Luku 2
Variaatioperiaatteet

Luvun tarkoituksena on antaa perustiedot variaatiolaskennasta. Tämän luentomonisteen kannalta variaatioperiaatteiden tärkein ominaisuus on mahdollisuus likiratkaisujen muodostamiseen. Variaatiomenetelmillä on myös muita hyviä ominaisuuksia: (i) varioitavalla funktiolla on usein selkeä fysikaalinen merkitys, (ii) se on invariantti koordinaatistomuunnosten suhteen, (iii) ne mahdollistavat usein jonkin suureen ylä- ja alarajaratkaisut ja (iv) ne mahdollistavat ongelman muuntamisen toiseksi ekvivalentiksi ongelmaksi, joka on ehkä helpommin ratkaistava (Legendren-Fenchelin muunnos).

2.1 Variaatiolaskennan perusteita

Differentiaalilaskennan perustoimitus on yhden tai useamman muuttujan funktion ääriarvon etsintä ja funktion ominaisuuksien tutkiminen ääriarvon läheisyydessä. Päätelmiä ääriarvon luonteesta ja funktion käyttäytymisestä tehdään tutkimalla funktion derivaattoja mahdollisessa ääriarvopisteessä. Variaatiolaskennan perustehtävä on löytää funktio, joka antaa ääriarvon ns. funktionaalille eli kuvaukselle, joka liittää reaaliluvun tarkasteltavaan funktioon.[1] Funktionaalin käyttäytymisestä taas voidaan tehdä päätelmiä tutkimalla sen variaatioita ääriarvopisteessä (= se *funktio*, joka antaa funktionaalille ääriarvon). Ääriarvon etsiminen palautuu differentiaaliyhtälön ratkaisuun, joten funktionaalin minimointi ja differentiaaliyhtälön ratkaisu ovat ekvivalentteja toimenpiteitä. Koska differentiaaliyhtälöiden ratkaisu on vaikeaa, voidaankin kysyä: mitä etua variaatiomenetelmän käyttöönotto tuo tullessaan? Kysymykseen vastaaminen on helppoa, sillä variaatiomenetelmien suurin etu (etenkin

[1] Formaalin näkökannan mukaan määrätyn integraalin minimoiminen on aito variaatiolaskennan tehtävä kun taas funktion minimointi kuuluu tavallisen differentiaalilaskennan piiriin. Historiallisesti nämä kaksi ongelmatyyppiä tulivat esille miltei samanaikaisesti ja selvää eroa niiden välillä ei tehty ennen kuin Joseph-Louis Lagrange kehitti yleisen variaatiolaskennan metodiikan teoksessaan *Mécanique Analytique* 1788. Eräs variaatiolaskennan äitiongelmia on nopeimman laskun käyrän yhtälön määrittäminen; ongelma jonka Jean Bernoulli esitti 1696 ja jonka ratkaisun löysivät toisistaan riippumatta Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz ja Bernoulli itse. Variaatio-ongelman yhteyden differentiaaliyhtälöihin havaitsivat Leonhard Euler ja Lagrange.

näin tietokoneiden aikakaudella) on helppous muodostaa probleeman likiratkaisuja.

Tarkastellaan funktionaalia

$$I(w) = \int_a^b F(x; w, w')dx, \tag{2.1}$$

ja etsitään funktiota $w(x)$, joka antaa minimiarvon I:lle ja joka toteuttaa reunapisteissä ehdot

$$w(a) = u_a, \quad w(b) = u_b. \tag{2.2}$$

Otaksutaan lisäksi, että funktio w on vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, eli $w \in C_2(a, b)$. [2]

Olkoon $u(x)$ se funktio, joka antaa minimiarvon funktionaalille (2.1), eli

$$I(u) = \min_{w \in C_2(a,b)} \int_a^b F(x; w, w')dx \tag{2.3}$$

ja toteuttaa reunaehdot (2.2). Määritellään *varioitu funktio*

$$w(x) = u(x) + \delta u(x) = u(x) + \epsilon \hat{u}(x), \tag{2.4}$$

jossa ϵ on *mielivaltainen reaaliluku* ja $\hat{u}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, homogeeniset reunaehdot ($\hat{u}(a) = \hat{u}(b) = 0$) toteuttava mielivaltainen funktio (mielivaltainen, mutta täysin *kiinnitetty* kun valitaan variaatioksi). Funktiota $\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x)$ kutsutaan funktion u variaatioksi. Sijoitetaan varioitu funktio funktionaalin (2.1) lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$I(w) = I(u + \epsilon \hat{u}) = I(\epsilon) = \int_a^b F(x; u + \epsilon \hat{u}, u' + \epsilon \hat{u}')dx. \tag{2.5}$$

Huomaa, että funktionaali on nyt vain ϵ:n funktio, sillä sekä u että $\hat{u}$ ovat kiinnitettyjä funktioita. Oletuksen mukaan funktio $u(x)$ antaa I:lle minimiarvon ja vastaa edellisen funktionaalin arvoa, kun $\epsilon = 0$. Minimin olemassaolon välttämätön ehto on

$$\left.\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial w'}\frac{dw'}{d\epsilon} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\hat{u}(x) + \frac{\partial F}{\partial w'}\hat{u}'(x) \right) dx = 0. \tag{2.6}$$

Osittaisintegroimalla jälkimmäinen termi

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial w'}\hat{u}'(x)dx = \left|_a^b \frac{\partial F}{\partial w'}\hat{u} - \int_a^b \hat{u}(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) dx \right. \tag{2.7}$$

saadaan

$$\left.\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) \right] \hat{u}(x)dx = 0, \tag{2.8}$$

sillä sijoitustermi häviää, koska funktio $\hat{u}$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot.

Nyt tarvitaan hieman aputuloksia matematiikasta.

[2] n-kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden luokkaa merkitään C_n.

Lause 2.1 *Mikäli funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \tag{2.9}$$

kaikille *funktioille $\eta(x) \in C_2(a, b)$ ja $\eta(a) = \eta(b) = 0$, niin $f(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$.*

Soveltamalla tätä tulosta yhtälöön (2.8), saadaan funktionaalin (2.1) ns. *Eulerin yhtälö* [3]

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) = 0, \tag{2.10}$$

joka on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö funktion $w(x)$ määrittämiseksi ja välttämätön ehto sille, että $w(x)$ antaa funktionaalille I suhteellisen minimin. Yhtälön (2.10) ja reunaehdot (2.2) toteuttavaa funktiota kutsutaan myös funktionaalin (2.1) ekstremaaliksi.

Yhteenvetona voidaan todeta, että funktionaalin minimin etsiminen annetuilla reunaehdoilla on ekvivalenttia differentiaaliyhtälön ratkaisulle ko. reunaehdoilla.

Funktion u variaatio δu määritellään yhtälöllä

$$\delta u(x) = \epsilon \hat{u}(x), \qquad \text{eli} \qquad \delta u = \epsilon \left.\frac{d(u + \epsilon\hat{u})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{2.11}$$

Samalla tavalla voidaan määritellä myös funktionaalin variaatio

$$\delta I = \epsilon \left.\frac{dI(u + \epsilon\hat{u})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{2.12}$$

Yhtälön (2.8) mukaan

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right)\right] \delta u dx = 0, \tag{2.13}$$

eli funktionaali I saavuttaa ääriarvon, jos ja vain jos $\delta I = 0$. Funktionaalin I korkeampia variaatioita voidaan määrittää rekursiivisesti, esimerkiksi

$$\begin{aligned} \delta^2 I &= \delta(\delta I) = \delta \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta u + \frac{\partial F}{\partial w'}\delta u'\right) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(\delta u)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial w \partial w'}\delta u \delta u' + \frac{\partial^2 F}{\partial w'^2}(\delta u')^2\right] dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Yleisesti voidaan kirjoittaa lauseke

$$I(u + \delta u) = I(u) + \delta I(u) + \frac{1}{2!}\delta^2 I(u) + \cdots, \tag{2.15}$$

[3] Usein kutsutaan myös Eulerin-Lagrangen yhtälöksi.

joka on analoginen funktion Taylorin kehitelmän kanssa. Yhtälön (2.13) mukaan funktionaalin ääriarvon olemassaolon välttämätön ehto on sen ensimmäisen variaation häviäminen. Täten ääriarvon laadun tutkiminen voidaan suorittaa tutkimalla funktionaalin toista variaatiota.

Yhden muuttujan funktion w tapauksessa, jos integrandifunktio F riippuu funktiosta w ja sen derivaatoista kertalukuun n saakka, on variaatioformulaatio muotoa

$$\min_{w\in\mathcal{A}} I(w) = \min_{w\in\mathcal{A}} \int_a^b F(x; w, w', w'', ..., w^{(n)})dx, \tag{2.16}$$

jossa $\mathcal{A}$ merkitsee luvallisten funktioiden joukkoa, eli funktioita joiden derivaatat ovat jatkuvia aina kertalukuun $2n$ saakka ja jotka toteuttavat reunaehdot w:lle ja sen derivaatoille kertalukuun $n-1$ saakka. Funktionaalin (2.16) Eulerin yhtälö on

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial w''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} = 0. \tag{2.17}$$

Tarkastellaan seuraavassa useamman muuttujan funktioiden variaatioformulaatiota, ja käydään lävitse funktionaalin

$$I(w) = \int_A F(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y})dA \tag{2.18}$$

Eulerin yhtälön johto tasoalueessa A jonka reunakäyrää merkitään S:llä. Käytetään seuraavia kompakteja merkintöjä osittaisderivaatoille:

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{jne..} \tag{2.19}$$

Merkitään nyt varioitua funktiota

$$w(x, y) = u(x, y) + \epsilon\hat{u}(x, y), \tag{2.20}$$

jossa $\hat{u}(x, y)$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot reunalla S ja otaksutaan funktion $u(x, y)$ antavan funktionaalille (2.18) stationäärisen arvon. Nyt varioitu funktionaali saa muodon

$$I(\epsilon) = \int_A F(x, y; u + \epsilon\hat{u}, u_{,x} + \epsilon\hat{u}_{,x}, u_{,y} + \epsilon\hat{u}_{,y})dA. \tag{2.21}$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessa tapauksessa, on ääriarvon edellytyksenä nyt ensimmäisen variaation häviäminen, eli

$$\left.\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \Longrightarrow I(u) = \min_w I(w), \tag{2.22}$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} &= \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})}\frac{d(w_{,x})}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})}\frac{d(w_{,y})}{d\epsilon}\right] dA \\ &= \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial w}\hat{u} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})}\hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})}\hat{u}_{,y}\right] dA. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Jotta mielivaltainen, mutta variaatiotoimituksen ajaksi kiinnitetty funktio $\hat{u}(x, y)$ saataisiin yhteiseksi tekijäksi oheiseen lausekkeeseen, muokataan integrandin kahta viimeistä termiä:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u}_{,x} + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u}_{,y} \right] dA \\ = \quad & \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \hat{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \hat{u} \right) \right] dA \\ & - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \right) \right] \hat{u} dA. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nyt ensimmäseen termiin voidaan soveltaa Gaussin[4] lausetta kahdessa dimensiossa, (katso esim. K. Väisälä: *Vektorianalyysi*)

$$\int_A \nabla \cdot \vec{g} dA = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n} ds, \tag{2.25}$$

jossa $\vec{n}$ on reunakäyrän S ulkonormaali. Tällöin saadaan

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{u} \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \right) \right] dA = \oint_S \hat{u} \left[\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} n_x + \frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} n_y \right] ds = 0, \tag{2.26}$$

jossa n_x, n_y ovat reunakäyrän yksikköulkonormaalin $\vec{n}$ komponentit. Kokoamalla nyt tulokset yhteen saadaan

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_A \hat{u} \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,x})} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial(w_{,y})} \right) \right] dxdy = 0. \tag{2.27}$$

Aivan vastaavasti kuin yksidimensioisessakin tapauksessa voidaan todistaa lauseen 2.1 vastine useampidimensioiseen avaruuteen, jolloin funktionaalin (2.18) Eulerin yhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} \right) = 0, \tag{2.28}$$

joka on toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö tuntemattoman funktion w ratkaisemiseksi tasoalueessa riittävillä reunaehdoilla.

Lopuksi voidaan todeta, että mikä tahansa differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa variaatiomuotoon. Eräs tapa tämän toteamiseksi voidaan konstruoida seuraavasti: Toteuttakoon funktio $u(x, y)$ osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$G(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial y^m}) = 0 \tag{2.29}$$

[4]Karl Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matematiikko.

ja tietyt sopivat reunaehdot. Tällöin voidaan määritellä funktionaali

$$I(w) = \int\limits_A \left[G(x, y; w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial^m w}{\partial y^m}) \right]^2 dA, \tag{2.30}$$

ja A on alue (x, y) tasossa jossa yhtälö $G = 0$ on ratkaistava ja jossa w on mikä tahansa funktio, joka toteuttaa u:lle asetetut reunaehdot. On selvää, että oheinen integrandi on aina positiivinen ja häviää silloin kun $w \equiv u$, joten I:n minimiarvo (nolla) saavutetaan kun $w \equiv u$. Funktionaali (2.30) ei kuitenkaan kuvaa mitään fysikaalista mielekästä suuretta.

Esimerkki 2.1 *Taivutetun pyörähdyssymmetrisen laatan potentiaalienergian funktionaali on*

$$\Pi(w) = \int_A \left[\frac{1}{2}(M_r \kappa_r + M_\phi \kappa_\phi) - qw \right] dA, \tag{2.31}$$

jossa

$$\begin{aligned} M_r &= D(\kappa_r + \nu \kappa_\phi), \qquad \kappa_r = -\frac{d^2 w}{dr^2} = -w'', \\ M_\phi &= D(\kappa_\phi + \nu \kappa_r), \qquad \kappa_\phi = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = -\frac{w'}{r}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

ja D on laatan taivutusjäykkyys ja ν materiaalin suppeamaluku. Johda pyörähdyssymmetrisen laatan Eulerin yhtälö.

Sijoitetaan momenttien lausekkeet muodonmuutosenergian lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} U(w) &= \tfrac{1}{2} \int D \left(\kappa_r^2 + \kappa_\phi^2 + 2\nu \kappa_r \kappa_\phi \right) 2\pi r dr \\ &= \tfrac{1}{2} \int D \left[(w'')^2 + \frac{1}{r^2}(w')^2 + \frac{2\nu}{r} w'' w' \right] 2\pi r dr. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Korvataan $w \to w + \epsilon \hat{w}$, ja suoritetaan variaatio, eli

$$\left.\frac{d\Pi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 2\pi \int \left\{ D \left[\left(w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) \hat{w}'' + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} w' + \nu w'' \right) \hat{w}' \right] - q\hat{w} \right\} r dr = 0. \tag{2.34}$$

Otaksutaan sellaiset reunaehdot, jotka johtavat sijoitustermien häviämiseen osittaisintegroitaessa ja otaksutaan vielä, että laatan taivutusjäykkyys D on vakio, jolloin saadaan

$$\int \left\{ D \left[\left(r w'' + \nu w' \right)'' - \left(\nu w'' + \frac{1}{r} w' \right)' \right] - qr \right\} \hat{w} dr = 0, \tag{2.35}$$

josta sieventämällä tulee

$$\int \left[D \left(w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' \right) - q \right] \hat{w} r dr = 0. \tag{2.36}$$

Koska funktio $\hat{w}$ on mielivaltainen, saadaan Eulerin yhtälöksi

$$D\left(w'''' + \frac{2}{r}w''' - \frac{1}{r^2}w'' + \frac{1}{r^3}w'\right) = q. \tag{2.37}$$

Esimerkki 2.2 *Johda Eulerin yhtälö funktionaalille*

$$I(w) = \frac{1}{2}\int\int\left[a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{2.38}$$

jossa a, b ja c ovat vakioita. Milloin oheisen funktionaalin minimoinnista voidaan oikeutetusti puhua, ts. tutki funktionaalin toista variaatiota.

Suoritetaan variaatio, eli korvataan $w \to w + \epsilon\hat{w}$. Otaksutaan, että w:lle on annettu arvot koko alueen reunalla, joten variaation $\hat{w}$ on toteutettava homogeeniset reunaehdot. Saadaan siis

$$\begin{aligned} I(w + \epsilon\hat{w}) &= \tfrac{1}{2}\int\int\left(aw_{,x}^2 + 2bw_{,x}w_{,y} + cw_{,y}^2\right)dxdy \\ &\quad +\epsilon\int\int\left[aw_{,x}\hat{w}_{,x} + b(w_x\hat{w}_{,y} + w_{,y}\hat{w}_{,x}) + cw_{,y}\hat{w}_{,y}\right]dxdy \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\epsilon^2\int\int\left(a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2\right)dxdy, \end{aligned} \tag{2.39}$$

jossa on merkitty osittaisderivaattoja lyhyesti esim. $\partial w/\partial x = w_{,x}$. Eulerin yhtälö saadaan ensimmäisen variaation avulla

$$\begin{aligned} \left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int\int\left[(aw_{,x} + bw_{,y})\,\hat{w}_{,x} + (bw_{,x} + cw_{,y})\,\hat{w}_{,y}\right]dxdy \\ &= \int\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(aw_{,x} + bw_{,y})\,\hat{w}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(bw_{,x} + cw_{,y})\,\hat{w}\right]\right\}dxdy \\ &\quad -\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}(aw_{,x} + bw_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y}(bw_{,x} + cw_{,y})\right]\hat{w}dxdy \\ &= \oint\left[(aw_{,x} + bw_{,y})\,n_x + (bw_{,x} + cw_{,y})\,n_y\right]\hat{w}ds \\ &\quad -\int\int(aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy})\,\hat{w}dxdy = 0. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Koska variaatio $\hat{w}$ toteuttaa homogeeniset reunaehdot, häviää reunaintegraalitermi ja variaation mielivaltaisuudesta seuraa Eulerin yhtälö

$$aw_{,xx} + 2bw_{,xy} + cw_{,yy} = 0. \tag{2.41}$$

Tutkitaan nyt funktionaalin ominaisuuksia hieman tarkemmin. Jotta funktionaalilla varmasti olisi minimi on toisen variaation oltava aidosti positiivinen, eli

$$\delta^2 I = \epsilon^2\left.\frac{d^2I}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} = \epsilon^2\int\int\left(a\hat{w}_{,x}^2 + 2b\hat{w}_{,x}\hat{w}_{,y} + c\hat{w}_{,y}^2\right)dxdy > 0 \tag{2.42}$$

Koska variaatio $\hat{w}$ on täysin mielivaltainen, on positiivisuuden edellytys, että integrandi on positiivinen kaikissa tarkastelualueen pisteissä (x, y). Merkitään variaation $\hat{w}$ derivaatan arvoja pisteessä (x, y) seuraavilla symboleilla

$$s = \hat{w}_{,x}(x, y), \qquad r = \hat{w}_{,y}(x, y). \tag{2.43}$$

Nyt toisen variaation positiivisuusvaatimus voidaan esittää

$$as^2 + 2bsr + cr^2 > 0. \tag{2.44}$$

Havaitaan lausekkeen olevan neliömuoto, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix} > 0. \tag{2.45}$$

Jotta yllä oleva lauseke olisi positiivinen, on neliömuodon matriisin oltava positivisesti definiitti, eli sen ominaisarvojen on oltava positiivisia. Ominaisarvot λ_i saadaan yhtälöstä

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = 0, \tag{2.46}$$

josta seuraa

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(a + c) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2}. \tag{2.47}$$

Jotta molemmat ominaisarvot olisivat positiivisia, on oltava

$$\tfrac{1}{4}(a + c)^2 - ac + b^2 < \tfrac{1}{4}(a + c)^2 \tag{2.48}$$

josta seuraa

$$ac - b^2 > 0. \tag{2.49}$$

Oheisella ehtoyhtälöllä voidaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä luokitella. Yhtälö on elliptinen, mikäli minimointi onnistuu, eli kun $ac - b^2 > 0$ ja hyperbolinen kun $ac - b^2 < 0$. Rajatapauksena on parabolinen yhtälö kun $ac - b^2 = 0$. Paraboliseen yhtälöön liittyy kuitenkin tietty varaus. Mikäli esimerkiksi $c = b = 0$ ei vastaava yhtälö $w_{,xx} = 0$ ole parabolinen vaan elliptinen. Sen sijaan yhtälö $w_{,xx} + w_{,y} = 0$ olisi parabolinen.

2.2 Oleelliset ja luonnolliset reunaehdot

Kuten on jo mainittu, tarvitaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun riittävä määrä reunaehtoja. Mikäli reunaehtoja ei ole asetettu, tai ne ovat puutteelliset, ei yksikäsitteistä ratkaisua voida löytää. Herääkin kysymys: mikä on kullekin yhtälölle riittävä määrä reunaehtoja ratkaisun yksikäsitteisyyden takaamiseksi? Variaatiomenetelmä antaa tähän vastauksen.

Tarkastellaan esimerkkinä taivutetun ohuen palkin yhtälöä (Eulerin-Bernoullin palkkimalli). Palkin potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2 dx - \int_0^L fv dx, \tag{2.50}$$

ja jonka Eulerin yhtälöksi saadaan

$$EIv'''' = f. \tag{2.51}$$

Suoritetaan yksityiskohtaisesti Eulerin yhtälön johto. Varioidaan taipumafunktiota $v \to v + \epsilon\hat{v}$, jossa $\epsilon\hat{v}$ on taipuman variaatiofunktio. Mitkä reunaehdot funktion $\hat{v}$ on toteutettava riippuu minimointiprobleemalle

$$\min \ \Pi(v), \qquad v \in \mathcal{A} \tag{2.52}$$

asetettavista reunaehdoista, eli siitä millainen on kinemaattisesti luvallisten taipumafunktioiden joukko $\mathcal{A}$. Palataan $\hat{v}$:lle asetettaviin reunaehtovaatimuksiin kun käsitellään minimointiongelman spesifejä reunaehtotapauksia.

Stationäärisyysehdosta seuraa

$$\left.\frac{d\Pi}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_0^L (EIv''\hat{v}'' - f\hat{v})\, dx = 0. \tag{2.53}$$

Suorittamalla kaksi osittaisintegrointia saadaan tulokseksi[5]

$$EI\left[v''(L)\hat{v}'(L) - v''(0)\hat{v}'(0) - v'''(L)\hat{v}(L) + v'''(0)\hat{v}(0)\right] + \int_0^L (EIv'''' - f)\,\hat{v}dx = 0. \tag{2.54}$$

Mikäli nyt otaksutaan Eulerin yhtälön $EIv'''' = f$ toteutuvan, jää jäljelle sijoitustermit reunoilta, joiden tulee hävitä, eli

$$v''(L)\hat{v}'(L) - v''(0)\hat{v}'(0) - v'''(L)\hat{v}(L) + v'''(0)\hat{v}(0) = 0. \tag{2.55}$$

Tutkitaan nyt erikseen neljää mahdollista reunaehtotapausta.

1. *Jäykästi kiinnitetyt reunat.* Tällöin taipumaviivalta vaaditaan

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \qquad v(L) = 0, \\ v'(0) &= 0, \qquad v'(L) = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

   Koska taipuman variaatio toteuttaa homogeeniset reunaehdot, $\hat{v}(0) = \hat{v}'(0) = \hat{v}(L) = \hat{v}'(L) = 0$ toteutuu reunatermien (2.55) häviäminen automaattisesti, joten lisäehtoja ei tarvita.

[5]Huomaa, että sijoitustermi voidaan kirjoittaa muodossa:
$M(0)\hat{v}'(0) - M(L)\hat{v}'(L) - Q(0)\hat{v}(0) + Q(L)\hat{v}(L)$.

2. *Vapaasti tuetut reunat.* Tällöin taipumalta vaaditaan ainoastaan

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0. \tag{2.57}$$

Koska taipuman variaation derivaatat päätepisteissä ovat nyt mielivaltaiset, tarvitaan kaksi lisäehtoa, jotta reunatermit häviäisivät:

$$v''(0) = 0, \qquad v''(L) = 0, \tag{2.58}$$

jotka täydentävät annetut siirtymäreunaehdot.

3. *Toinen pää jäykästi kiinnitetty ja toinen vapaa.* Olkoon palkki kiinnitetty pisteestä $x = 0$. Tällöin taipumalta vaadittavat reunaehdot ovat:

$$v(0) = 0, \qquad v'(0) = 0. \tag{2.59}$$

Vapaassa päässä ei taipumalle eikä kaltevuuskulmallekaan aseteta mitään ehtoja, joten taipuman ja sen derivaatan variaatioillekaan ei voida asettaa mitään vaatimuksia. Täten vaaditaan ehtojen (2.59) lisäksi

$$v''(L) = 0, \qquad v'''(L) = 0. \tag{2.60}$$

4. *Molemmat päät vapaat.* Tällöin taipumalle ei aseteta mitään annettuja ehtoja kummassakaan päässä. Kuitenkin taipuman on toteutettava luonnollisesti seuraavat ehdot, jotta reunaehtotermit (2.55) häviäisivät:

$$\begin{aligned} v''(0) &= 0, \qquad v''(L) = 0, \\ v'''(0) &= 0, \qquad v'''(L) = 0. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Intuitiivisesti voidaan päätellä, että tämä tapaus on hieman muita kolmea tapausta mutkikkaampi. Ilmeisestikään palkki ei voi leijua ilmassa annettujen kuormien alaisuudessa, vaan niiden on oltava tasapainossa itsensä kanssa, eli kuormafunktion f on toteutettava tasapainoehdot

$$\int_0^L f dx = 0, \qquad \int_0^L x f dx = 0. \tag{2.62}$$

Kuten edellisestä esimerkistä voidaan havaita, vaaditaan ohuen palkin tapauksessa neljän reunaehdon toteutuminen, jotta probleeman ratkaisu olisi yksikäsitteinen. Annettuja reunaehtoja (2.56), (2.57) ja (2.59) täydentävät ns. luonnolliset reunaehdot (2.58), (2.60) ja (2.61), jotka tulevat luonnollisesti esiin variaatioformulaatiossa. Annettuja reunaehtoja kutsutaan usein oleellisiksi reunaehdoiksi tai Dirichletin reunaehdoiksi ja luonnollisia reunaehtoja Neumannin reunaehdoiksi. Huomaa erityisesti, että annettuja oleellisia reunaehtoja vastaavissa reunan pisteissä variaation on hävittävä.

2.3 Variaatiotehtävän likiratkaisumenetelmiä

Tämä kappale toimii johdatteluna elementtimenetelmään. Variaatioperiaatteiden käytöstä likiratkaisujen saamiseksi esitetään klassiset painotettujen jäännösten menetelmä, kollokaatiomenetelmä ja Galerkinin menetelmä soveltaen niitä yksiulotteiseen tasapainotyyppiseen esimerkkiongelmaan.

2.3.1 Painotettujen jäännösten menetelmä

Olkoon ratkaistavana differentiaaliyhtälö (tavallinen tai osittainen)

$$Fu = f \tag{2.63}$$

alueessa Ω reunaehdoilla

$$Au = a \tag{2.64}$$

alueen Ω reunalla S. Oletetaan myös, että operaattorit F ja A ovat lineaarisia. Painotettujen jäännösten menetelmä tai jäännösformulaatio muodostetaan seuraavalla tavalla. Tuntematonta funktiota approksimoidaan yritteellä

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \alpha_i, \tag{2.65}$$

jossa ϕ_i:t ovat sopivasti valittuja paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja α_i:t tuntemattomia parametreja. Yhtälöt (2.63) ja (2.64) kerrotaan painofunktiolla

$$w = \sum_{i=1}^{n} \psi_i w_i, \tag{2.66}$$

jossa ψ_i:t ovat paikkakoordinaateista riippuvia kantafunktioita ja w_i:t mielivaltaisia parametreja. Integroidaan näin saatu lauseke alueen tai reunanosan ylitse, eli

$$\int_\Omega w(F\tilde{u} - f)dV + \gamma \int_S w(A\tilde{u} - a)dS = 0, \tag{2.67}$$

jossa γ on mahdollisesti dimensiollinen painokerroin. Sijoittamalla painofunktion lauseke (2.66) yllä olevaan lausekkeeseen, saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \psi_i(F\tilde{u} - f)\, dV + \gamma \int_S \psi_i(A\tilde{u} - a)\, dS \right) w_i = 0. \tag{2.68}$$

Koska painokertoimet w_i ovat mielivaltaisia, on sulkulausekkeen sisällä olevien lausekkeiden hävittävä, täten yhtälö (2.68) muodostavaa itse asiassa n-kappaletta lineaarisia yhtälöitä

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega \psi_1 F\phi_j\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 A\phi_j\, dS\right)\alpha_j &= \int_\Omega \psi_1 f\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_1 a\, dS, \\
\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega \psi_2 F\phi_j\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 A\phi_j\, dS\right)\alpha_j &= \int_\Omega \psi_2 f\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_2 a\, dS, \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{n}\left(\int_\Omega \psi_n F\phi_j\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_n A\phi_j\, dS\right)\alpha_j &= \int_\Omega \psi_n f\, d\Omega + \gamma \int_S \psi_n a\, dS.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Tämä voidaan ilmaista kompaktisti

$$
\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\alpha_j = f_i, \qquad i = 1, ..., n, \tag{2.70}
$$

jossa

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \int_\Omega \psi_i F\phi_j dV + \gamma \int_S \psi_i A\phi_j dS, \\
f_i &= \int_\Omega \psi_i f\, dV + \gamma \int_S \psi_i a\, dS,
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

ja josta tuntemattomat parametrit α_i voidaan ratkaista. On huomattava, että *lineaarisesti riippumattomia painofunktioita* on oltava n kappaletta, jotta ongelmalla olisi yksikäsitteinen ratkaisu. Mikäli yrite $\tilde{u}$ ei ole ongelman tarkka ratkaisu, jäännökset $R_\Omega = F\tilde{u} - f$ ja $R_S = A\tilde{u} - a$ eivät milloinkaan häviä identtisesti koko alueessa Ω ja reunalla S. Täten painotettujen jäännösten menetelmä on tulkittavissa systeemin (2.63), (2.64) heikennetyksi muodoksi, jossa yhtälön toteutumista pisteittäin jokaisessa kohdassa ei vaadita, vaan yhtäsuuruus saadaan integraalin mielessä koko alueen suhteen. Kirjallisuudessa käytetään usein termejä vahva muoto ja heikko muoto, jossa vahva muoto viittaa differentiaaliyhtälöön (2.63) ja heikko muoto puolestaan variaatioyhtälöön (2.67).

Yhtälöt (2.67) ovat jäännösten R_Ω ja R_S ortogonaalirelaatioita painofuntioiden ψ_i suhteen, kun skalaaritulona on integraali

$$
\int_\Omega \psi_i R_\Omega d\Omega \qquad \text{ja} \qquad \int_S \psi_i R_S dS. \tag{2.72}
$$

Matemaattisesti ilmaistuna likimääräisratkaisu $\tilde{u}$ on siten tarkan ratkaisun ortogonaaliprojektio yllä olevan pistetulon mielessä. Huomaa kuitenkin, että "kohtisuoruutta" mitataan painofunktion suhteen, joka ei valttämättä ole samassa funktioavaruudessa kuin itse yritefunktio.

Kuten yhtälöstä (2.67) havaitaan, ei menetelmän käyttö sellaisenaan vaadi painofunktioilta minkäänlaista jatkuvuutta. Ne voivat olla epäjatkuvia funktioita tai vaikkapa yleistettyjä funktioita, kuten esimerkiksi Diracin delta-funktio. Tuntemattoman funktion u approksimaation $\tilde{u}$ sileysominaisuuksien pitää olla sopusoinnussa operaattorin F korkeimman kertaluvun derivaatan kanssa. Jos F:n kertaluku on $2m$ on yritefunktion $\tilde{u}$ oltava vähintään $2m-1$ kertaa jatkuvasti derivoituva (mikäli f on jatkuva), siis $\tilde{u} \in C_{2m-1}$.

Yritefunktioiksi kelpaavien funktioiden joukkoa voidaan laajentaa, mikäli yhtälön (2.67) ensimmäinen termi osittaisintegroidaan. Tällöin päädytään muotoa

$$\int_\Omega (G_1\psi_i G_2\tilde{u} - \psi_i f)dV + \int_S G_3\psi_i G_4\tilde{u}dS + \gamma \int_S \psi_i(A\tilde{u} - a)dS = 0 \tag{2.73}$$

olevaan yhtälöön, jossa $G_1 ... G_4$ ovat differentiaalioperaattoreita (tai pelkästään algebrallisia operaattoreita), joiden kertaluku on pienempi kuin operaattorin F. Jos operaattori F on itseadjungoitu, niin pätee $G_1 = G_2$, ja joiden kertaluku on m. Havaitaan, että painofunktioilta vaaditaan nyt enemmän sileysominaisuuksia kuin muodon (2.67) tapauksessa. Tämä tuntuu kuitenkin luonnolliselta; jotainhan on maksettava siitä, että yritefunktioita voidaan valita vapaammin suuremmasta funktioluokasta.

Ongelmana on nyt löytää sopiva yrite funktion approksimoimiseen ja painofunktioiden valinta. Yritefunktion optimaalinen valinta perustuu tietenkin ongelman ratkaisun erityisluonteeseen. Mikäli tiedetään jotain ratkaisun tyypistä, voidaan yritefunktioiksi ottaa joitain samantapaisesti käyttäytyviä yksinkertaisia funktioita. Painofunktioiden valinta pitäisi pystyä automatisoimaan kullekin probleemalle optimaaliseksi. Tätä seikkaa käsitellään kuitenkin huonosti alan kirjallisuudessa. Koska asian perinpohjainen käsittely menee hieman liian pitkälle peruskurssin tarpeita silmälläpitäen, turvaudutaan standardiformulaation valintoihin. Asiasta enemmän kiinnostuneille lukijoille suositellaan perehtymistä artikkeleihin [43], [54].

Edellä esitetty ajatuskulku saattaa tuntua hyvin abstraktilta. Asian sovellustapa selvinnee kuitenkin seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 2.3 *Tarkastellaan yksidimensioisen lämmönjohtumisyhtälön*

$$-(ku')' = f \tag{2.74}$$

ratkaisua alueessa $\Omega = (0, L)$ *reunaehdoin*

$$u(0) = u_0, \quad q(L) = -ku'(L) = 0. \tag{2.75}$$

Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikkakoordinaatin x *suhteen. Otaksutaan, että lämmönlähteen* f *antoisuus on vakio koko tarkasteltavalla alueella ja että lämmönjohtavuus* k *muuttuu lineaarisesti arvosta* k_0 *arvoon* $2k_0$*, joten* $k(x) = k_0(1 + x/L)$*. Suorita analyyttinen ratkaisu ja likiratkaisu jäännösmenetelmällä.*

Yhtälön tarkan ratkaisun löytäminen on triviaali toimenpide

$$
\begin{aligned}
u(x) &= u_0 \left\{ 1 + \frac{fL^2}{k_0 u_0} \left[2 \ln(1 + \frac{x}{L}) - \frac{x}{L} \right] \right\} \\
&= u_0 \left\{ 1 + \beta \left[2 \ln(1 + \frac{x}{L}) - \frac{x}{L} \right] \right\}, \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

jossa on merkitty annetun lämpötilan u_0, lämmönlähteen antoisuuden f ja lämmönjohtumiskertoimen k_0 suhdetta $f = \beta u_0 k_0 L^{-2}$, ja β on dimensioton vakio.

Ratkaistaan tehtävä likimääräisesti valitsemalla kaksiparametrinen yritefunktio, joka toteuttaa annetun lämpötilareunaehdon (oleellisen reunaehdon)

$$
\tilde{u}(x) = u_0 + \alpha_1 (x/L) + \alpha_2 (x/L)^2 \qquad (2.77)
$$

ja alueen painofunktioiksi vakio $\psi_1 = 1$ ja lineaarinen termi $\psi_2 = (x/L)$. Kirjoitetaan painotettujen jäännösten formulaatio (2.67) esimerkkitehtävälle:

$$
\int_0^L \psi_i \left[(k\tilde{u}')' + f \right] dx + \gamma \psi_i \left[-k(L)\tilde{u}'(L) \right] = 0, \qquad i = 1, 2. \qquad (2.78)
$$

Ongelmana on nyt oikeanpuoleisen reunaehdon (pisteessä $x = L$) painon γ hyvä valinta. Jotta esitetty muoto olisi dimensionaalisesti mielekäs, on lämpövuoreunaehdon painokertoimen oltava laaduton, kuten on myös kenttäalueen painokerroin. Täten voidaan valita yksinkertaisesti $\gamma = 1$. Sijoittamalla yhtälösysteemiin valitut painokertoimet ja yritefunktio saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\
\int_0^L \left(\frac{x}{L} \right) \left\{ \frac{k_0}{L^2} \left[\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] + f \right\} dx - \frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0. \qquad (2.79)
\end{aligned}
$$

josta seuraa lineaarinen yhtälöryhmä kahden tuntemattoman kertoimen α_1 ja α_2 ratkaisemiseksi:

$$
\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} fL = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}, \qquad (2.80)
$$

josta ratkaisu on

$$
\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{Bmatrix} \beta u_0. \qquad (2.81)
$$

Lämpötilafunktion approksimaatio jäännösmenetelmällä on siten

$$
\tilde{u}(x) = \left[1 + \beta \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{3}{5} \beta \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] u_0. \qquad (2.82)
$$

Ratkaisu on piirretty kuvaan 2.1. Mikäli reunatermiä ei oteta mukaan yhtälöihin ollenkaan, saadaan lineaarinen approksimaatio $\tilde{u}(x) = u_0 [1 - \beta(x/L)]$, mikä on kelvoton tulos.

2.3.2 Kollokaatiomenetelmät

Mikäli painofunktiot ψ_i valitaan Diracin delta-funktioiksi, eli

$$\psi_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{2.83}$$

jossa $\mathbf{r}$ merkitsee paikkavektoria, saadaan pistekollokaatiomenetelmä. Toisin sanoen, jäännös (2.67) vaaditaan häviämään tietyissä pisteissä $\mathbf{r}_i$, joita kutsutaan kollokaatiomenetelmän kontrollipisteiksi.

On myös mahdollista jakaa alue Ω osa-alueisiin $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ ja valita painofunktioiksi

$$\psi_i = 1 \quad \text{alueessa } \Omega_i, \qquad \psi_i = 0 \quad \text{muualla}, \tag{2.84}$$

jolloin saadaan menetelmä, jota kutsutaan osa-aluekollokaatiomenetelmäksi.

Esimerkki 2.4 *Sovelletaan kollokaatiomenetelmää edellisen esimerkin tehtävään.*

Käytetään samaa yritettä kuin edellä, ja valitaan kontrollipisteiksi välin kolmasosapisteet. Reunaehtoja varten käytetään samantyyppisiä painofunktioita kuin edellä (tehdään ainoastaan dimensiokorjaus $\gamma = L^{-1}$), joten ratkaisuyhtälöiksi saadaan [6]

$$\begin{aligned}
\int_0^L \delta(x - \frac{1}{3}L) \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0, \\
\int_0^L \delta(x - \frac{2}{3}L) \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right] dx - \frac{2k_0}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.85}$$

josta seuraa

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} f = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\beta u_0 k_0}{L^2}. \tag{2.86}$$

Ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \beta u_0, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \beta \left(\frac{x}{L} \right) \right]. \tag{2.87}$$

Kollokaatiomenetelmän antama likiratkaisu on siis suora !!! Ei ole menetelmän huonoutta, että saatiin kehno tulos, vaan päävastuu surkeasta ratkaisusta lankeaa nyt reunaehtojen painojen valinnalle. Suoritetaan laskelma uudestaan valitsemalla kontrollipisteessä $x = L/3$ muodostetun yhtälön oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi vaikkapa $\gamma = 0$. Tämä merkitsee sitä, että oikeanpuoleista reunaehtoa ei painoteta ollenkaan vasemmanpuoleisen kontrollipisteen kohdalla, jolloin saadaan

$$\frac{k_0}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L^2}, \tag{2.88}$$

[6] Diracin delta-distribuutiohan poimii funktion arvon, mikäli se esiintyy integrandissa tulomuodossa kyseisen funktion kanssa, eli $\int_a^b \delta(x-c) f(x) dx = f(c)$, jossa piste c kuuluu väliin (a, b).

josta ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \beta u_0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(x) = u_0 \left[1 + \frac{2}{3}\beta\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2}\beta\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]. \tag{2.89}$$

Tämäkään kollokaatiomenetelmän antama approksimaatio ei ole kovin hyvä. On mielenkiintoista havaita, että jättämällä reunatermi kokonaan pois päädytään lineaariseen ratkaisuun, joka on sama kuin painotettujen jäännösten menetelmässä, jossa reunatermi on myös jätetty pois.

2.3.3 Pienimmän neliön menetelmä

Pienimmän neliön keinossa painofunktioiksi valitaan yksinkertaisesti jäännöstermi itse, eli

$$w = R_\Omega, \quad \text{alueessa} \quad \Omega \quad \text{ja} \quad w = R_S \quad \text{reunalla}\, S, \tag{2.90}$$

jolloin painotettujen jäännösten variaatiomuoto saadaan näyttämään seuraavalta:

$$\min_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \left[\int_\Omega (F\tilde{u} - f)^2 dV + \gamma^2 \int_S (A\tilde{u} - a)^2 dS \right], \tag{2.91}$$

jossa kerroin γ pitää huolen dimensionaalisuuden oikeellisuudesta ja puolikas lausekkeen edessä on valittu mukavuussyistä.

Esimerkki 2.5 *Tutkitaan edellinen esimerkkitehtävä myös pienimmän neliön keinolla käyttäen samaa yritefunktiota.*

Minimoitava funktionaali on nyt

$$I(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(k\tilde{u}')' + f \right]^2 dx + \frac{1}{2}\gamma^2 \left[k(L)\tilde{u}'(L) \right]^2. \tag{2.92}$$

Sijoittamalla yritefunktio, on funktionaali kahden parametrin α_1 ja α_2 funktio

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{k_0}{L^2} \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) + f \right]^2 dx + \frac{\gamma^2}{2} \left[\frac{2k_0}{L} (\alpha_1 + 2\alpha_2) \right]^2. \tag{2.93}$$

Minimin välttämätön ehto on osittaisderivaattojen häviäminen näiden parametrien suhteen, eli

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \alpha_1} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f\, dx + \gamma^2 \frac{4k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha_2} &= \frac{k_0^2}{L^4} \int_0^L \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_2 \frac{x}{L} \right) \left(2 + 4\frac{x}{L} \right) dx + \frac{k_0}{L^2} \int_0^L f \left(2 + 4\frac{x}{L} \right) dx \\ &\quad + \gamma^2 \frac{8k_0^2}{L^2} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Suorittamalla integroinnit saadaan yhtälösysteemi

$$\frac{k_0}{L^2}\begin{bmatrix} 1+4\gamma^2 L & 4(1+2\gamma^2 L) \\ 4(1+2\gamma^2 L) & \frac{52}{3}+16\gamma^2 L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -4 \end{Bmatrix}\beta\frac{u_0 k_0}{L^2}. \tag{2.95}$$

Mikäli valitaan oikeanpuoleisen reunaehdon painoksi $\gamma = 0$, tulee approksimaatioksi lineaarinen lauseke $\tilde{u}(x) = u_0\,[1-\beta(x/L)]$, joten ratkaisun parantamiseksi on syytä valita $\gamma \neq 0$. Lasketaan tehtävä painokertoimen arvolla $\gamma^2 = L^{-1}$, jolloin parametrien arvoiksi ja ratkaisuksi saadaan $\alpha_1 = \frac{11}{17}\beta u_0$ ja $\alpha_2 = -\frac{6}{17}\beta u_0$, joten

$$\tilde{u}(x) = u_0\left[1+\frac{11}{17}\beta\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{7}{17}\beta\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]. \tag{2.96}$$

Likiratkaisu ei ole erityisen hyvä, ja se on piirretty kuvaan 2.1.

2.3.4 Galerkinin menetelmä

Galerkinin mukaan on saanut nimensä menettely, jossa painofunktioiksi valitaan samat kantafunktiot kuin ratkaisuyritteelle, eli

$$\psi_i = \phi_i. \tag{2.97}$$

Menetelmää voidaan tietenkin soveltaa muotoon (2.67) tai siitä osittaisintegroimalla saatuun muotoon (2.73).

Esimerkki 2.6 *Ratkaistaan jo tutuksi tullut 1-dimensioinen esimerkkitehtävä vielä Galerkinin keinolla. Tarkastellaan lisäksi muodon (2.73) reunatermejä huolellisemmin.*

Ratkaistaan tehtävä ensin käyttäen muotoa (2.67). Yhtälöiksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_1\left[\left(k\tilde{u}'\right)'+f\right]dx-\gamma k(L)\tilde{u}'(L) &= 0, \\ \int_0^L \phi_2\left[\left(k\tilde{u}'\right)'+f\right]dx-\gamma k(L)\tilde{u}'(L) &= 0, \end{aligned} \tag{2.98}$$

josta havaitaan ylimmäisen olevan identtinen jäännösmenetelmällä ratkaistun tehtävän toisen yhtälön kanssa, mikä on luonnollista, koska käytettiin samaa yritettä ja painofunktiota (x/L). Suorittamalla alimmaisen yhtälön integointi saadaan yhtälösysteemi muotoon

$$\frac{k_0}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-2\gamma & \frac{7}{3}-4\gamma \\ \frac{1}{3}-2\gamma & \frac{5}{3}-4\gamma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix}\beta\frac{u_0 k_0}{L}, \tag{2.99}$$

Otaksumalla painokertoimelle arvo $\gamma = 1$, saadaan ratkaisuksi $\alpha_1 = \frac{11}{13}\beta u_0$ ja $\alpha_2 = -\frac{6}{13}\beta u_0$, joten

$$\tilde{u}(x) = u_0\left[1+\frac{11}{13}\beta\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{6}{13}\beta\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]. \tag{2.100}$$

Tulos on piirretty kuvaan 2.1 ja se on paras tahänastisista. Mikäli painokertoimeksi valitaan $\gamma = 0$ saadaan tulos: $\alpha_1 = -\beta u_0, \alpha_2 = 0$. Ratkaisu on lineaarinen approksimaatio, joka ei ole kelvollinen.

Toinen tapa soveltaa Galerkinin keinoa saadaan kun suoritetaan osittaisintegrointi painotetusta kenttäyhtälöstä, jolloin päädytään yhtälöihin

$$\int_0^L \phi_i \left[(k\tilde{u}')' + f \right] dx - \gamma k(L)\tilde{u}'(L) = 0 \tag{2.101}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L k\phi_i'\tilde{u}'dx - \Big|_0^L \phi_i(k\tilde{u}') + \gamma k(L)\tilde{u}'(L) = \int_0^L f\phi_i dx. \tag{2.102}$$

Havaitaan, että osittaisintegointi toi mukanaan informaation luonnollisesta reunaehdosta ja sen mahdollisesta painosta. Kun valitaan $\gamma = 1$, niin oleellista reunaehtoa vastaava termi häviää ratkaisuyhtälöstä, joka siten yksinkertaistuu muotoon

$$\int_0^L k\phi_i'\tilde{u}'dx = \int_0^L f\phi_i dx. \tag{2.103}$$

Sijoittamalla interpolaatioiden lausekkeet ja suorittamalla integrointi päädytään yhtälösysteemiin

$$\frac{k_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \beta \frac{u_0 k_0}{L}. \tag{2.104}$$

Yhtälön ratkaisu on luonnollisestikin sama kuin (2.100), jossa lähtökohtana oli Galerkinin keinon osittaisintegroimaton muoto. Tämä likimääräisratkaisu on piirretty kuvaan 2.1 ja havaitaan sen approksimoivan erinomaisesti analyyttistä ratkaisua, ottaen huomioon yritteen karkeus.

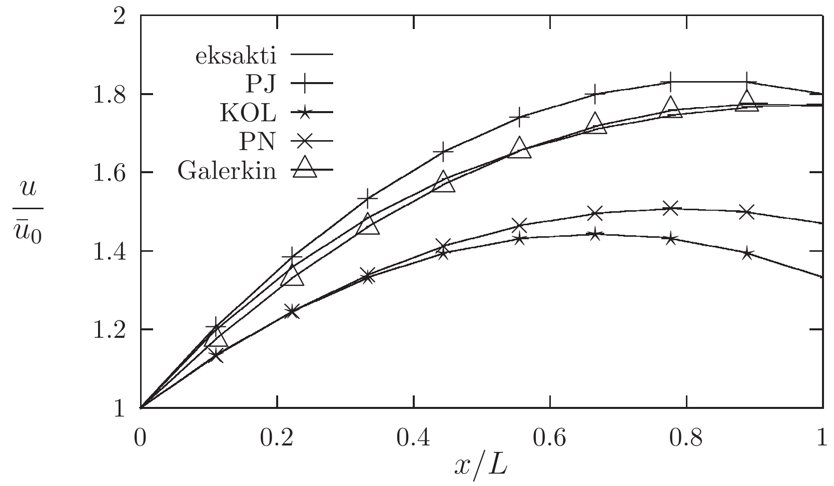
2.3.5 Rayleighin-Ritzin menetelmä

Rayleighin ja Ritzin menetelmä, tai lyhyesti pelkkä Ritzin menetelmä ei oikeastaan eroa Galerkinin menetelmästä. Ritzin menetelmäksi kutsutaan likiratkaisumenetelmää, jossa lähdetään liikkeelle minimoitavasta funktionaalista. Täten Ritzin ja Galerkinin menetelmän antamat likiratkaisut ovat identtiset.

On kuitenkin huomattava, että Galerkinin menetelmän soveltaminen ei ole rajoittunut vain ongelmiin, jotka voidaan pukea sellaiseen variaatiomuotoon, joka on seurauksena funktionaalin minimoimisesta, joten Galerkinin menetelmää voidaan pitää yleispätevämpänä.

2.3.6 Muutamia huomautuksia

Lasketusta esimerkistä voisi vetää sen johtopäätöksen, että Galerkinin keino on se ainoa oikea. Näin ei kuitenkaan ole asianlaita kaikissa ongelmissa, katso myös harjoitustehtävä 8. Voidaan kuitenkin osoittaa, että se on optimaalinen tietylle ryhmälle



Kuva 2.1 Yksidimensioisen esimerkkitehtävän analyyttinen ratkaisu (yhtenäinen viiva) ja neljä erilaista likiratkaisua (PJ = painotettujen jäännösten menetelmä, KOL = kollokaatiomenetelmä, ja PN = pienimmän neliön menetelmä). Piirretty β:n arvolla $\beta = 2$.

differentiaaliyhtälöitä (osittaisia tai tavallisia), nimittäin elliptisille yhtälöille, joukkoon johon juuri kyseinen stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö kuuluu. Virtausmekaniikassa vallitsevat yhtälöt ovat usein hyperbolisluonteisia, ja tällöin Galerkinin menetelmä saattaa tuottaa pahasti oskilloivia tuloksia.

Tässä esitettyä Galerkinin menetelmää kutsutaan myös Bubnovin-Galerkinin menetelmäksi erotuksena ns. Petrovin-Galerkinin menetelmälle, jossa painofunktioina käytetään eri tavalla valittuja kantafunktioita kuin itse ratkaisuyritteelle. Tätä menetelmää on sovellettu menestyksellisesti juuri virtausmekaniikassa. Asiasta kiinnostuneelle lukijalle suositellaan lisälukemisena artikkeleja [43], [54].

Edellisissä esimerkeistä voitaneen myös päätellä, ettei painofunktioiden konstruoiminen ole aivan triviaali toimenpide. Eräs mahdollinen keino saada hyvää informaatiota soveliaista reunaehtopainoista on käyttää Lagrangen kertojamenettelyä ja identifioida määräämättömän kertojan fysikaalinen tulkinta.

Tässä luvussa ei ole otettu suuremmin kantaa kelvollisten painofunktioiden valintaan, eikä menetelmän mahdolliseen suppenemiseen eli konvergenssiin, kun kantafunktioiden lukumäärää kasvatetaan. Likimenetelmien suppenemiseen palataan kuitenkin myöhemmin itse elementtimenetelmän yhteydessä.

2.4 Yhteenveto

Funktionaalin ääriarvon etsiminen on ekvivalentti funktionaalin varioinnin tuloksena syntyvän differentiaaliyhtälön ratkaisun kanssa.

Variaatiolaskenta mahdollistaa likiratkaisumenetelmien konstruoimisen. Painotettujen jäännösten menetelmä on perusperiaatteeltaan seuraavanlainen: (i) ratkaistava ongelma kerrotaan testi- eli painofunktiolla ja (ii) integroidaan tarkastelualueen yli. Ratkaistavalle funktiolle valitaan sopiva yrite. Mikäli yritefunktioon kohdistuvien derivointioperaatioiden lukumäärää halutaan vähentää suoritetaan sopiva määrä osittaisintegrointeja. Galerkinin keino saadaan kun painofunktion kannaksi valitaan sama kanta kuin yritefunktiolle.

2.5 Harjoitustehtäviä

1. Määritä variaatiolaskentaa soveltamalla sen käyrän yhtälö, joka muodostaa lyhimmän tien Euklidisen avaruuden tason kahden pisteen välille.

2. Ratkaise klassinen brakistokroniongelma, eli sen tasokäyrän yhtälö joka vakiopainovoimakentässä johtaa massapartikkelin nopeimpaan laskuun kahden tason pisteen välillä.

3. Etsi funktionaalin
$$I(y) = \int_a^b x^2 (y')^2 dx$$
extremaalit. Määrää lisäksi pisteiden $(1, 1)$ ja $(3, \frac{1}{2})$ kautta kulkeva extremaali. Mika on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

4. Etsi funktionaalin
$$I(y, z) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 + 2yz] dx$$
ekstremaali, joka toteuttaa reunaehdot: $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = -1$. Mikä on kyseisen funktionaalin fysikaalinen tulkinta ?

5. Yksidimensioisen stationäärisen lämmönjohtumisyhtälön energiafunktionaali on
$$I(w) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} k(w')^2 - fw\right] dx,$$
jossa k on lämmönjohtavuuskerroin (oletetaan vakioksi) ja f on ulkoinen lämmönlähde. Näytä, että vastaava Eulerin yhtälö on $-ku'' = f$. Näytä myös, että samaan differentiaaliyhtälöön päädytään mikäli funktionaaliksi valitaan
$$J(w) = \int_a^b \left(kw'' + f\right)^2 dx.$$

6. Muodosta vapaasti tuetun yksiaukkoisen kimmoisalla alustalla olevan taivutetun ja puristetun palkin Eulerin yhtälö lähtien potentiaalienergian Π lausekkeesta
$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI(w'')^2 - P(w')^2 + k(w)^2\right] dx - \int_0^L fw dx.$$
Tutki myös kokonaispotentiaalienergian funktionaalin toista variaatiota.

7. Olkoon ratkaistavana yllä olevaan potentiaalienergian lausekkeeseen liittyvä minimointitehtävä (ilman puristavaa voimaa P) seuraavin reunaehdoin:

   (a) $v(0) = 0$

   (b) $v(0) = v_0$,

   (c) $v'(L) = \phi_L$,

   (d) $Q(0) = -EIv'''(0) = F$.

   Mikä on kinemaattisesti luvallisten funktioiden joukko $\mathcal{A}$? Mitkä ovat taipuman variaatiolle asetettavat reunaehtovaatimukset?

8. Ratkaise yhtälö

$$-ku'' - cu = fx,$$

   (k, c, f ovat vakioita, $c = \beta k L^{-2}$ jossa β dimensioton vakio) reunaehdoilla $u(0) = u(L) = 0$ analyyttisesti ja likimääräisesti

   (a) pistekollokaatiomenetelmällä valitsemalla kontrollipiste alueen keskelle,

   (b) osa-aluekollokaatiomenetelmällä valitsemalla osa-alueeksi koko väli (0,L),

   (c) pienimmän neliön keinolla ja

   (d) Galerkinin menetelmällä

   käyttäen yksiparametristä yritettä $\tilde{u}(x) = \alpha_1 \sin \pi x/L$. Suorita laskelmat β:n arvoilla 1 ja 100.

9. Ratkaise Galerkinin menetelmällä Poissonin yhtälö

$$-k\Delta u = f,$$

   (eli stationäärinen lämmönjohtumisyhtälö) suorakaiteen muotoisessa alueessa $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$. Reunaehdot ovat homogeeniset, eli $u = 0$ reunaviivalla, ja $k, \bar{f}$ ovat vakioita koko alueessa. Käytä approksimaatiota

$$\tilde{u}(x, y) = \alpha_1 (x^2 - ax)(y^2 - by).$$

10. Yksiaukkoisen vapaasti tuetun taivutetun ohuen palkin taipuman analyyttinen lauseke tasan jakautuneesta kuormasta f on

$$v(x) = \frac{fL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1\right],$$

   välillä $x \in (0, L)$. Ratkaise tehtävä likimääräisesti Galerkinin menetelmällä käyttämällä trigonometrista sarjamuotoista yritettä

$$\tilde{v}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ja minimoimalla potentiaalienergia

$$\Pi(\tilde{v}) = \frac{1}{2}\int_0^L EI(\tilde{v}'')^2 dx - \int_0^L f\tilde{v} dx.$$

Suppeneeko sarjaratkaisu kohti analyyttistä ratkaisua? Määritä virhe keskipisteen taipumassa kun otetaan mukaan vain sarjan muutama ensimmäinen termi.