

Luku 16

Sähkömagneetiikan numeerisia menetelmiä

Elementtimenetelmän juuret juontavat tarpeesta ratkaista kiinteän aineen mekaniikan ongelmia geometrialtaan monimutkaisissa aluissa. Menetelmän nopeaan leviämiseen käytännön lujuuslaskennan apuvälineeksi edesauttoi sen helppo muunneltavuus erityyppisiin lujuusopin ongelmiin sekä geometrinen joustavuus. Virtausmekaniikkaan elementtimenetelmä on levinnyt hitaammin, johon yhtenä syynä lienee tavanomaiseen Galerkinin menetelmään perustuvan elementtiapproksimaation epäonnistuminen. Nykyisin ongelman syyt ja ratkaisukeinot ovat selvillä ja elementtimenetelmää voidaan menestyksellisesti soveltaa myös erilaisissa virtausmekaniikan ongelmissa.

Sovellettaessa elementtimenetelmää sähkömagneetiikan yhtälöihin tapahtui samankaltainen ilmiö. Maxwellin yhtälöt eivät antautuneet helposti tavanomaisen elementtimenetelmäformulaation vieteltäviksi. Syynä ovat sähkömagneetiikan yhtälöiden erilaiset rajapintojen jatkuvuusominaisuudet. Näitä rajapintoja, jotka vaativat ratkaistavilta suureilta tietyn tyyppisiä jatkuvuusominaisuuksia ovat elementtien väliset rajapinnat. Lääke tähän vaivaan löydettiin, ja elementtimenetelmä on nykyisin sähkömagneetiikassa yksi käytetyimpiä numeerisia menetelmiä.

16.1 Johdanto

Sähkömagneettisten kenttien käyttäytymistä kuvaava kenttäteoria sai huipennuksensa James Clerk Maxwellin (1831-1879) tutkimuksissa vuosilta 1854-1879, jotka täydensivät sähkömagneetiikan suurmiesten André Marie Ampéren (1775-1836) ja Michael Faradayn (1791-1867) tulokset. Maxwellin yhtälöiden (1.20)-(1.24) syntymävuotena voidaan pitää vuotta 1864, jolloin hän julkaisi kirjoituksen *A dynamical theory of the electromagnetic field* [60, sivu 177].¹ Maxwell käytti sähkömagneet-

¹Sähkötekniikan ja sähkömagnetismin teorian historiasta kiinnostuneelle voidaan suositella Ismo Lindellin teosta *Sähkötekniikan historia* [60].

tisten kenttien kuvaamiseen kokoonpuristumattoman nesteen virtausanalogiaa. Paineen vaikutuksesta liikkuvan nesteen virtaviivat yhtyvät magneettisen voimakentän vuoviivoihin.

Tässä johdantoluvussa tarkastellaan Maxwellin yhtälön ratkaisujen luonnetta ja suuri osa materiaalista perustuu Ismo Lindellin ja Ari Sihvolan kirjoihin sähkömagneettisesta kenttäteoriasta [22] sekä Juhani Pitkärännan luentomonisteeseen [61]. Palautetaan nyt Maxwellin yhtälöt uudelleen mieleen:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (16.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (16.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (16.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (16.1e)$$

jossa \mathbf{H} on magneettikentän voimakkuus, \mathbf{B} magneettivuon tiheys, \mathbf{E} sähkökentän voimakkuus, \mathbf{D} sähkövuon tiheys, \mathbf{J} sähkövirran tiheys ja ρ varaustiheys. Yhtälö (16.1a) on nimeltään Ampère-Maxwellin yhtälö. Faradayn laki (16.1b) ilmaisee magneettivuon säilymisen. Edellä olevista viidestä yhtälöstä vain kolme on riippumattomia. Joko kolme ensimmäistä (16.1a)-(16.1c) tai yhtälöt (16.1a), (16.1b) ja (16.1e) voidaan valita riippumattomiksi yhtälöiksi. Näissä kolmessa yhtälössä on kuitenkin viisi tuntematonta vektorisuuretta, joten tarvitaan konstitutiiviset yhtälöt jotka kuvaavat materiaalin käytäytymistä, jotta yhtälösystemi sulkeutuisi ratkaistavaksi systeemiksi. Rajoittamalla yksinkertaiseen lineaariseen ja isotrooppiseen malliin, konstitutiiviset yhtälöt, joita sähkömagnetiikassa usein kutsutaan väliaineyhtälöiksi, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (16.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (16.2b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (16.2c)$$

jossa ϵ on permittiivisyys - kutsutaan myös dielektrisyysvakioksi, μ magneettinen permeabiliteetti ja σ sähkönjohtavuus. Ideaalisille sähköä johtaville aineille $\sigma = \infty$ ja tällöin ideaalisille johteille sähkökenttä häviää, eli $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Vastaavasti ideaalisille eristeille sähkönjohtavuus ja siten sähkövirran tiheys häviävät, eli $\sigma = 0$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Yleisemmässä tapauksessa väliaineyhtälöt (16.2a) ja (16.2b) ovat muotoa

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (16.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (16.3b)$$

jossa ϵ_0, μ_0 ovat tyhjän permittiivisyys ja permeabiliteetti, \mathbf{P} on sähköinen polarisaatio ja \mathbf{M} magnetoituma. Isotrooppiselle aineelle permittiivisyys ja permeabiliteetti

ovat skalaareja, ja usein ne ilmaistaan dimensiottomien suhteellisen permittiivisyyden ϵ_r ja suhteellisen permeabiliteetin μ_r avulla

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e, \quad (16.4a)$$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m, \quad (16.4b)$$

jossa χ_e, χ_m ovat sähköinen ja magneettinen susceptibiliteetti. Sähköinen permittiivisyys ja magneettinen permeabiliteetti ovat kytköksissä yhtälön

$$\epsilon\mu = c^{-2} \quad (16.5)$$

välityksellä, ja jossa c on valon nopeus.

Maxwellin yhtälöt voidaan ilmaista myös integraalimuodossa

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} + \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.6a)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.6b)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho dV, \quad (16.6c)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (16.6d)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (16.6e)$$

jossa A on mielivaltainen avoin pinta jonka suljettu reunakäyrä on ∂A ja V on mielivaltainen tilavuus jonka suljettu pinta on ∂V . Yllä olevien yhtälöiden perusteella kahden eri aineen lähteettömällä rajapinnalla on seuraavien ehtojen oltava voimassa

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (16.7a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0, \quad (16.7b)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{0}, \quad (16.7c)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (16.7d)$$

jossa \mathbf{n} on materiaalialueesta 2 alueeseen 1 osoittava yksikkönormaalivektori. Näistä neljästä ehdosta ainoastaan kaksi ovat toisistaan riippumattomia. Mikäli rajapinnalla esiintyy pintavaraus ρ_s tai pintavirta \mathbf{J}_s , rajapintaehdot on kirjoitettava muodossa

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (16.8a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s. \quad (16.8b)$$

Rajapintaehdoja on käsitelty tarkemmin lähteissä [22, Osa 1, sivut 61, 72, 137 ja 159] sekä [17, sivut 9-10].

16.2 Maxwellin yhtälön ratkaisujen luonteesta

Maxwellin yhtälöitä ratkaistaan harvoin niiden täydellisessä muodossa, vaan ongelman luonteesta riippuen saadaan helpommin ratkaistava systeemi jättämällä ratkaistavan ongelman kannalta merkityksettömät termit huomioon ottamatta. Se, mistä termeistä voidaan luopua, voidaan päätellä tarkastelemalla isotrooppisen ja lineaarisen aineen sähkömagneettista energiaa tilavuutta kohden

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (16.9)$$

Energiatiheyden aikaderivaataksi saadaan -joidenkin välivaiheiden jälkeen-

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (16.10)$$

jossa vektoria $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ kutsutaan Poyntingin vektoriksi, ja sitä merkitään usein symbolilla $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Integroimalla yli tarkasteltavan alueen V , saadaan sähkömagneettisen energian paikallisen säilymislain (16.9) integraalimuotoiseksi esitykseksi

$$\frac{d}{dt} \int_V w_{\text{em}} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV - \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (16.11)$$

jossa \mathbf{n} on alueen V reunapinnan yksikköulkonormaalivektori. Energian säilymislait (16.9) ja (16.11) tunnetaan Poyntingin teoreeman nimellä.

Materiaalikappaleen sähkömagneettinen energia voi siten muuttua kahdella tavalla: (i) lämmöksi teholla $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ tai (ii) säteilemällä reunapinnan läpi teholla \mathbf{S} . Eristeissä virrantiheys \mathbf{J} häviää ja energia siirtyy vain säteilemällä. Derivoimalla Ampéren-Maxwellin yhtälö (16.1a) puolittain ajalla, ja sijoittamalla magneettivuon tiheyden \mathbf{B} ja magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} välinen konstitutiivinen yhtälö, saadaan yhtälö $\nabla \times \mu^{-1} \dot{\mathbf{B}} = \ddot{\mathbf{D}}$, jossa aikaderivaattaa on merkitty symbolin yläpuolisella pisteellä. Sijoittamalla tähän Faradayn laki sekä sähkövuon tiheyden ja sähkökentän välinen konstitutiivinen yhteys, saadaan olettamalla permittiivisyys ja permeabiliteetti vakioksi yhtälö

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (16.12)$$

Sähkömagnetiikassa tarvitaan usein identiteettiä

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (16.13)$$

jossa Δ on Laplacen operattori ja jonka avulla yhtälö (16.12) saadaan muotoon

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (16.14)$$

Gaussin laista (16.1c) ja väliaineiyhtälöstä (16.2a) saadaan viimein muoto

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \rho, \quad (16.15)$$

joka on samaa tyyppiä kuin johdantoluvussa esiintynyt aaltoyhtälö (1.18), eli hyperbolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

Joissain tapauksissa siirrosvirta $\dot{\mathbf{D}}$ on merkityksetön (esim. sähkömoottoreissa) ja tällöin Maxwellin yhtälöt voidaan lausua muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (16.16a)$$

$$\nabla \times \mu^{-1} \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E}. \quad (16.16b)$$

Derivoimalla alempi yhtälöistä puolittain ajalla, sijoittamalla siihen Faradayn lain mukainen magneettivuon tiheyden aikaderivaatta sekä ottamalla identiteetti (16.13) huomioon, saadaan yhtälö

$$\sigma \mu \dot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \varrho. \quad (16.17)$$

Tämä on diffuusioyhtälön kaltainen parabolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö, katso lukua 1.4.

Yleisessä tapauksessa -olettaen kuitenkin materiaalivakioiden olevan paloittain vakioita- saadaan muoto

$$\mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \sigma \mu \dot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \nabla \varrho. \quad (16.18)$$

Tässä esiintyvien vakioiden $\mu \epsilon$ ja $\sigma \mu$ suhteista voidaan päätellä ratkaisun luonteenpiirteet. Ongelman luonteeseen vaikuttaa herätteen aikaskaalan suhde systeemin relaksaatioaikaan

$$t_r = \epsilon / \sigma. \quad (16.19)$$

Mikäli systeemin aikaskaala t_0 on huomattavasti relaksaatioaikaa suurempi, eli $t_0 \gg t_r$, käyttäytyvät Maxwellin yhtälöt dissipatiivisen parabolisen yhtälön luonteenpiirteiden mukaisesti. Vastaavasti yhtälöiden aaltoluonne on hallitseva kun herätteen aikaskaala on huomattavasti relaksaatioaikaa pienempi, eli $t_0 \ll t_r$.

Relaksaatioaika saadaan sähkövarauksen säilymisyhtälöstä (16.1e) kun sijoitetaan siihen väliaine-yhtälöt (16.2c) ja (16.2a), jolloin saadaan

$$\dot{\varrho} + \frac{\sigma}{\epsilon} \varrho = 0, \quad (16.20)$$

joka on tavallinen differentiaaliyhtälö. Sen ratkaisu on tunnetusti muotoa

$$\varrho(x, t) = \varrho(x, 0) \exp(-ct/\sigma). \quad (16.21)$$

16.3 Staattiset kentät

Mikäli sähkömagneettiset kentät ovat ajallisesti muuttumattomia niin kytkentä sähkö- ja magneettikentän suureiden väliltä häviää ja ne voidaan ratkaista toisistaan riippumatta. Staattista sähkökenttää kuvaavat yhtälöt ovat

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (16.22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \quad (16.22b)$$

jotka toteavat staattisen sähkökentän pyörteettömyyden ja että varaustiheys on sähkövuon lähde. Magnetostaattiset kenttäyhtälöt ovat vastaavasti

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (16.23a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (16.23b)$$

Tarkastellaan ensin sähköstaattista tapausta. Yhtälöstä (16.22a) nähdään, että sähkökentän voimakkuusvektori \mathbf{E} on pyörteetön. Tällöin se voidaan esittää skalaarifunktion gradienttina $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Funktiota ϕ kutsutaan sähköstaattiseksi potentiaaliksi. Ottamalla väliaine-yhtälö (16.2a) huomioon, saadaan Gaussin laista Poissonin yhtälö

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho. \quad (16.24)$$

Sähköstatiikassa kaikki materiaalit ovat joko johteita tai ideaalisia eristeitä. Vähäisessä määrin johtava eriste on sähköstatiikassa käsiteltävä johtena, vaikkakin stationäärisen tilan saavuttaminen tapahtuu hitaammin kuin johteella. Stationäärisen tilan saavuttamiseen tarvittavaa aikaa voi arvioida relaksaatioajan (16.19) avulla.

Johdekappaleen reunalla sähkökentän on toteutettava reunaehto

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (16.25)$$

jossa \mathbf{n} on reunapinnan Γ normaalivektori. Täten sähkökentän on oltava reunalla sen normaalin suuntainen. Potentiaalın ϕ gradienttina \mathbf{E} on kohtisuorassa vakio-potentiaalipintoja vastaan, joten johdekappaleen reunapinta on vakio-potentiaalipinta, eli

$$\phi = \phi_0, \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (16.26)$$

Johdekappaleen sisällä ei ole varauksia, joten sen sisällä ei ole sähkökenttääkään, eli $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Varaukset keskittyvät johteen pinnalle ohueksi kerrokseksi, jota voidaan kuvata pintavarauksella ρ_s .

Yhtälön (16.24) ratkaisu reunaehdolla (16.26) ei tuota elementtimenetelmälle vaikeuksia. Se voidaan ratkaista jo aikaisemmin esitetyllä tekniikalla.

Magnetostaattinen kenttä saadaan ratkaisemalla yhtälöt (16.23a) ja (16.23b). Magneettivuon tiheys on yhtälön (16.23b) perusteella lähteetön. Täten se voidaan lausua vektorikentän roottorina, eli $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}$ Ampéren lakiin (16.23a), saadaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö vektoripotentiaalın \mathbf{A} ratkaisemiseksi:

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}. \quad (16.27)$$

On huomattava, että yhtälössä (16.27) oleva kaksoisroottorioperaattorin ydin ei ole tyhjä joukko. Tämä voidaan nähdä seuraavasti. Oletetaan, että \mathbf{A} on yhtälön (16.27) ratkaisu, tällöin myös mikä tahansa muotoa $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ oleva vektorikenttä

on yhtälön (16.27) ratkaisu, jossa f on mielivaltainen skalaarifunktio. Yksikäsitteisyys saavutetaan vaatimalla divergenssiehdon

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (16.28)$$

toteutuminen. Yhtälö (16.28) on nimeltään Coulombin ehto. Dynaamisen kenttätehtävän tapauksessa käytetään usein Lorenzin ehtoa. Siihen palataan myöhemmin. On huomattava, että magneettivuon tiheys \mathbf{B} on kuitenkin yksikäsitteisesti määrätty vaikka vektoripotentiali \mathbf{A} ei ole.

16.4 Vektoripotentialiyhtälön numeerinen ratkaisu

16.4.1 Heikko muoto

Yhtälön (16.27) ratkaiseminen Galerkinin keinon elementtimenetelmällä käyttäen vektoripotentialin jokaiselle komponentille solmuinterpolaatiofunktioita osoittautui fiaskoksi. Ongelman ydin on vektoripotentiali \mathbf{A} :n jatkuvuudessa eri materiaalipintojen ja numeerisessa ratkaisussa elementtien rajapintojen yli. Yhtälön (16.27) heikko muoto saadaan tavanomaiseen tapaan kertomalla se puolittain vektoriarvoisella painofunktiolla $\hat{\mathbf{A}}$ ja integroimalla ratkaisualueen yli:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot [\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})] dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV. \quad (16.29)$$

Symmetrinen Galerkinin keinon mukainen elementtimenetelmä saadaan kun derivointioperaatiota siirretään painofunktiolle. Gaussin lauseen, eli divergenssikaavan käyttöä varten palautetaan mieliin vektori-identiteetti

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}. \quad (16.30)$$

Sovelletaan tätä kaavaa suureisiin $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{A}}$ ja $\mathbf{b} = \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}$, saadaan yhtälö (16.29) muunnettua muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV, \quad (16.31)$$

josta se Gaussin lauseen avulla saadaan muotoon

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{A}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (16.32)$$

Vektorikolmitulon vaihdannaisuuden perusteella ristitulon ja pistetulon paikkaa voidaan vaihtaa, täten reunatermi voidaan muokata ja saadaan elementtimenetelmän perustaksi soveltuva heikko muoto

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Gamma_n} \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dA, \quad (16.33)$$

jossa Γ_n on reunan osa, jossa probleeman luonnollinen reunaehto on annettu.

Elementtikohtainen interpolaatio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{A}^{(e)} = \mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{A}}^{(e)} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{a}}^{(e)}, \quad (16.34)$$

jossa \mathbf{N} on interpolaatiofunktioit sisältävä matriisi. Heikosta muodosta (16.33) nähdään heti, että elementtikohtainen osuus systeemin kerroinmatriisista on tuttua muotoa

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad (16.35)$$

jossa \mathbf{B} -matriisi on roottorioperaattorin diskreetti vastine, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{N}$, ja lineaarisen isotrooppisen aineen väliainehtälössä matriisi $\mathbf{D} = \mu^{-1} \mathbf{I}$.

Rajoite-ehto (16.28) voidaan ottaa heikossa muodossa huomioon Lagrangen kertojamenettelyllä lisäämällä termit $\int (\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}) p dV$ ja $\int \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{A} dV$ heikon muodon (16.29) oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot [\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})] dV = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}) p dV + \int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (16.36)$$

Suorittamalla osittaisintegroinnit myös lisätyissä rajoitetermeissä, ja valitsemalla Lagrangen kertojat siten, että ne häviävät alueen reunalla Γ , joten

$$\int_{\Gamma} (p \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n} + \hat{p} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (16.37)$$

jolloin päädytään viimeinkin käyttökelpoiseen magnetostaattisen vektoripotentiaalformulaation heikkoon muotoon

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) dV + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \nabla p dV + \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{A} dV \\ = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Gamma_n} \hat{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})) dA. \end{aligned} \quad (16.38)$$

Valitsemalla Lagrangen kertojille elementti-iterpolaatio

$$p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}^{(e)} \quad \text{ja} \quad \hat{p} = \mathbf{N}_p \hat{\mathbf{p}}^{(e)}, \quad (16.39)$$

jossa $\mathbf{p}^{(e)}$ ja $\hat{\mathbf{p}}^{(e)}$ ovat solmupistearvoista koostuvia vektoreita, voidaan elementtikohtainen kerroinmatriisi kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{A}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(e)} & (\mathbf{C}^{(e)})^T \\ \mathbf{C}^{(e)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (16.40)$$

jossa $\mathbf{K}^{(e)}$ on sama kuin yhtälössä (16.35) ja rajoitematriisi $\mathbf{C}^{(e)}$ on muotoa

$$\mathbf{C}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{N} dV. \quad (16.41)$$

Lagrangen kertojille voidaan valita standardi C_0 -jatkuva solmuinterpolaatio, mutta vektoripotentiaalille ei voida käyttää komponenteittain C_0 -jatkuvaa solmuinterpolaatiota. Syy tähän on potentiaalivektorin \mathbf{A} tangentiaalikomponentin jatkuvuusvaatimus elementtien rajapintojen yli.

16.4.2 Ominaisarvotehtävä aikaharmoniselle sähkökentälle

Ennen tangentialisesti jatkuvien interpolaatiofunktioiden konstruoinnista, tarkastellaan hieman vektoripotentialiongelmia helpompaa tapausta. Otetaan lähtökohdaksi yhtälö (16.14), ja kirjoitetaan se nyt uudelleen muodossa

$$\epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (16.42)$$

Sijoitetaan tähän aikaharmoninen yrite $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$, jolloin yhtälöstä (16.42) saadaan ominaisarvotehtävä

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_0) = \omega^2 \epsilon \mathbf{E}_0 \quad \text{alueessa } \Omega. \quad (16.43)$$

Jätetään jatkossa alaindeksi 0 pois. Heikko muoto saadaan vastaavalla tavalla kuin vektoripotentialiyhtälöllekin, kerrotaan painofunktiolla $\hat{\mathbf{E}}$ ja integroidaan ratkaisualueen Ω yli. Osittaisintegroinnin jälkeen saadaan tulos

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dV - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{E}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E})] dA = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (16.44)$$

Vektorikolmitulon vaihdannaisuuden perusteella ristin ja pisteen paikka voidaan vaihtaa, joten reunatermin voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{E}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E})] dA = \int_{\Gamma} (\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dA = - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dA. \quad (16.45)$$

Mikäli probleemalle on annettu oleellinen reunaehto, resonaattorin tapauksessa $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, täten myös testifunktion $\hat{\mathbf{E}}$:n on toteutettava $\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$.

Globaali ominaisarvotehtävä on siten muotoa

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}, \quad (16.46)$$

jossa globaalit matriisit \mathbf{K} ja \mathbf{M} kootaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \epsilon \mathbf{N} dV. \quad (16.47)$$

Matriisi \mathbf{B} on roottorioperaattorin diskreetti vastine ja $\mathbf{D} = \mu^{-1} \mathbf{I}$, kuten matriisissa (16.35). Vektori \mathbf{u} sisältää globaalit vapausasteet.

16.5 Roottoriyhhteensopivat kantafunktiot

Tarkastellaan aluksi probleeman (16.43) ratkaisua tasossa. Yksinkertaisin mahdollinen elementti on lineaarinen kolmioelementti. Vaatimalla vektorin \mathbf{E} tangentialikomponentin jatkuvuus elementin rajapintojen yli, on luonnollista valita vapausasteeksi vektorin tangentialikomponentti elementin kolmella reunaviivalla.

Lähdetään kuitenkin liikkeelle tavanomaisesta solmuinterpolaatiosta sähkökentän voimakkuusvektorin \mathbf{E} kummallekin komponentille, eli

$$E_x = L_1 E_{x1} + L_2 E_{x2} + L_3 E_{x3}, \quad \text{ja} \quad E_y = L_1 E_{y1} + L_2 E_{y2} + L_3 E_{y3}, \quad (16.48)$$

jossa L_i :t ovat kolmion alakoordinaatit. Kuvan 16.1 mukaisesti sivun i , joka yhdistää solmut i ja $i+$ vektorin \mathbf{E} tangentialikomponentti on $E_{si} = \mathbf{s}_i^T \mathbf{E}$. Tarvittavat kolme lisärajoitetta saadaan kun vaaditaan tangentialikomponentti vakioksi koko sivun pituudella. Sivun i -suuntaisen yksikkotangenttivektorin lausekkeeksi saadaan

$$\vec{s}_i = \left[(x_{i+1} - x_i)\vec{i} + (y_{i+1} - y_i)\vec{j} \right] / \ell_i, \quad (16.49)$$

jossa ℓ_i on sivun i pituus, $\ell_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. Yksikkotangenttivektori \mathbf{s} voidaan lausua myös alakoordinaattien määrittelyssä käytettävien kertoimien b_i ja c_i avulla, katso lukua 4:

$$\vec{s}_i = (c_i \vec{i} - b_i \vec{j}) / \ell_i. \quad (16.50)$$

Sivun i suuntainen \mathbf{E} :n tangentialikomponentin interpolaatio on tietenkin

$$E_{si} = \mathbf{s}_i^T (L_i \mathbf{E}_i + L_{i+} \mathbf{E}_{i+}), \quad (16.51)$$

joka voidaan kirjoittaa sivun reunan suuntaisen dimensiottoman koordinaatin $\zeta \in (-1, 1)$ funktiona muodossa (katso kuvaa 16.1)

$$E_{si} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+}) + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_{i+} - \mathbf{E}_i) \zeta. \quad (16.52)$$

Vaatus tangentialikomponentin vakioisuudesta voidaan siten toteuttaa seuraavien kahden ehdon avulla

$$\mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+}) = 2E_{si}, \quad (16.53a)$$

$$\mathbf{s}_i^T (\mathbf{E}_{i+} - \mathbf{E}_i) = 0, \quad (16.53b)$$

jotka auki kirjoitettuna ovat

$$c_{i-} (E_{xi+} + E_{xi}) - b_{i-} (E_{yi+} + E_{yi}) = 2E_{si} \ell_i, \quad (16.54a)$$

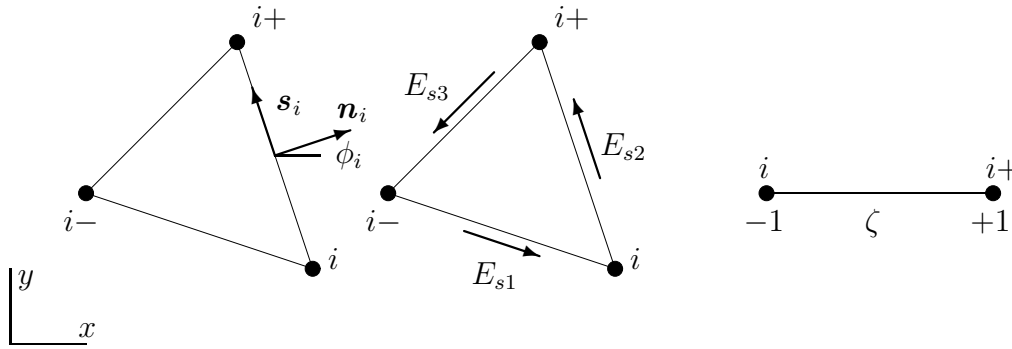
$$c_{i-} (E_{xi+} - E_{xi}) - b_{i-} (E_{yi+} - E_{yi}) = 0. \quad (16.54b)$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$c_{i-} E_{xi+} - b_{i-} E_{yi+} = E_{si} \ell_i, \quad (16.55)$$

ja vähentämällä yhtälöstä (16.54a) alempi yhtälö (16.54b) saadaan vastaavasti

$$c_{i-} E_{xi} - b_{i-} E_{yi} = E_{si} \ell_i. \quad (16.56)$$



Kuva 16.1: Lineaarinen särmäelementti.

Yhtälön (16.55) ilmaisema ehto on oltava voimassa myös sivulla $i-$, joten yhdistämällä tämän sivun yhtälö ehdon (16.56) kanssa johtaa yhtälösystemiin

$$c_{i-}E_{xi} - b_{i-}E_{yi} = E_{si}\ell_i, \quad (16.57a)$$

$$c_{i-}E_{xi} - b_{i-}E_{yi} = E_{si-}\ell_{i-}. \quad (16.57b)$$

Koska solmu $i-$ on sama kuin $i+$, voidaan eliminoida solmutuntemattomat E_{xi} ja E_{yi} ratkaista yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} c_{i-} & -b_{i-} \\ -c_{i+} & b_{i+} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{si}\ell_i \\ -E_{si-}\ell_{i-} \end{Bmatrix}. \quad (16.58)$$

Merkitään kerroinmatriisiin determinanttia $D_i = c_{i-}b_{i+} - b_{i-}c_{i+}$, joten ratkaisu on

$$E_{xi} = (b_{i+}\ell_i E_{si} - b_{i-}\ell_{i-} E_{si-})/D_i, \quad (16.59a)$$

$$E_{yi} = (c_{i+}\ell_i E_{si} - c_{i-}\ell_{i-} E_{si-})/D_i. \quad (16.59b)$$

Kirjoitetaan nyt interpolaatio (16.48) auki

$$E_x = \sum_{i=1}^3 L_i D_i^{-1} (b_{i+} E_{si} - b_{i-} E_{si-}) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{b_{i+}}{D_i} L_i - \frac{b_{i-}}{D_{i+}} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}, \quad (16.60a)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^3 L_i D_i^{-1} (c_{i+} E_{si} - c_{i-} E_{si-}) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{c_{i+}}{D_i} L_i - \frac{c_{i-}}{D_{i+}} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}. \quad (16.60b)$$

Koska $D_i = D_{i+} = 2A^{(e)}$ havaitaan, että alakordinaattien kertoimissa esiintyvät derivaatat

$$E_x = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_{i+}}{\partial x} L_i - \frac{\partial L_i}{\partial x} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}, \quad (16.61a)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_{i+}}{\partial y} L_i - \frac{\partial L_i}{\partial y} L_{i+} \right) \ell_i E_{si}. \quad (16.61b)$$

Vektorimuodossa lineaarinen särmäinterpolaatio voidaan kirjoittaa yksinkertaisessa muodossa

$$\mathbf{E} = \mathbf{N}\mathbf{e}^{(e)}, \quad (16.62)$$

jossa elementin solmupistevektori on $\mathbf{e}^{(e)} = [E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}]^T$, ja interpolaatiofunktio-
matriisi \mathbf{N} on muotoa

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3], \quad \text{jossa} \quad \mathbf{N}_i = (L_i \nabla L_{i+} - L_{i+} \nabla L_i) \ell_i. \quad (16.63)$$

Helposti nähdään, että särmäinterpolaatiofunktio toteuttavat yhtälöt

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_i = \ell_i [\nabla \cdot (L_i \nabla L_{i+}) - \nabla \cdot (L_{i+} \nabla L_i)] = 0, \quad (16.64a)$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_i = \ell_i [\nabla \times (L_i \nabla L_{i+}) - \nabla \times (L_{i+} \nabla L_i)] = 2\ell_i \nabla L_i \times \nabla L_{i+}. \quad (16.64b)$$

Interpolaatiossa (16.63) gradienttitermit ovat vakioita, joten särmään i liittyvä interpolaatiofunktio on muotoa

$$\mathbf{N}_i = \frac{\ell_i}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_{i+} L_i - b_i L_{i+} \\ c_{i+} L_i - c_i L_{i+} \end{bmatrix}. \quad (16.65)$$

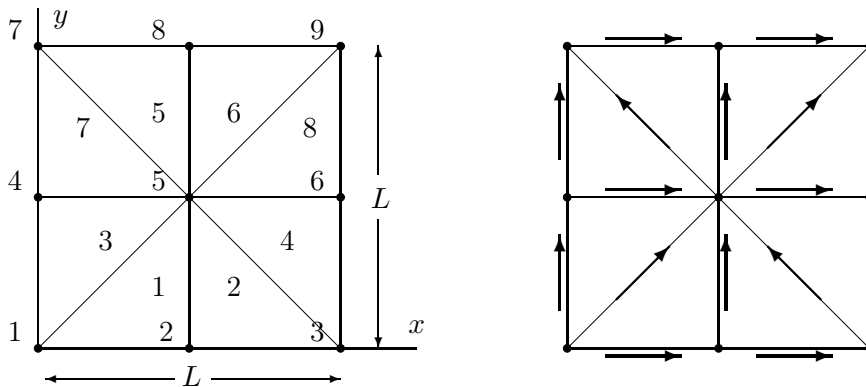
Särmään i liittyvä osuus matriisista $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{N}$ on skalaari

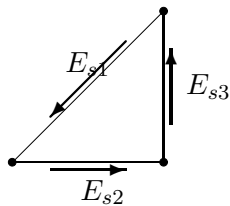
$$B_i = \frac{\ell_i}{2(A^{(e)})^2} [c_{i+} b_i - c_i b_{i+}], \quad (16.66)$$

joten koko 1×3 -matriisi \mathbf{B} on

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2(A^{(e)})^2} \begin{bmatrix} (c_2 b_1 - c_1 b_2) \ell_1 & (c_3 b_2 - c_2 b_3) \ell_2 & (c_1 b_3 - c_3 b_1) \ell_3 \end{bmatrix}. \quad (16.67)$$

Esimerkki 16.1 Tarkastellaan teräsreunoilla ympäröidyn ilmaonkalon värähtelytaajuuksien määrittämistä alla olevan kuvan mukaisessa neliöalueessa ja siinä esiteyllä elementtiverkolla. Kyseessä on ns. resonaattoriongelma.





Kaikki elementit ovat samanlaisia kun paikalliset solmut numeroidaan samalla tavalla. Muodostetaan siten vain elementin 1 kerroinmatriisi ja yllä olevan kuvan mukaisella solmunumeroinnilla:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2}L, \quad b_3 = \frac{1}{2}L, \quad c_1 = \frac{1}{2}L, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{2}L, \\ \ell_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}L, \quad \ell_2 = \ell_3 = \frac{1}{2}L, \quad (16.68)$$

jolloin saadaan

$$\mathbf{B} = \frac{4}{L} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.69)$$

Elementtimatriisi on siten

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.70)$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(3)} = \mathbf{K}^{(6)} = \mathbf{K}^{(8)} \quad (16.71)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(4)} = \mathbf{K}^{(5)} = \mathbf{K}^{(7)} \quad (16.72)$$

Elementtien paikallisten vapausasteiden liittyminen globaaleihin vapausasteisiin on esitetty alla olevassa taulukossa.

i	1	2	3	5	6	7	8
1	1	3	1	6	8	6	8
2	-	2	4	-	5	7	-
3	2	-	-	4	-	-	7

Globaali matriisi \mathbf{K} on

$$\mathbf{K} = \quad (16.73)$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(3)} & K_{13}^{(1)} & 0 & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_{33}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(4)} & 0 & K_{13}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{22}^{(3)} + K_{33}^{(5)} & 0 & K_{31}^{(5)} & 0 & 0 \\ & & & & K_{33}^{(4)} + K_{22}^{(6)} & 0 & 0 & K_{21}^{(6)} \\ & & & & & K_{11}^{(5)} + K_{11}^{(7)} & K_{12}^{(7)} & 0 \\ & & & & & & K_{22}^{(7)} + K_{33}^{(8)} & K_{31}^{(8)} \\ \text{symm.} & & & & & & & K_{11}^{(6)} + K_{11}^{(8)} \end{array} \right],$$

josta saadaan

$$\mathbf{K} = \frac{2}{\mu} \left[\begin{array}{cccccccc} 4 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ & & & & & 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ & & & & & & 2 & -\sqrt{2} \\ \text{symm.} & & & & & & & 4 \end{array} \right] = \mu^{-1} \tilde{\mathbf{K}}. \quad (16.74)$$

Matriisiin $\mathbf{M}^{(e)}$ alkot ovat muotoa

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \epsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dA. \quad (16.75)$$

Särmään i liittyvä interpolaatiofunktio on

$$\mathbf{N}_i = \frac{\ell_i}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_{i+}L_i - b_iL_{i+} \\ c_{i+}L_i - c_iL_{i+} \end{bmatrix}, \quad (16.76)$$

joten

$$\mathbf{N}_1 = 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} -L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} L_2 + L_3 \\ -L_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} -L_1 \\ L_1 + L_3 \end{bmatrix}. \quad (16.77)$$

Matriisin $\mathbf{M}^{(e)}$ komponenteiksi saadaan alakoordinaattien integrointikaavaa (4.59) käyttäen lausekkeet

$$M_{11}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 8(L_1^2 + L_2^2) dA = \frac{1}{3}\epsilon L^2, \quad (16.78)$$

$$M_{12}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2\sqrt{2}(-L_1L_2 - L_1L_3 + L_2^2) dA = 0, \quad (16.79)$$

$$M_{13}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2\sqrt{2}(L_1^2 - L_1L_2 - L_2L_3) dA = 0, \quad (16.80)$$

$$M_{22}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} ((L_2 + L_3)^2 + L_2^2) dA = \frac{1}{12}\epsilon L^2, \quad (16.81)$$

$$M_{23}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} 2(-L_2L_1 - L_2L_3) dA = -\frac{1}{24}\epsilon L^2, \quad (16.82)$$

$$M_{33}^{(e)} = \epsilon \int_{\Omega^{(e)}} (L_1^2 + (L_2 + L_3)^2) dA = \frac{1}{12}\epsilon L^2. \quad (16.83)$$

Koska globaaliin matriisiin ei tule yhtään elementtien $M_{23}^{(e)}$ -alkiota, on \mathbf{M} matriisi diagonaalinen

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{1}{6}\epsilon L^2 \text{diag}(4, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 4) = \epsilon L^2 \tilde{\mathbf{M}}. \quad (16.84)$$

Syntynyt algebrallinen ominaisarvotehtävä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{\mathbf{K}} = \lambda \tilde{\mathbf{M}} \quad (16.85)$$

jossa on merkitty

$$\lambda = \omega^2 \mu \epsilon L^2. \quad (16.86)$$

Ratkaisemalla ominaisarvot λ yhtälöstä (16.85) saadaan kulmataajuudelle ω arvo

$$\omega = \sqrt{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon L}} = \sqrt{\lambda} \frac{c}{L}, \quad (16.87)$$

jossa c on valon nopeus onkalossa. Ratkaisuksi saadaan ominaisarvot

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0, & \omega_1 & = 0, \\ \lambda_2 = 4,5838, & \omega_1 & = 2,141, \\ \lambda_3 = 4,5838, & \omega_1 & = 2,141, \\ \lambda_4 = 12,000, & \omega_1 & = 3,464, \\ \lambda_5 = 24,000, & \omega_1 & = 4,899, \\ \lambda_6 = 31,416, & \omega_1 & = 5,605, \\ \lambda_7 = 31,416, & \omega_1 & = 5,605, \\ \lambda_8 = 36,000, & \omega_1 & = 6,000. \end{array}$$

