaiset kantafunktiot ja vapausasteet on valittu, ei kaikkia vapausasteita voi välttämättä assosoida tiettyihin solmuihin tai paikkaan yksikäsitteisesti. Tähän seikkaan tullaan palaamaan vielä myöhemmin.

3.2.2 Interpolaatiofunktiot

Elementin alueella kuvataan haluttua suuretta interpolaatiofunktioilla, joita kutsutaan myös muotofunktioiksi. Interpolaatiofunktiot voidaan jakaa ainakin kahteen ryhmään:

1. tavanomaisiin, eli solmuihin sidottuihin ja
2. hierarkisiin interpolaatiofunktioihin.

Interpolaation muodostavat kantafunktiot voitaisiin periaatteessa valita miltei mielivaltaisesti. Tavallisesti käytetään kuitenkin yksinkertaisia polynomeja. Tavanomaisille interpolaatiofunktioille on ominaista, että kaikki kantafunktiot muuttuvat polynomien asteen p kasvaessa. Hierarkisessa kantajärjestelmässä interpolaatiopolynomien asteen kasvattaminen ei muuta vanhoja alhaisempaa astetta olevia kantafunktioita.

Aloitetaan tarkastelu yksidimensioisesta janaelementistä. Otetaan käyttöön paikallinen koordinaatisto, jonka koordinaattia merkitään kirjaimella ξ ja joka määritellään alueessa $\xi \in (-1, 1)$. Täten muunnos rakennekoordinaatistosta eli globaalista x -koordinaatistosta paikalliseen eli elementin lokaaliin ξ -koordinaatistoon voidaan ilmaista yhtälönä

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{h}, \quad (3.9)$$

jossa x_c on elementin keskipisteen globaali rakennekoordinaatti ja h on janaelementin pituus, katso kuva 3.3.

Yksinkertaisin mahdollinen polynomimuotoinen kantafunktiojärjestelmä on varmastikin

$$\phi_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Tämä ei ole sellaisenaan kuitenkaan käyttökelpoinen, sillä näin muodostettu kanta on numeerisesti mahdollisimman pahanlaatuinen ja äärellisellä laskentatarkkuudella operoitaessa pyöristysvirheet hyvin äkkiä saastuttavat tulokset kelvottomiksi. Havainnollistetaan tätä esimerkillä.

Esimerkki 3.1 *Apksimoidaan funktiota $f(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ välillä $(0, 1)$ käyttäen polynomikantaa (3.10) ja pienimmän neliön keinoa. Mikä on virhe tuloksissa, kun käytetään kuudennen asteen interpolaatiota ja reaali-luvuille käytetään 32-bittistä esitystä, mikä merkitsee operoimista seitsemällä kahdeksalla merkitsevällä numerolla.*

Apksimaatio on siis

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) f_i, \quad (3.11)$$

jossa f_i :t ovat vielä määräämättömiä kertoimia. Minimoitava virhefunktio on

$$E(f_i) = \frac{1}{2} \int_0^L [f(x) - \tilde{f}(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right]^2 dx. \quad (3.12)$$

Kertoimien f_i ratkaisuyhtälöt ovat

$$\frac{\partial E}{\partial f_j} = \int_0^L \left[f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \right] \phi_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

joka kirjoitettuna matriisimuodossa on

$$\begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) & \dots & (\phi_1, \phi_n) \\ (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) & \dots & (\phi_2, \phi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_1) & (\phi_n, \phi_2) & \dots & (\phi_n, \phi_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{Bmatrix}, \quad (3.14)$$

jossa on merkitty integraalimuotoista sisätuloa kaarisulkeilla (\cdot, \cdot) . Suorittamalla integroinnit saadaan tulokseksi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \end{Bmatrix}, \quad (3.15)$$

jossa kerroinmatriisi \mathbf{A} on surullisenkuuluisa Hilbertin matriisi. Ratkaisu on esitetty seuraavassa taulukossa.

	tarkka arvo	numeerinen arvo	suhteellinen virhe %
f_1	1.00000000	1.00052619	0.05261898
f_2	1.00000000	0.98027061	1.97293762
f_3	1.00000000	1.18187832	18.18783188
f_4	1.00000000	0.31600904	68.39909363
f_5	1.00000000	2.22156572	122.15657043
f_6	1.00000000	-0.03333282	103.33328247
f_7	1.00000000	1.33333324	33.33332443

3.2.2.1 Solmuihin sidotut Lagrangen kantapolynomit

Suosittelavia tapoja estää edellisen esimerkin kaltainen pyöristysvirheräjähdyks on käyttää esimerkiksi Lagrangen polynomeja tai ns. ortogonaalipolynomijärjestelmiä interpolaatiofunktioina.

Lagrangen astetta p oleva polynomi määritellään

$$l_k^p(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_p)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_p)}, \quad (3.16)$$

joka antaa yksikköarvon pisteessä $\xi = \xi_k$ ja leikkaa koordinaattiakselin p :ssä pisteessä $\xi_i, i = 0, 1, \dots, p$ ($i \neq k$).

Lineaarinen interpolaatio välillä ($\xi_0 = -1, \xi_1 = 1$) saadaan, kun asetetaan $\xi_k = \xi_0$ ja $\xi_k = \xi_1$ vuoron perään, eli

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ N_2(\xi) &= l_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Paraboliseksi interpolaatioksi saadaan ($\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$)

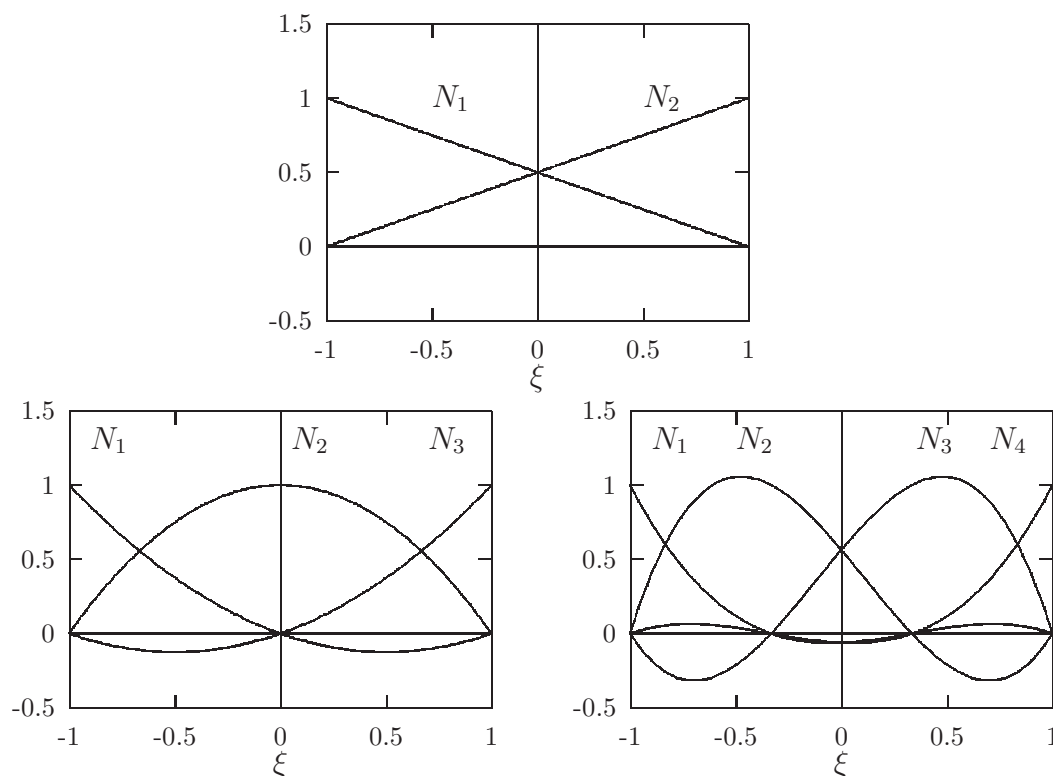
$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= l_1^2(\xi) = 1 - \xi^2, \\ N_3(\xi) &= l_2^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

ja kuubiset Lagrangen polynomit ovat ($\xi_0 = -1, \xi_1 = -1/3, \xi_2 = 1/3, \xi_3 = 1$)

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_0^3(\xi) = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_2(\xi) &= l_1^3(\xi) = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_3(\xi) &= l_2^3(\xi) = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1), \\ N_4(\xi) &= l_3^3(\xi) = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Lineaariset, paraboliset ja kuubiset interpolaatiopolynomit on piirretty kuvaan 3.4.

Kuten havaitaan, voidaan Lagrangen polynomien avulla muodostaa kokonainen perhe interpolaatiofunktioita. Jos näitä funktioita käytetään elementtimenetelmässä, puhutaan Lagrangen elementtiperheestä.



Kuva 3.4 Lineaariset, paraboliset ja kuubiset Lagrangen interpolaatiopolynomit.

3.2.2.2 Hierarkinen kantapolynomijärjestelmä

Uudempi tapa konstruoida interpolaatiofunktioita on käyttää hierarkisia kantafunktioita [33]. Eräs mahdollinen järjestelmä saadaan kun valitaan

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad N_i(\xi) = \psi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p + 1, \quad (3.20)$$

jossa ψ_j määritellään Legendren polynomien P_{j-1} integraalien avulla:

$$\psi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

Legendren polynomit $P_n(\xi)$ ovat Legendren differentiaaliyhtälön

$$(1 - \xi^2)y'' - 2\xi y' + n(n + 1)y = 0, \quad -1 < \xi < 1 \quad (3.22)$$

ratkaisuja, kun $n = 0, 1, 2, \dots$ ja jossa pilkku tarkoittaa derivointia ξ :n suhteen. Kaksi ensimmäistä polynomia ovat

$$P_0(\xi) = 1 \quad \text{ja} \quad P_1(\xi) = \xi, \quad (3.23)$$

josta korkeamman asteen polynomit voidaan generoida *Bonnetin rekursiokaavan*

$$(n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

avulla, josta seuraa

$$\begin{aligned} P_2(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), & P_3(\xi) &= \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi), \\ P_4(\xi) &= \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3), & P_5(\xi) &= \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \quad \text{jne..} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Erittäin hyödyllisiä ovat myös palautuskaavat derivaatoille:

$$nP'_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P'_n(\xi) - (n+1)P'_{n-1}(\xi), \quad (3.26a)$$

$$(2n+1)P_n(\xi) = P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi). \quad (3.26b)$$

Yllä olevien Legendren polynomien rekursiokaavojen perusteella on helppo johtaa rekursiokaava interpolaatiofunktioille $\psi(\xi)$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)]. \quad (3.27)$$

Hierarkisen järjestelmän (3.21) ensimmäiset ns. solmuttomat kantafunktiot ovat siis

$$N_3(\xi) = \psi_2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \quad (3.28a)$$

$$N_4(\xi) = \psi_3(\xi) = \frac{\sqrt{10}}{4}(\xi^3 - \xi), \quad (3.28b)$$

$$N_5(\xi) = \psi_4(\xi) = \frac{\sqrt{14}}{16}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1), \quad (3.28c)$$

$$N_6(\xi) = \psi_5(\xi) = \frac{\sqrt{18}}{16}(7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi), \quad \text{jne..} \quad (3.28d)$$

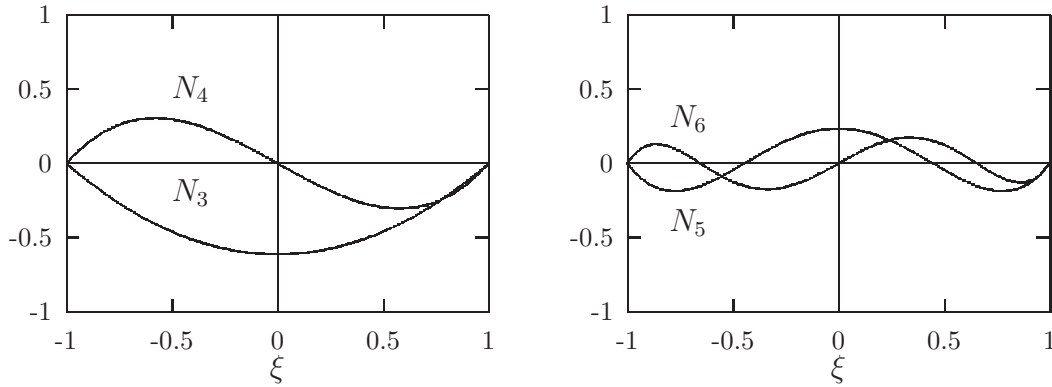
jotka ovat piirrettyinä kuvassa 3.5. Kantafunktioita N_1 ja N_2 kutsutaan solmuinterpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi interpolaatiofunktioiksi tai ulkoisiksi muodoiksi, kun taas kantafunktioita $N_i, i = 3, 4, \dots$ kutsutaan sisäisiksi interpolaatiofunktioiksi tai sisäisiksi muodoiksi tai “kuplamuodoiksi”. Kantafunktiot (3.20) ovat erityisen sopivia elementtimenetelmän interpolaatiofunktioiksi erityisesti tietokoneimplemtointia silmälläpitäen, sillä ne muodostavat numeerisesti stabiilin kantafunktioiden joukon ja niiden ohjelmointi onnistuu kätevästi rekursiokaavan avulla mielivaltaiselle asteluvulle p .

Legendren polynomien yksi mielenkiintoisista ominaisuuksista on ortogonaalisuus

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi)P_j(\xi)d\xi = \begin{cases} \frac{2}{2i+1}, & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.29)$$

Tästä aiheutuen on yhtälön (3.21) avulla määritellyillä interpolaatiofunktioilla seuraavanlainen sovellutuksia silmälläpitäen tärkeä ortogonaalisuusominaisuus:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\psi_i}{d\xi} \frac{d\psi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases} \quad (3.30)$$



Kuva 3.5 Hierarkisen järjestelmän (3.21) sisäisiä interpolaatiofunktioita.

3.3 Malliprobleema elementtimenetelmällä

Palataan uudestaan esimerkkiongelmään (3.1) ja sen variaatiomuotoon (3.4), joka on perusta elementtimenetelmän diskreeteille yhtälöille. Kirjoitetaan heikko muoto uudelleen näkyviin:

$$\int_0^L ku' \hat{u}' dx = \int_0^L f \hat{u} dx. \quad (3.31)$$

Otetaan käyttöön yksinkertaisin mahdollinen C_0 -interpolaatio eli lineaariset polynomit

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.32)$$

Ratkaisua siis approksimoidaan kunkin elementin alueella kaavalla

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi(x)) u_i \\ &= N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

jossa u_i :t ovat tuntemattomia parametreja eli u :n approksimaation arvoja solmupisteissä. Kun painofunktioille \hat{u} valitaan myös samat kantafunktiot (3.32) ja jaetaan alue N :ään elementtiin, saadaan heikon muodon (3.31) diskreetti vastine kirjoitettua muotoon

$$\sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^2 \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx u_j = \sum_{e=1}^N \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

Integroinnit voidaan suorittaa elementtikohtaisesti paikallisessa ξ -koordinaatistossa, jolloin yhtälössä (3.34) olevissa integraaleissa suoritetaan muuttujan vaihto $x \rightarrow \xi$,

jolloin rajat muuttuvat $x_1^{(e)} \rightarrow -1$ ja $x_2^{(e)} \rightarrow +1$ ja saadaan lausekkeet

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} J^{-1} d\xi, \quad (3.35a)$$

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} f N_i dx = \int_{-1}^1 f N_i J d\xi, \quad (3.35b)$$

jossa $J = dx/d\xi = \frac{1}{2}h^{(e)} = \frac{1}{2}(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})$. Huomaa, että derivaatoille pätee

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} = \frac{2}{h^{(e)}} \frac{d}{d\xi}. \quad (3.36)$$

Yhtälö (3.34) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.37)$$

jossa globaali rakennekoordinaatiston jäykkyyismatriisi \mathbf{K} ja kuormitusvektori \mathbf{f} kootaan paikallisista elementtien osuuksista

$$\mathbf{K} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^N \mathbf{K}^{(e)}, \quad \mathbf{f} = \mathop{\text{A}}_{e=1}^N \mathbf{f}^{(e)}. \quad (3.38)$$

Elementtimatriisin $\mathbf{K}^{(e)}$ ja vektoreiden $\mathbf{u}^{(e)}$ ja $\mathbf{f}^{(e)}$ komponenttiesitykset ovat

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

joissa

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 k \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi, \quad f_i = \frac{1}{2}h^{(e)} \int_{-1}^1 f N_i d\xi. \quad (3.40)$$

Ottamalla käyttöön matriisimerkinnot

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)}, \quad \mathbf{N} = [N_1 \quad N_2], \quad \mathbf{B} = \frac{d}{dx}\mathbf{N}, \quad \mathbf{D} = k \quad (3.41)$$

voidaan elementin jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori kirjoittaa yleisessä muodossa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} f \mathbf{N}^T dV. \quad (3.42)$$

Yllä olevasta jäykkyyismatriisin esityksestä havaitaan yhteys aivan alussa mainittuun fysikaalisten ilmiöiden matemaattisen mallin perusstruktuuriin, katso kuva 1.2. Tässä siis matriisi \mathbf{B} välittää diskreetissä muodossa kinemaattisen yhteyden; matriisi \mathbf{D} vastaavasti materiaalilain ja koska kyseessä on itseadjungoitu yhtälö \mathbf{B}^T on tasapaino-operaattorin diskreetti vastine.

Mikäli otaksutaan k vakioksi elementin alueella ja käytetään lineaarisia interpolaatiopolynomeja (3.32), saadaan jäykkyysmatriisiksi (tai johtavuusmatriisiksi)

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Kvadraattista interpolaatiota (3.18)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x)^{(e)} &= \tilde{u}(\xi(x))^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi(x))u_i = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3 \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

käytettäessä saadaan jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{3h^{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Mikäli käytetään hierarkista kantaa (3.20) saadaan yksinkertainen jäykkyysmatriisi, jossa ensimmäinen 2×2 lohko on identtinen matriisin (3.43) kanssa ja ortogonaalisuuden (3.30) perusteella tulee sisäisten muotojen kontribuutioksi vain diagonaalitermit

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Esimerkki 3.2 Mikäli kuormitustermi on $f(x) = -f_c(x/L) \ln(x/L)$ (f_c on vakio) ja lämmönjohtavuus k on vakio koko alueessa $(0, L)$, niin määritä lämpötilajakauma malliprobleemalle, kun alue jaetaan tasavälisesti kolmeen lineaariseen elementtiin. Määritä likiratkaisusta myös lämpövuon arvot.

Kaikkien elementtien jäykkyysmatriisit ovat samanlaisia, koska k on vakio ja elementit ovat yhtä pitkiä. Ne saadaan yhtälöstä (3.43) sijoittamalla $h^{(e)} = L/3$. Systemin globaali jäykkyysmatriisi kootaan, kun ensin identifioidaan paikallisia vapausasteita vastaavat globaalit vapausastenumerot:

	elem. 1	elem. 2	elem. 3
paikalliset vapausasteet	1	2	1
globaalit vapausasteet	-	1	1

Globaalin eli rakennekoordinaatiston jäykkyyismatriisin alkiot ovat siten:

$$K_{11} = K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, \quad K_{12} = K_{12}^{(2)}, \quad K_{22} = K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}, \quad (3.47)$$

johon sijoittamalla arvot saadaan

$$\mathbf{K} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1+1 \end{bmatrix} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Kuormitusvektorin termit ovat

$$f_1 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)}, \quad f_2 = f_2^{(2)} + f_1^{(3)}, \quad (3.49)$$

jossa yksittäiset alkiot ovat

$$f_2^{(1)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50a)$$

$$f_1^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50b)$$

$$f_2^{(2)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi, \quad (3.50c)$$

$$f_1^{(3)} = -\frac{1}{6}f_cL \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \ln\left(\frac{1}{6}\xi + \frac{5}{6}\right) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi, \quad (3.50d)$$

jossa on käytetty yhtälön (3.9) käännteistä muotoa

$$x = \frac{1}{2}h^{(e)}\xi + x_c^{(e)}. \quad (3.51)$$

Suorittamalla integroinnit saadaan kuormitusvektoriksi ja ratkaisuksi

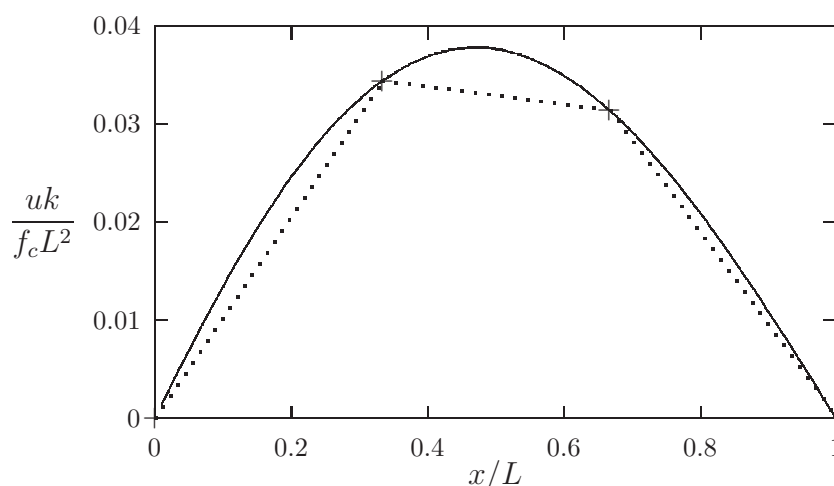
$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_cL \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{u} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} = \frac{L}{9k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.11197 \\ 0.08539 \end{Bmatrix} f_cL \\ &= \begin{Bmatrix} 0.034371 \\ 0.031417 \end{Bmatrix} \frac{f_cL^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tarkka ratkaisuhan on

$$u(x) = \frac{f_cL^2}{6k} \left(\frac{x}{L}\right) \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\ln\frac{x}{L} - \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6} \right], \quad (3.54)$$

ja alla olevassa taulukossa on vertailtu analyttisen ja elementtimenetelmän antamia tuloksia tietyissä pisteissä (kerrottava tekijällä f_cL^2/k), katso myös kuvaa 3.6.



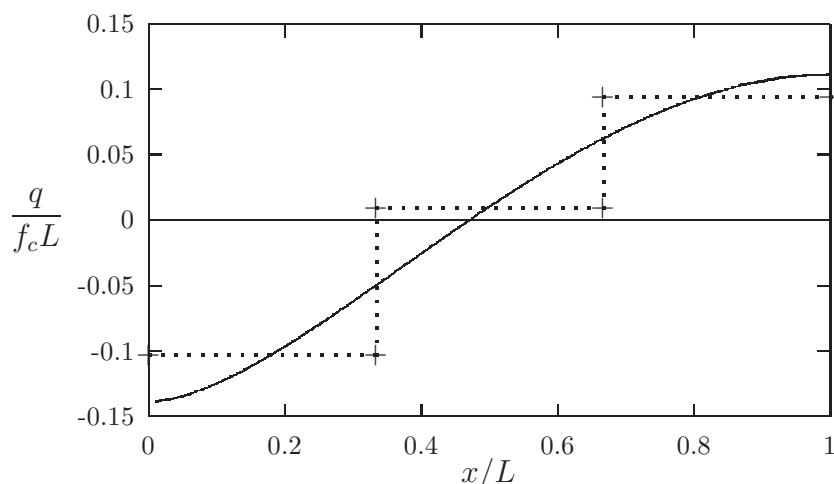
Kuva 3.6 Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

	solmu 1 ($x/L = 1/3$)	keskipiste ($x/L = 1/2$)	solmu 2 ($x/L = 2/3$)
tarkka	0.034371	0.037643	0.031417
FEM	0.034371	0.032894	0.031417

Havaitaan, että elementtimenetelmän antamat tulokset yhtyvät solmupisteissä tarkkaan ratkaisuun, eli elementtiapproksimaatio on tarkan ratkaisun interpolantti. Tämän paremmin ei voisi käydä. Tietenkin asia herättää heti kysymyksen: “Miksi näin?”. Ratkaisu on yksinkertainen, kun havaitaan käytettyjen interpolaatiofunktioiden olevan ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan yleinen ratkaisu. Lineaariset funktiot toteuttavat siis yhtälön

$$-ku'' = 0. \quad (3.55)$$

Tämä havainto pätee yleisemminkin. Mikäli elementin interpolaatiofunktioiksi valitaan funktiot, joista voidaan konstruoida ratkaistavan differentiaaliyhtälön homogeenisen osan täydellinen ratkaisu, saadaan solmupisteissä tarkan ratkaisun arvot riippumatta siitä millainen kuormitusermi f on. Tuloksen on ensimmäisenä havainnut ja todistanut tietävästi P. Tong julkaisussaan [56] vuonna 1969. Selitys miksi homogeenisen osan tarkan ratkaisun toteutuminen riittää yritefunktioille on seuraava. Koska kuorma/lähdetermi diskretoitaessa siirretään pistekuormiksi solmuihin, on elementtimenetelmäratkaisu oikeastaan homogeenisen osan ratkaisua kussakin elementissä erikseen. Mikäli nyt homogeenisen osan tarkka ratkaisu pystytään konstruoimaan interpolaatiofunktioilla, saadaan myös ratkaistavalle ongelmalle tarkat arvot juuri solmupisteissä, eli elementin interpolaatiofunktioit ovat myös tarkan ratkaisun interpolantteja.



Kuva 3.7 Esimerkkiongelman lämpövuon tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kolmea lineaarista elementtiä.

Valitettavasti tätä strategiaa voidaan menestyksellisesti soveltaa vain yksidimensioisiin ongelmiin ja niissäkin usein vain vakioehtoisiin tapauksiin.

Tarkastellaan vielä lämpövuon $q = -ku'$ jakautumista. Käytetyssä elementtimenetelmäaprosimaatiossa tämä suure on nyt vakio kunkin elementin sisällä, eli

$$\tilde{q}^{(e)} = -k^{(e)} \frac{1}{h^{(e)}} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) = \frac{k^{(e)}}{h^{(e)}} (u_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \quad (3.56)$$

Analyttisestä ratkaisusta saadaan lämpövuolle lauseke

$$q(x) = -f_c L \left[\frac{5}{36} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(\ln \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Elementtimenetelmän antamaa aprosimaatiota lämpövuolle on verrattu analyttiseen kuvassa 3.7.

Esimerkki 3.3 Ratkaistaan luvun 2.3 esimerkkiongelmaksi, eli probleema

$$-(ku')' = f, \quad (3.58)$$

reunaehdoilla $u(0) = u_0$ ja $q(L) = -ku'(L) = 0$ ja jossa $k = k(x) = k_0(1 + x/L)$ ja kuormitusermi $f = \beta u k_0 L^{-2}$ on vakio (β on dimensioton vakio).

Materiaaliparametrille k voidaan ottaa elementin alueella lineaaristen interpolatiefunktioiden avulla ilmaistu lauseke

$$k(\xi) = k_1 N_1(\xi) + k_2 N_2(\xi) = \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \xi], \quad (3.59)$$

jossa k_1, k_2 ovat k :n arvot elementin päätepisteissä. Sijoitettaessa tämä elementtimatriisin lausekkeeseen saadaan

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi. \quad (3.60)$$

Käytetään aluksi kahta lineaarista elementtiä. Elementin jäykkyyismatriisiksi saadaan siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Sijoittamalla arvot saadaan kyseisen ongelman elementtien osuuksiksi

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{5k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \frac{7k_0}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL. \quad (3.63)$$

Kokoamalla yhtälöt saadaan systeemi

$$\frac{k_0}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 12 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.64)$$

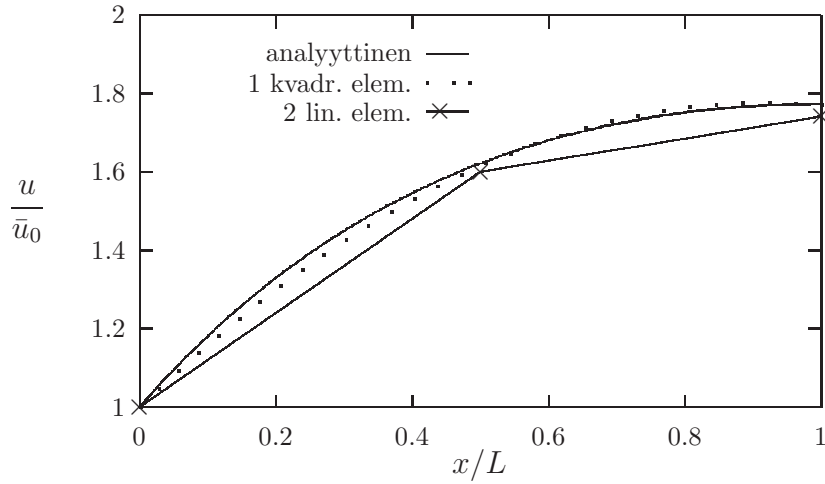
josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{35} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \frac{5}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{3}{10}\beta \\ 1 + \frac{13}{35}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.65)$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8.

Ratkaistaan tehtävä vielä käyttäen yhtä kvadraattista elementtiä. Elementtimatriisin alkiot ovat

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[\frac{1}{2}(2\xi - 1) \right]^2 d\xi = \frac{11k_1 + 3k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{12}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1)(-2\xi) d\xi = -\frac{6k_1 + 2k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2}(2\xi - 1) \frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = \frac{k_1 + k_2}{6h^{(e)}}, \\ K_{22}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] 4\xi^2 d\xi = \frac{8(k_1 + k_2)}{3h^{(e)}}, \\ K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] (-2\xi) \frac{1}{2}(1 + 2\xi) d\xi = -\frac{2k_1 + 6k_2}{3h^{(e)}}, \\ K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left[\frac{1}{2}(1 + 2\xi) \right]^2 d\xi = \frac{3k_1 + 11k_2}{6h^{(e)}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$



Kuva 3.8 Esimerkkiongelman tarkka ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja elementtimenetelmällä laskettu (katkoviiva) käyttäen kahta lineaarista tai yhtä kvadraattista elementtiä. Ratkaisut vakion β arvolla $\beta = 2$.

jossa k_1 ja k_2 ovat k :n arvot elementin päätepisteissä. Elementin kuormitusvektori on vastaavasti

$$f_1^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}, \quad (3.67a)$$

$$f_2^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)d\xi = \frac{2}{3}fh^{(e)}, \quad (3.67b)$$

$$f_3^{(e)} = \frac{1}{2}fh^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)d\xi = \frac{1}{6}fh^{(e)}. \quad (3.67c)$$

Yhtälösystemiksi saadaan

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{17}{6} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{10}{3} & 8 & -\frac{14}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{14}{3} & \frac{25}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} fL = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L}, \quad (3.68)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{9}{104} \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} & 8 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{6} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \right) u_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{4}{13}\beta \\ 1 + \frac{5}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \quad (3.69)$$

Tämäkin ratkaisu on piirretty kuvaan 3.8. Ratkaisu on tietenkin identtinen kuvassa 2.1 olevan Galerkinin menetelmän ratkaisun kanssa. Huomaa, että yhdellä kvadraattisella elementillä laskettaessa saatiin parempi tulos kuin kahdella lineaarisella elementillä.

Lasketaan tehtävä vielä käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkista menettelyä.

Demonstroidaan asiaa käyttämällä vain kvadraattista kuplamuotoa. Interpolatiopolynomit ovat siten

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad N_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1), \quad (3.70)$$

ja niiden derivaatat ξ :n suhteen

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{\sqrt{6}}{2}\xi. \quad (3.71)$$

Koska materiaalivakio (lämmönjohtavuus) k on paikkakoordinaatin funktio, ei hierarkisen muodon ortogonaalisuus (3.30) toteudu. Laskettavana on siten termejä

$$\begin{aligned} K_{13}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = -\frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\ K_{23}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{2} \xi d\xi = \frac{\sqrt{6}(k_2 - k_1)}{6h^{(e)}}, \\ K_{33}^{(e)} &= \frac{2}{h^{(e)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} [k_1 + k_2 + (k_2 - k_1)\xi] \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\xi\right)^2 d\xi = \frac{k_1 + k_2}{h^{(e)}}, \\ f_3^{(e)} &= \frac{1}{2} f h^{(e)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{4} (\xi^2 - 1) d\xi = -\frac{\sqrt{6}}{6} f h^{(e)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Mikäli k muuttuu lineaarisesti, on jäykkyyismatriisi hierarkista kvadraattista muotoa käyttävälle elementille seuraava

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k_1 + k_2}{2h^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha & 2 \end{bmatrix} \quad \text{jossa} \quad \alpha = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, \quad (3.73)$$

vastaten solmupisteparametreja $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, \Delta u_0^{(e)}$. Sijoittamalla probleeman arvot saadaan

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad (3.74)$$

josta ratkaisu on

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta u_0^{(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{3}{13} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \beta + \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix} \right) u_0 \\ &= \begin{Bmatrix} 1 + \frac{5}{13}\beta \\ -\frac{\sqrt{6}}{13}\beta \end{Bmatrix} u_0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Elementin solmun 2 arvo yhtyy tavanomaisella parabolisella elementillä laskettuun tulokseen, kuten pitääkin. Tarkistetaan vielä elementin keskipistessä u :n arvo, joka tulee nyt olemaan

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(\frac{1}{2}L\right) &= N_1(0)u_1 + N_2(0)u_2 + N_3(0)\Delta u_1^{(1)} \\ &= \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{13}\beta\right)u_0 - \frac{\sqrt{6}}{13}\beta u_0 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(1 + \frac{4}{13}\beta\right)u_0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Tämäkin tulos on sama kuin tavanomaisella parabolisella elementillä laskettaessa saatu keskisolmun arvo.

Mainittakoon vielä, että koska interpolaatiopolynomeista ei nyt voida konstruoida ratkaistavan ongelman homogeenisen osan yleistä ratkaisua, eivät solmupiste- arvot ole tarkkoja.

Esimerkki 3.4 *Ratkaise elementtimenetelmällä stationäärinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektioyhtälö*

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad (3.77)$$

kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita. Käytä kolmea lineaarista elementtiä ja suorita ratkaisu Pécletin luvun $P = \rho cvL/k$ arvoilla $P = 10$ ja $P = 100$.

Kerrotaan differentiaaliyhtälö painofunktiolla \hat{u} ja integroidaan alueen yli. Painofunktioiden on toteutettava homogeeniset reunaehdot, sillä funktion u arvot on annettu kummassakin päässä. Suoritetaan ns. diffuusiotermin osittaisintegointi, jossa sijoitustemi häviää painofunktiolta vaadittavien reunaehto- jen perusteella, eli

$$\begin{aligned} -k \int_0^L \hat{u}(x)u''(x)dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x)u'(x)dx &= \int_0^L \hat{u}(x)f dx, \\ \Rightarrow k \int_0^L \hat{u}'(x)u'(x)dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}(x)u'(x)dx &= \int_0^L \hat{u}(x)f dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Elementtimenetelmässä otaksutaan elementin alueella interpolaatio

$$u = \sum_i N_i u_i, \quad (3.79)$$

ja Galerkinin keinossa painofunktiolle valitaan sama kanta, eli $\hat{u}_i = N_i$. Teh- tävän variaatiomuodossa on korkeintaan ensimmäisen kertaluvun derivaattoja, joten C_0 -jatkuvuus on riittävä. Lineaariset interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.80)$$

Siirretään tarkastelu elementin alueella paikalliseen ξ -koordinaatistoon, jolloin on huomattava, että

$$dx = \frac{h}{2}d\xi \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dx} = \frac{2}{h} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.81)$$

missä h on elementin pituus. Täten elementin jäykkyySMatriisille ja kuorma- vektorille saadaan kaavat

$$K_{ij}^{(e)} = k \int_{x_1}^{x_2} N_{i,x} N_{j,x} dx + \rho cv \int_{x_1}^{x_2} N_i N_{j,x} dx \quad (3.82)$$

$$= \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi + \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi, \quad (3.83)$$

$$f_i^{(e)} = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 N_i f d\xi, \quad (3.84)$$

jossa pilkku symbolin oikeassa yläkulmassa merkitsee nyt derivointia paikallisen ξ -koordinaatin suhteen. Merkitään jäykkyysmatriisin osia

$$A_{ij} = \frac{2k}{h} \int_{-1}^1 N'_i N'_j d\xi, \quad B_{ij} = \rho cv \int_{-1}^1 N_i N'_j d\xi. \quad (3.85)$$

\mathbf{A} matriisi on jo entuudestaan tuttu, ja se on

$$\mathbf{A} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Matriisi \mathbf{B} saadaan integroimalla termit

$$\begin{aligned} B_{11} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{12} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{21} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)(-\frac{1}{2})d\xi = -\rho cv \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1+\xi)d\xi = -\frac{1}{2}\rho cv, \\ B_{22} &= \rho cv \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}d\xi = \frac{1}{2}\rho cv. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Elementin jäykkyysmatriisi on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Huomaa, että kulkeutumistermiä vastaava elementtimatriisi \mathbf{B} ei riipu elementin pituudesta.

Tehtävässä pyydettiin jakamaan alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin, joten $h = L/3$ ja kaikilla elementeilla on sama jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.89)$$

Otetaan käyttöön dimensioton Pécletin luku $P = \rho cvL/k$, josta $k/L = \rho cv/P$, jolloin elementtien jäykkyysmatriisiksi saadaan

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{3\rho cv}{P} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = 1, 2, 3. \quad (3.90)$$

Koko rakenteen yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \end{Bmatrix}. \quad (3.91)$$

Ratkaistaan tehtävä ensin Pécletin luvulla $P=1$. Yhtälöryhmäksi saadaan

$$\rho cv \begin{bmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.92)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = \frac{34}{327}fL/\rho cv \approx 0.1040fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{40}{327}fL/\rho cv \approx 0.1223fL/\rho cv$.

Vastaavasti Péceletin luvulla $P = 10$ yhtälöryhmä on

$$\frac{\rho cv}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.93)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = \frac{10}{39}fL/\rho cv \approx 0.2564fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{35}{39}fL/\rho cv \approx 0.8974fL/\rho cv$.

Péceletin luvulla $P = 100$ kulkeutuminen eli konvektio dominoi ratkaisua ja yhtälöryhmäksi saadaan

$$\frac{\rho cv}{100} \begin{bmatrix} 6 & 47 \\ -53 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} fL, \quad (3.94)$$

josta ratkaisuksi saadaan $u_2 = -\frac{4100}{7581}fL/\rho cv \approx -0.5408fL/\rho cv$ ja $u_3 = \frac{5900}{7581}fL/\rho cv \approx 0.7783fL/\rho cv$.

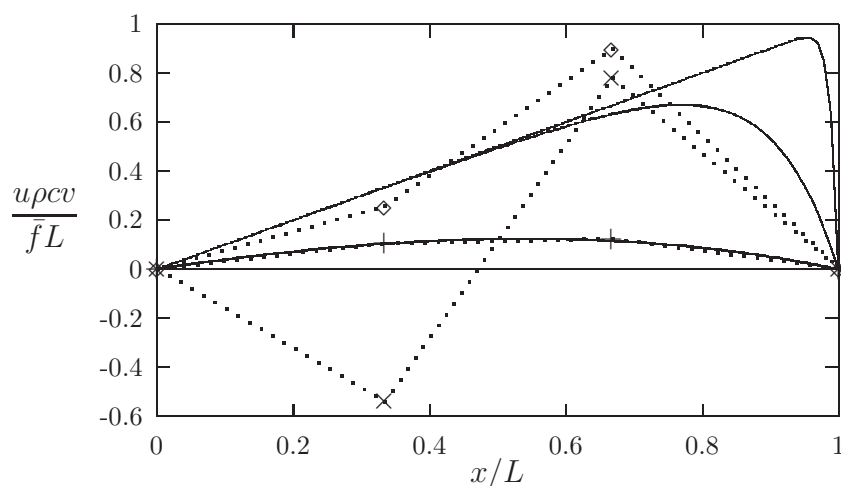
Ratkaisu alkaa siten heittelehtiä, eli numeerinen ratkaisumenetelmä on epästabili kyseiselle tehtävälle suurilla Péceletin luvun arvoilla. Edellä esitetyt elementtimenetelmäratkaisut on piirretty analyttisten ratkaisujen kanssa kuvaan 3.9.

Ratkaisun epästabilius voidaan välttää käyttämällä reunahäiriön luona tiheämpää elementtiverkkoa, tai ottamalla käyttöön erilaiset painofunktiot, jotka ottavat huomioon tehtävän luonteen. Tätä selvitetään seuraavassa kappaleessa.

3.4 Diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu

Kuten esimerkkinä lasketusta yksidimensioisesta diffuusio-konvektioyhtälöstä havaitaan, toimii standardi elementtimenetelmäformulaatio (eli Galerkinin menetelmä) huonosti, kun konvektion osuus on hallitseva diffuusion verrattuna. Ongelmalle on esitetty useita parannusehdotuksia ja seuraavassa tarkastellaan esimerkinomaisesti keinotekoisien diffuusion lisäämistä yhtälöön, joka on ekvivalentti toispuoleisen (ylävirta) differenssimenetelmän soveltamiseen ongelman aiheuttavaan konvektiotermiin. Samalla tuodaan esille elementtimenetelmän ja differenssimenetelmän välinen yhteys kyseisessä esimerkkit tehtävässä.

Tarkastellaan nyt elementtimenetelmällä muodostettuja diskreettejä yhtälöitä. Otaksutaan, että ratkaisualue on jaettu yhtäpitkiin lineaarisesti interpoloituihin ele-



Kuva 3.9 Tasavälisellä kolmen lineaarisen elementin verkolla ratkaistu diffuusio-konvektioyhtälö Pécletin luvun arvoilla $P = \rho cvL/k = 1, 10, 100$. Analyytiset ratkaisut on piirretty kuvaan yhtenäisellä viivalla.

mentteihin, joiden pituus olkoon h . Systemin tasapainoyhtälö on siten muotoa

$$\left(\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \frac{\rho cv}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} = fh \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (3.95)$$

Täten mielivaltaista sisäpistettä i vastaava yhtälö on muotoa

$$\frac{k}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.96)$$

jossa vasemmanpuoleinen sulkulauseke on operaattorin $-d^2/dx^2$ keskeisdifferenssiaprossimaatio ja oikeanpuoleinen sulkulauseke vastaavasti keskeisdifferenssiaprossimaatio operaattorille d/dx . Johtopäätöksenä voitaisiin siten todeta tavanomaisen elementtimenetelmän ottavan huomosti huomioon kyseisen ongelman erityispiirteen, eli kulkeutumisen. Kun kulkeutuminen eli konvektio on hallitseva johtumiseen eli diffuusioon verrattuna ($\rho cv \gg k/h$), ei alavirran puolella olevien pisteiden $i+1, i+2, \dots$ merkitys ratkaisuun ole tietenkään sama kuin ylävirran puoleisten pisteiden $\dots, i-2, i-1$, sillä "informaatio" tulee ylävirran suunnasta. Jotta asia korjaantuisi ja numeeriseen ratkaisumenetelmään saataisiin enemmän painotusta ylävirran puolelle, lienee soveliaista käyttää konvektiotermin toispuoleista differenssilauseketta

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}), \quad (3.97)$$

tai jollain tavalla kombinoitua versiota keskeis- ja ylävirtadifferenssilausekkeista

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{\alpha}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1-\alpha}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad (3.98)$$

jossa $\alpha \in [0, 1]$ on parametri, jonka optimaalinen arvo arvattavastikin riippuu Péceltin luvusta P . Optimaalisella arvolla voidaan tässä yhteydessä tarkoittaa arvoa, joka tekee numeerisesta menetelmästä stabiilin (ei heilahteluja) sekä on kyseisellä interpolaatiolla mahdollisimman tarkka.

Ylävirtadifferenssilauseke (3.97) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.99)$$

eli ensimmäisen derivaatan keskeisdifferenssilausekkeeksi ja verkkoparametrissa h riippuvan toisen kertaluvun differentiaalioperaattorin

$$-\frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.100)$$

keskeisdifferenssilausekkeiden summaksi. Differenssikaava (3.98) voidaan vastaavasti kirjoittaa muodossa

$$\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{\alpha}{2h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}), \quad (3.101)$$

jolloin alkuperäinen differenssiyhtälö (3.96) muuntuu muotoon

$$\frac{k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) + \frac{\rho cv}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f, \quad (3.102)$$

joka siis vastaisi keskeisdifferenssimenetelmän tai tavanomaisen elementtimenetelmän soveltamista yhtälöön

$$-(k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh)u'' + \rho cvu' = f. \quad (3.103)$$

Toisin sanoen ylävirtapainotus metkitsee tavanomaisen elementtimenetelmän painofunktiolla keinotekoisen diffuusion lisäämistä, eli lämmönjohtavuuden lauseketta kasvatetaan verkkoparametrissa h riippuvalla lausekkeella: $k \rightarrow k + \frac{1}{2}\alpha\rho cvh$. Yhtälöstä (3.103) voidaan havaita siihen perustuvan numeerisen menetelmän olevan konsistentti alkuperäisen differentiaaliyhtälön

$$-ku'' + \rho cvu' = f \quad (3.104)$$

kanssa, eli elementtiverkkoa tihennettäessä ($h \rightarrow 0$) yhtälö (3.103) lähestyy yhtälöä (3.104).

Analysoidaan nyt hieman differenssilausekkeita (3.96) ja (3.98). Aloitetaan lausekkeesta (3.96) johon sijoitetaan yrite $u_i = \lambda^i$. Kahden vierekkäisen pisteen i ja $i + 1$ lausekkeet ovat siten

$$\begin{aligned} -\lambda^{i+1} + 2\lambda^i - \lambda^{i-1} + \frac{\rho cvh}{2k}(\lambda^{i+1} - \lambda^{i-1}) &= \frac{fh^2}{k}, \\ -\lambda^{i+2} + 2\lambda^{i+1} - \lambda^i + \frac{\rho cvh}{2k}(\lambda^{i+2} - \lambda^i) &= \frac{fh^2}{k}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Vähennetään alempi lauseke ylemmästä ja merkitään diskreettiä Pécletin lukua $P_h = \rho cvh/k$, jolloin jakamalla puolittain termillä λ^{i-1} saadaan yhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^3 + (\frac{1}{2}P_h - 3)\lambda^2 + (\frac{1}{2}P_h + 3)\lambda - (1 + \frac{1}{2}P_h) = 0. \quad (3.106)$$

Helposti havaitaan yhden juurista olevan $\lambda = 1$, jolloin jäljelle jää polynomiyhtälö

$$(1 - \frac{1}{2}P_h)\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \frac{1}{2}P_h = 0, \quad (3.107)$$

jonka juuret ovat $\lambda = 1$ ja $\lambda = (1 + \frac{1}{2}P_h)/(1 - \frac{1}{2}P_h)$. Jotta numeerisessa ratkaisussa ei esiintyisi epäfysikaalista oskillointia on kaikkien juurien oltava positiivisia, joten saadaan ehtoyhtälö

$$P_h < 2 \quad \implies \quad h < \frac{2k}{\rho cv} \quad \implies \quad \frac{h}{L} < \frac{2k}{\rho cvL} = \frac{2}{P}. \quad (3.108)$$

Esimerkkimme tapauksessa $P = 10$ saavutettaisiin heilahtelematon ratkaisu käyttämällä vahintään viittä elementtiä.

Ylävirtapainotteisen differenssilausekkeen (3.98) tapauksessa analyysi on aivan vastaava; korvataan vain P_h lausekkeella $P_h/(1 + \frac{1}{2}\alpha P_h)$, jolloin saadaan ehtoyhtälö

$$\frac{P_h}{1 + \frac{1}{2}\alpha P_h} < 2 \quad \implies \quad \alpha > 1 - \frac{2}{P_h}, \quad \alpha_{cr} = 1 - \frac{2}{P_h}. \quad (3.109)$$

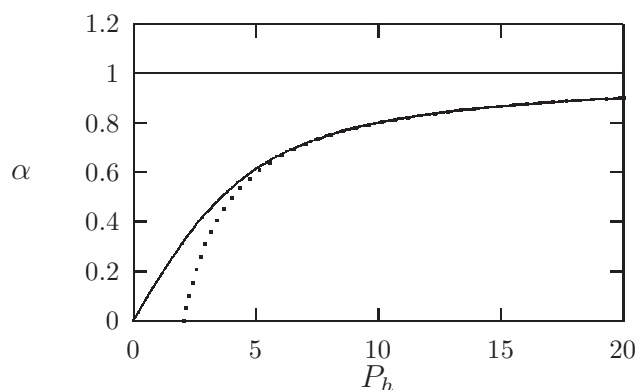
Mikäli nyt α -parametri valitaan oheisen epäyhtälön mukaisesti, saadaan kaikilla verkontiheyksillä stabiili ratkaisu.

Voidaan osoittaa, että valitsemalla

$$\alpha_{opt} = \coth(\frac{1}{2}P_h) - \frac{2}{P_h} \quad (3.110)$$

saadaan kyseisen vakiokertoimisen yksidimensioisen diffuusio-konvektioyhtälön (3.104) tapauksessa u :lle solmupisteissä tarkka ratkaisu. Parametrin α kriittinen (3.109) ja optimaalinen arvo (3.110) on piirretty kuvaan 3.10 diskreetin Pécletin luvun funktiona.

Useampiulotteisessa tapauksessa on keinotekoista diffuusiota lisättävä vain virtauksen suunnassa. Tällöin ei numeeriseen menetelmään aiheuteta ns. valediffuusiota virtausta vastaan kohtisuorassa suunnassa. Galerkinin menetelmää voidaan systemaattisesti soveltaa, mikäli painofuntiot valitaan ylävirtapainotteisesti kuvan 3.11



Kuva 3.10 Keinotekoisien diffuusion voimakkuuden määräävän parametrin kriittisen ($\alpha_{cr} \dots$) ja optimaalisen arvon (α_{opt} —) riippuvuus diskreetistä Pécletin luvusta P_h .

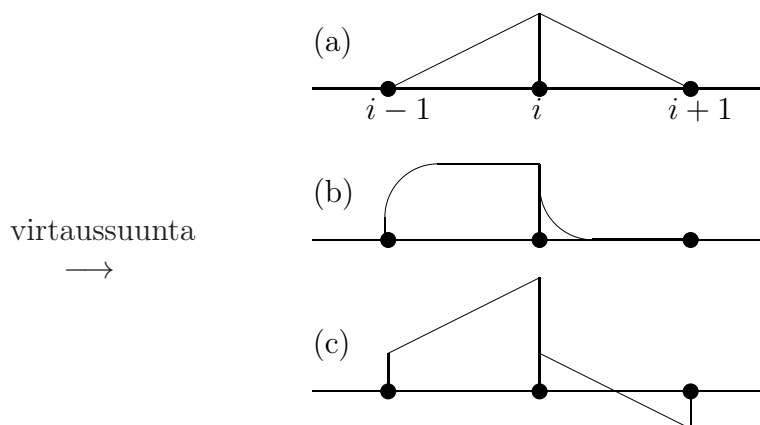
mukaisesti, jolloin puhutaan Petrovin-Galerkinin menetelmästä erotukseksi tavanomaisesta Galerkinin menettelystä, jota nimitetään Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi.¹ Konvektio-diffuusioyhtälön tapauksessa hyvin toimivan menettelyn nimi koko komeudessaan olisi: virtaviiva-ylävirta-Petrov-Galerkin (engl. SUPG = Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin) menetelmä.² Kuvassa keskellä esiintyvät painofunktiot voidaan laskentateknisesti korvata helpommilla *epäjatkuvilla* painofunktioilla. Tällöin joudutaan elementtien reunoilla tapahtuvat painofunktioiden hyyt ottamaan huomioon ratkaisuyhtälöissä. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan tutustumista artikkeleihin [43], [54] ja niiden lähdeviitteisiin.

Epäyhtälöstä (3.109) havaitaan, että menetelmä on aina stabiili mikäli valitaan $\alpha = 1$. Tämä on järkevää ainoastaan hyvin suurilla Pécletin luvun arvoilla, sillä kyseinen tapaus vastaa toispuoleisen differenssiosamäärän käyttöä, joka on tarkkuudeltaan vain ensimmäistä kertalukua (keskeisdifferenssimenetelmän tarkkuus on toista kertalukua) Tämän voi lukija todeta laskemalla esimerkkitehtävän Pécletin luvun arvolla $P = 1$ käyttämällä keinotekoista diffuusiota ja parametrin arvoa $\alpha = 1$ ja vertaamalla laskettuihin standardin Galerkinin menetelmän antamiin tuloksiin.

Mainittakoon vielä, että diffuusio-konvektioyhtälöön, jonka vakiokertoaminen yksidimensioiden muoto on esitetty yhtälössä (3.104), ei voida liittää fysikaalisesti mielekästä funktionaalia, jolla olisi minimiominaisuus ja jonka Eulerin yhtälö se olisi.

¹I.G. Bubnov (1879-1919): Venäläinen insinööri, joka sovelsi painotettujen jäännösten menettelyä elastisuusteorian yhtälöiden likiratkaisuun 1913 ja menettelyn yleisti Pietarissa vaikuttanut B.G. Galerkin (1871-1945) vuonna 1915. G.I. Petrov (1912-?) yleisti Galerkinin menettelyä 1940 siten, että painofunktiona voidaan käyttää eri funktioita kuin interpolaatiosfunktioina.

²Kutsutaan myös virtaviivadiffuusiomenetelmäksi.



Kuva 3.11 Solmuun i liittyvät (a) tavanomaisen Galerkinin menetelmän painofunktiot, (b) Petrovin-Galerkinin menetelmän optimaaliset painofunktiot ja (c) laskentateknisesti edulliset Petrovin-Galerkinin menetelmän epäjatkuvat painofunktiot.

3.5 Stabiloidut formulaatiot

Petrovin-Galerkinin keinossa painofunktioita muuttamalla saadaan diffuusio-konvektioyhtälön numeerinen ratkaisu stabiiliksi. Toinen tapa on täydentää standardi Galerkinin (Bubnov-Galerkin) menetelmää sopivilla funktioilla, jotka tässä esityksessä rajataan vain lokaaleiksi, kunkin elementin sisällä vaikuttaviksi polynomeiksi.

Diffuusio-konvektioyhtälön numeerisen ratkaisun ongelmat esiintyvät, kun ratkaisun luonnetta hallitsee konvektio. Tällöin ratkaisussa voi esiintyä hyvin pienille alueille keskittyviä reunahäiriöitä. Toisin sanoen ratkaisun luonnetta karakterisoi kaksi mittaskaalaa, pitkän skaalan pituus on ratkaisualueen dimension luokkaa $\sim L$ ja lyhyen, reunahäiriön leveys vain $\sim L \ln P/P$, katso esimerkkiä 1.1. Voidaan päätellä, että mikäli elementin koko on paljon ratkaisulle olennaista reunahäiriön mittaskaalaa pienempi, ei standardi Galerkinin keino pysty sitä kunnolla ratkaisemaan.

Stabiloiduissa formulaatioissa tuo ”ratkaisematon” mittaskaala pyritään vangitsemaan paikallisesti elementin alueella määritellyillä kuplamuodoilla. Tarkastellaan stationääristä diffuusio-konvektioyhtälöä (1.40):

$$-ku'' + \rho cvu' = f, \quad u(0) = u(L) = 0, \quad (3.111)$$

ja symbolien merkitys on kuten esimerkeissä 1.1 ja 3.4. Merkitään kenttäyhtälön jäännöstä eli residuaalia symbolilla R , eli

$$R(u) \equiv -ku'' + \rho cvu' - f, \quad (3.112)$$

joka tietenkin häviää identtisesti mikäli u on yhtälön (1.40) ratkaisu. Stabiloitu

formulaatio saadaan kun alkuperäiseen heikkoon muotoon

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.113)$$

lisätään sopivasti painotettu jäännös- eli residuaalitermi, esimerkiksi

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau (-k \hat{u}'' + \rho cv \hat{u}') R(\tilde{u}) dx = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.114)$$

missä τ on ns. stabilointi tai viritysparametri. Summalauseke korostaa termien elementtikohtaisuutta ja käytettäessä esimerkiksi lineaarisia interpolaatiofunktioita on $\hat{u}'' = \tilde{u}'' \equiv 0$ kunkin elementin alueella.

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkintä

$$L(u) = -ku'' + \rho cv u' \quad (3.115)$$

diffuusio-konvektioyhtälön operaattorille, voidaan variaatioformulaation (3.114) stabilointitermi kirjoittaa muodossa

$$S = \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx. \quad (3.116)$$

Toinen yhtä mahdollinen vaihtoehto olisi

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \tau L^*(\hat{u}) R(\tilde{u}) dx, \quad (3.117)$$

missä L^* tarkoittaa operaattorin L adjunganttia, eli diffuusio-konvektioyhtälön (1.40) tapauksessa $L^*(u) = -ku'' - \rho cv u'$.

Variaatiomuoto (3.114) voidaan kirjoittaa muodossa

$$k \int_0^L \hat{u}' \tilde{u}' dx + \rho cv \int_0^L \hat{u} \tilde{u}' dx + S = \int_0^L \hat{u} f dx, \quad (3.118)$$

missä stabilointitermi S on joko yhtälön (3.116) tai (3.117) mukainen. Täten standardi Galerkinin menetelmään vain lisätään "sopivia" termejä.

Tarkastellaan seuraavassa miten edellä esitettyihin stabiloituihin formulaatioihin päädytään rikastuttamalla elementtiapproksimaatiota \tilde{u} elementtikohtaisilla kuplamuodoilla, sekä miten stabilointiparametrin τ arvo voidaan määrittää.

Lisätään lineaariseen interpolaatiofunktioiden muodostamaan yritefunktioon elementtikohtaiset kuplamuodot, joten approksimaatio on

$$\tilde{u} = u_L + u_B, \quad (3.119)$$

missä alaindeksi L viittaa interpolaation lineaariseen ja B kuplamuoto-osaan. Sijoitetaan yrite (3.119) Galerkinin variaatiomuotoon (3.113), jolloin saadaan

$$k \int_0^L (\hat{u}'_L + \hat{u}'_B)(u'_L + u'_B) dx + \rho cv \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B)(u'_L + u'_B) dx = \int_0^L (\hat{u}_L + \hat{u}_B) f dx. \quad (3.120)$$

Koska testifunktiot ovat mielivaltaisia homogeeniset reunaehdot toteuttavia funktioita, valitaan ensin $\hat{u}_L = 0$, jolloin ryhmittelemällä saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k\hat{u}'_B u'_B + \rho cv \hat{u}_B u'_B) dx &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}_B f - k\hat{u}'_B u'_L - \rho cv \hat{u}_B u'_L) dx \\ &= \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B (f + k u''_L - \rho cv u'_L) dx \\ &= - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} \hat{u}_B R(u_L) dx. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Tämä voidaan ratkaista kuplamuotojen u_B suhteen, ja merkitään ratkaisua symbolisesti

$$u_B = M_B(f - Lu_L), \quad (3.122)$$

missä M_B on lineaarinen operaattori. Sijoittamalla ratkaisu (3.122) heikkoon muotoon (3.120) ja asettamalla nyt $\hat{u}_B = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} k \int_0^L \hat{u}'_L u'_L dx + \rho cv \int_0^L \hat{u}_L u'_L dx &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (\hat{u}'_L u'_B + \rho cv \hat{u}_L u'_B) dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} (k\hat{u}''_L + \rho cv \hat{u}'_L) u_B dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [f - L(u_L)] dx \\ &= \int_0^L \hat{u}_L f dx + \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Havaitaan, että saadaan muotoa (3.117) oleva stabilointitermi ja että stabilointiparametri τ määräytyy jollain tavalla operaattorista M_B .

Mikä on operaattori M_B ? Tarkastelemalla kuplamuodon ratkaisuyhtälöä (3.121), joka on siis

$$-k u''_B + \rho cv u'_B = -(L(u_L) - f), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.124)$$

reunaehdoilla $u_B(x_1^{(e)}) = u_B(x_2^{(e)}) = 0$. Havaitaan, että M_B määrittelee diffuusio- konvektioyhtälön Greenin funktion $G(x, \xi)$ elementin alueella.

Elementtikohtaisen kuplamuodon ratkaisu voidaan siten kirjoittaa Greenin funktion $G(x, \xi)$ avulla seuraavasti

$$u_B^{(e)}(x) = \int_{I^{(e)}} G^{(e)}(x, \xi) [f - L(u_L(\xi))] d\xi. \quad (3.125)$$

Elementtikohtainen Greenin funktio on taas diffuusio-konvektioyhtälön ratkaisu pistemäiselle lämmönlähteelle kohdassa $\xi \in I^{(e)}$:

$$-kG''(x, \xi) + \rho cv G'(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad \text{alueessa } I^{(e)} \quad (3.126)$$

homogeenisin reunaehdoin $G^{(e)}(x_1^{(e)}, \xi) = G^{(e)}(x_2^{(e)}, \xi) = 0$.

Tarkastellaan elementin (e) osuutta stabilointitermiin

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.127)$$

yksityiskohtaisesti. Käytettäessä lineaarisia interpolaatiofunktioita pätee

$$R(u_L) = \rho cv u'_L - f = f_1 = \text{vakio}, \quad (3.128a)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv \hat{u}'_L = f_2 = \text{vakio}, \quad (3.128b)$$

jolloin stabilointitermistä saadaan

$$S^{(e)} = -f_2 \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx = - \int_{I^{(e)}} f_2 dx \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx \quad (3.129)$$

jolloin vertaamalla tätä muotoon (3.117) saadaan

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} M_B(f_1) dx. \quad (3.130)$$

Yhtälön (3.124) mukaan seuraa siis

$$M_B(f_1) = b^{(e)}, \quad (3.131)$$

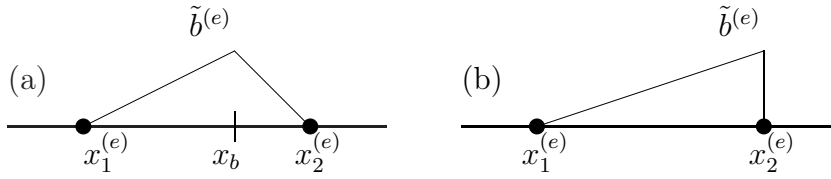
missä $b^{(e)}$ on ratkaisu elementtikohtaiselle probleemalle

$$-k(b^{(e)})'' + \rho cv(b^{(e)})' = f_1, \quad b^{(e)}(x_1^{(e)}) = b^{(e)}(x_2^{(e)}) = 0. \quad (3.132)$$

Stabilointiparametrin arvo saadaan siten kuplan $b^{(e)}$ integraalina

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx. \quad (3.133)$$

Ensi näkemältä stabilointiparametrin (3.133) ratkaisu tuntuu yhtä työläältä kuin alkuperäisen ongelman ratkaisukin. On kuitenkin huomattava, että stabilointiparametrin arvon laskennassa tarvitaan vain kuplamuodon integraalia, ja sitä varten voidaan elementtikohtainen ongelma (3.132) ratkaista likimääräisesti. Yhtälön (3.124)



Kuva 3.12 Näennäisesti jäännöksetön kuplamuotoehdokas.

toteuttavaa kuplamuotoa sanotaan *jäännöksettömäksi* kuplamuodoksi ja sen yhtälön (3.132) likimääräistä kuplamuotoa \tilde{b} *näennäisesti jäännöksettömäksi* (englanniksi “pseudo residual-free bubble”).

Ongelmana on nyt miten valita sopiva kuplamuoto. Otetaan kuplamuodoksi hattufunktio \tilde{b} , jonka huippu asetetaan pisteeseen $x_b \in (x_1^{(e)}, x_2^{(e)})$, katso kuvaa 3.12. Määritellään $\tilde{b} = \beta B$, missä B on hattufunktio, joka saa arvon 1 pisteessä x_b . Ongelmana on nyt määrittää parametri β ja kuplamuodon huipun paikkakoordinaatti x_b .

Tarkastellaan nyt vain konvektion dominoimaa tilannetta jolloin elementin Pécletin luku on suuri: $P_h = \rho cv h/k \gg 1$. Tällöin voidaan yhtälöstä (1.40) diffuusiotermin pudottaa pois miltei koko alueella. Rajatapauksenahan saadaan puhdas konvektioyhtälö, jonka ratkaisu reunaehtolla $u(x_1^{(e)}) = 0$ on $u(x) = fx/(\rho cv)$, ja tätä vastaava kuplamuoto olisi kolmio, jossa reunalla $x_2^{(e)}$ on hyppy, katso kuvaa 3.12b.

Stabilointiparametrin (3.133) arvoksi saadaan

$$\tau = \frac{1}{h^{(e)}} \int_{I^{(e)}} b^{(e)} dx = \frac{f_1}{2\rho cv}. \quad (3.134)$$

Tutkitaan nyt millaisen muutoksen variaatiomuodon (3.118) stabilointitermi (3.127)

$$S = - \sum_{e=1}^n \int_{I^{(e)}} L^*(\hat{u}_L) M_B [R(u_L)] dx \quad (3.135)$$

tuottaa standardiformulaatioon nähden. Kirjoitetaan residuaalin ja adjungantin lausekkeet (3.128a) uudelleen näkyviin:

$$R(u_L) = \rho cv u'_L - f = f_1 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f, \quad (3.136)$$

$$L^*(\hat{u}_L) = -\rho cv \hat{u}'_L = f_2 = \text{vakio} = \rho cv \frac{u_1^{(e)} - u_2^{(e)}}{h^{(e)}}. \quad (3.137)$$

Elementtikohtainen stabilointitermi on siten

$$S^{(e)} = -\frac{1}{2} \left(\hat{u}_1^{(e)} - \hat{u}_2^{(e)} \right) \left(\rho cv \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{h^{(e)}} - f \right) h^{(e)} \quad (3.138)$$

Stabilointitermillä on täten vaikutus niin elementin jäykkyyssmatriisiin kuin elementin kuormavektoriinkin:

$$\begin{aligned} S^{(e)} &= \frac{1}{2}\rho cv \left(\hat{u}_2^{(e)} - \hat{u}_1^{(e)} \right) \left(u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right) + \frac{1}{2}h^{(e)} f \left(\hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right) \\ &= \frac{1}{2}\rho cv \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^{(e)} \\ \hat{u}_2^{(e)} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}h^{(e)} f \left(\hat{u}_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right), \end{aligned} \quad (3.139)$$

missä $P_h = \rho cv h^{(e)} / k$ elementin Pécletin luku. Täten tulos vastaa toispuoleisen differenssimenetelmän käyttöä konvektiotermille, eli α parametrin arvoa $\alpha = 1$ yhtälöissä (3.98) ja (3.103). Menetelmä on siten hyvin stabiili, mutta mikäli diffuusion osuus on merkittävä, ei tarkkuus ole paras mahdollinen. Tällöin kuplamuodon ratkaisussa ei diffuusiotermejä voi unohtaa.

Yhtälö (3.132) voidaan yksidimensioisessa ja vakiokertoimisessa tapauksessa ratkaista analyttisesti. Tällöin stabilointiparametrille saadaan lauseke

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{2\alpha} \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{missä} \quad \alpha = \frac{\rho cv h^{(e)}}{2k}, \quad (3.140)$$

tai elementin Pécletin luvun P_h avulla ilmaistuna

$$\tau = \frac{h^{(e)}}{P_h} \left(\coth \frac{1}{2}P_h - \frac{2}{P_h} \right) \quad \text{missä} \quad P_h = \frac{\rho cv h^{(e)}}{k} \quad (3.141)$$

3.6 Yhteenveto

Luvussa käsiteltiin yksidimensioisessa tapauksessa elementtimenetelmän rakenneosat. Elementtimenetelmän perustana olevan interpolaation konstruointiseksi esitettiin sekä tavanomainen solmuihin sidottu että hierarkinen kantafunktiojärjestelmä. Solmuihin sidottu kantafunktiojärjestelmä toimii perustana ns. elementtimenetelmän h -versiossa, jossa ratkaisun parantaminen tapahtuu elementtien lukumäärää lisäämällä, eli pienentämällä elementin kokoa h . Hierarkinen kantafunktiojärjestelmä on pohjana p -elementtimenetelmässä, jossa ratkaisun parantaminen tapahtuu pääsääntöisesti interpolaatiopolynomien astetta p korottamalla. Hierarkisessa kantafunktiojärjestelmässä interpolaation asteen korottaminen ei vaikuta alhaisasteisempiin kantafunktioihin, toisin kuin solmuihin sidotussa järjestelmässä.

Elementtimenetelmän ongelmatapauksista esitellään diffuusio-konvektioyhtälö, jossa toimiva elementtiaprosimaatio saadaan muuttamalla painofunktioita siten, että probleeman luonne tulee paremmin huomioon otetuksi. Lisäksi esitetään stabiloitujen elementtimenetelmien perusteet.

3.7 Harjoitustehtäviä

1. Suorita esimerkin funktion $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ interpolaation etsintä käyttäen Legendren polynomeja $P_n(x)$.

2. Osoita interpolaatiofunktioiden rekursiokaava (3.27) paikkansa pitäväksi.
3. Totea polynomien $\psi_2(\xi), \psi_3(\xi), \psi_4(\xi)$ (3.21) ortogonaalisuusominaisuus (3.30).
4. Johda palautuskaava interpolaatiofunktioiden ψ_j derivaatoille.
5. Ratkaise esimerkkitehtävä 3.4 käyttäen yhtä elementtiä ja hierarkisia interpolaatiofunktioita aina neljänteen asteeseen saakka.
6. Ratkaise esimerkkitehtävä 3.4 käyttäen kolmea lineaarista elementtiä. Konstruoi elementtiverkko siten, että reunahäiriökohtaan tulevan elementin pituus on häiriövyöhykkeen luokkaa, kaksi muuta elementtiä voivat olla yhtäpitkiä.
7. Ratkaise stationaarinen 1-dimensioinen diffuusio-reaktioyhtälö

$$-ku'' + cu = 0, \quad u(0) = 0, u(L) = \bar{u}_L,$$

kun k, c ovat positiivisia vakioita $c = \beta^2 k L^{-2}$ elementtimenetelmällä, jakamalla alue kolmeen yhtäpitkään lineaariseen elementtiin. Suorita laskelmat β :n arvoilla 1 ja 100. Suorita laskelmat myös käyttäen jäykkyysmatriisin termille

$$\int \hat{c} u u dx$$

lumpattua muotoa. Matriisin luppauksella tarkoitetaan seuraavaa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} + a_{22} \end{bmatrix}.$$

Mitä voit sanoa tuloksista?

8. Ratkaise stationaarinen 1-dimensioinen diffuusio-konvektioyhtälö

$$-ku'' + \rho cv u' = f, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

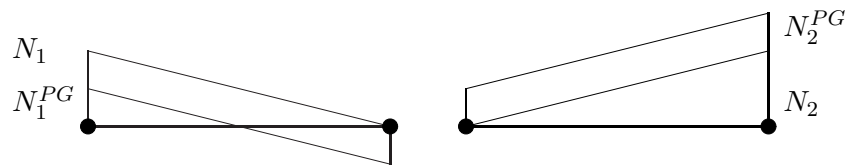
kun k, ρ, c, v ja f ovat positiivisia vakioita. Ratkaise tapaus jossa suhde $P = \rho cv L / k = 100$ seuraavilla keinoilla (käytä lineaarisia interpolaatiofunktioita):

- (a) Käytä standardi elementtimenetelmää (Bubnov-Galerkin) ja jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin.
- (b) Kuten edellä, mutta jaa alue kolmeen elementtiin siten, että reunahäiriön kohdalle oikeaan reunaan tulee kaksi $5L/100$:n pituista elementtiä.
- (c) Jaa alue kolmeen yhtäpitkään elementtiin ja käytä ylävirtapainotteisia painofunktioita eli ns. Petrovin-Galerkinin menetelmää. Petrovin-Galerkinin menetelmän painofunktiot määritellään seuraavasti:

$$w_{PG} = w + \frac{1}{2} \alpha h w_{,x}$$

missä w on tavanomainen painofunktio ja vakio α määritellään lausekkeella

$$\alpha = \begin{cases} P_h/6 & \text{kun } P_h \leq 6, \\ 1 & \text{kun } P_h > 6, \end{cases} \quad P_h = \frac{\rho cv h}{k}.$$



Mitä voit sanoa tuloksista?

9. Kuinka moneen tasapituiseen lineaariseen elementtiin ratkaisualue olisi jaettava jotta standardi Galerkinin menetelmällä saataisiin heilahtelematon tulos edellisessä tehtävässä?
10. Toista edelliset tehtävät käyttäen kvadraattista elementtiä.
11. Näytä, että ratkaisemalla kuplamuoto $b^{(e)}$ analyttisesti yhtälöstä (3.132) päädytään stabilointitermiin, joka on ekvivalentti optimaalisen ylävirtapainotuksen kanssa (3.110).