MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 7, kevät 2015

1. Erään liikkeen kuvaus materiaalikoordinaattien X_K avulla on annettu muodossa

$$x_1 = \exp(\alpha t)X_1 - \exp(-\alpha t)X_2, \quad x_2 = \exp(\alpha t)X_1 + \exp(-\alpha t)X_2, \quad x_3 = X_3.$$

   Määritä nopeuden ja kiihtyvyyden lausekkeet materiaali- ja spatiaalikoordinaattien avulla, eli $V_K = V_K(X_L, t), A_K = A_K(X_L, t)$ ja $v_i = v_i(x_k, t), a_i = a_i(x_k, t)$.

2. Liike on annettu muodossa

$$x_1 = \frac{X_1}{1 + tX_1}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

   Määritä tiheys ρ sekä materiaalikoordinaattien $\mathbf{X}$ että spatiaalikoordinaattien $\mathbf{x}$ avulla (i) integroimalla jatkuvuusyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \mathrm{div}\mathbf{v} = 0,$$

   ja (ii) deformaatiogradientin avulla.

3. Kaksidimensioinen deformaatio on annettu lausekkeilla

$$x_1 = 4L - 2X_1 - X_2, \quad x_2 = 2L + \tfrac{3}{2}X_1 - \tfrac{1}{2}X_2.$$

   Määritä deformaatiogradientti ja sen käänteiskuvaus ja tutki mihin neliö $0 \leq X_1, X_2 \leq L$ kuvautuu deformoituneessa tilassa. Määritä materiaalisen vektorin $\boldsymbol{a}_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ kuva $\boldsymbol{a}$ deformoituneessa tilassa. Määritä myös materiaalinen vektori $\boldsymbol{b}_0$, jonka kuva on spatiaalinen vektori $\boldsymbol{b} = (1, 0)^T$.

Palautustehtävä: Yhtälö $x = (1 + t/t_0)X,\ x \in [0, 2L]$ määrittelee yksidimensioisen kappaleen (sauva) liikkeen.

- Määritä Greenin-Lagrangen venymätensorin materiaalinen aikaderivaatta $\dot{\mathbf{E}}$.
- Määritä Eulerin-Almansin venymätensorin materiaalinen aikaderivaatta $\dot{\mathbf{e}}$.
- Määritä venymänopeustensori $\mathbf{d}$.
- Näytä oikeiksi kaavat $\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}$ ja $\mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} + \mathbf{e}\mathbf{l}$, jossa $\mathbf{l}$ on spatiaalinen nopeusgradientti.
- Sauvassa vallitsee lämpötilajakauma $T = T_0(X/L)(t/t_0)^2$. Mikä on lämpötilajakauman spatiaalinen kuvaus $T(x, t)$? Määritä $T(x, t)$:n avulla lämpötilan materiaalinen aikaderivaatta $\dot{T}$ ja totea, että se on sama kuin $\mathrm{d}T(X, t)/\mathrm{d}t$.

Greenin-Lagrangen venymätensori määritellään

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}),$$

ja Almansin venymätensori puolestaan

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}).$$

Almansin muodonmuutostensori on spatiaalinen eli euleriaaninen muodonmuutosmitta ja nimensä mukaisesti Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori on materiaalinen tensori.