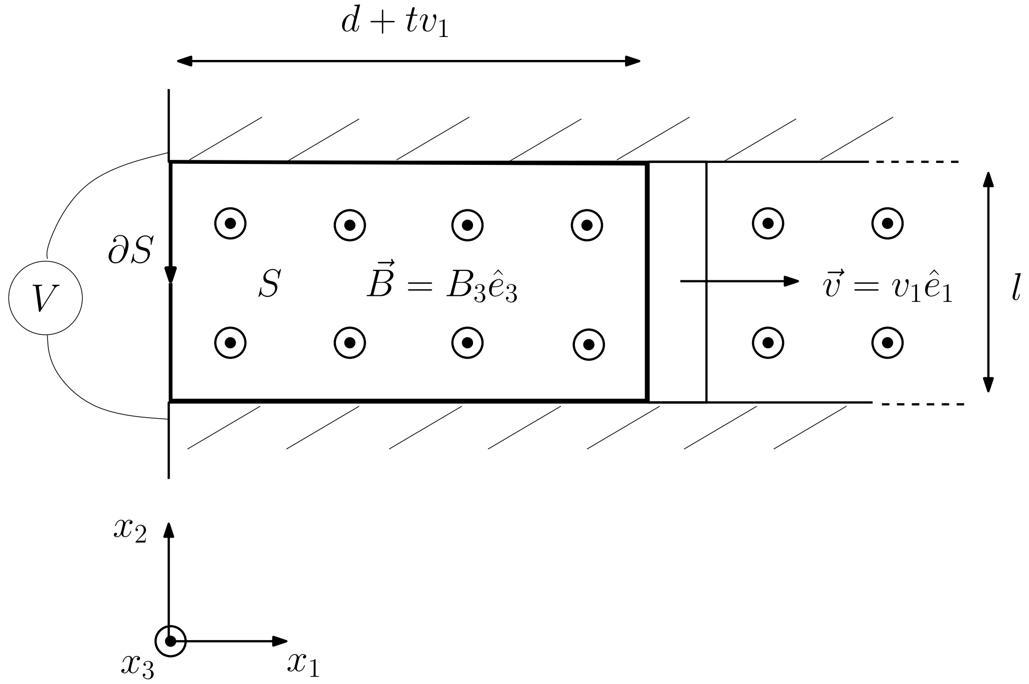
MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 6, kevät 2015
Tuomas Kovanen

Tehtävä 1: Tarkastellaan luentojen esimerkkiä, jossa johdepalkki liikkuu kahden johdelevyn välissä homogeenisessä magneettikentässä, ks. kuva. Kuvassa on piirretty tilanne ortonormaalin kannan $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ määräämään Karteesiseen koordinaatistoon ajanhetkellä t. Kanta $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ on ortonormaali pistetulolla $\cdot$ mitattuna.



Tarkastellaan Faradayn lakia pinnan S tapauksessa, ja tulkitaan pinnan venymisen vaikutus pinnan läpäisevään magneettivuohon muuttuvan pistetulon avulla. Muutetaan siis pituuksien ja kulmien referenssiä siten, että uutta referenssiä vasten mitattuna pinta pysyy ajan suhteen muuttumattomana. Tämä tarkoittaa, että käytämme uutta pistetuloa $\cdot'$, jolla mitattuna kanta $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$, jossa

$$\begin{aligned}
\hat{e}'_1 &= \frac{d + tv_1}{d}\hat{e}_1, \\
\hat{e}'_2 &= \hat{e}_2, \\
\hat{e}'_3 &= \hat{e}_3,
\end{aligned}$$

on ortonormaali. Huomaa, että ajanhetkellä $t = 0$, kanta $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ täsmää kannan $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ kanssa.

Nyt jokaisella ajanhetkellä t mikä tahansa piste $\vec{x} \in S$ voidaan antaa muodossa $\vec{x} = \sum_i x_i \hat{e}_i$ mutta myös muodossa $\vec{x} = \sum_i x'_i \hat{e}'_i$. (Koordinaatit x_i ovat pisteen $\vec{x}$ Eulerin koordinaatit ja koordinaatit x'_i sen Lagrangen koordinaatit[1].) Merkitään $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ja $\boldsymbol{x'} = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$.

(a) Anna koordinaatit x_i koordinaattien x'_i ja ajan t funktiona. Määritä siis kuvaus $\boldsymbol{\chi}$ siten, että $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x'}, t)$, eli komponenteittain $x_i = \chi_i(x'_1, x'_2, x'_3, t)$.

(b) Määritä nopeusvektorikenttä $\vec{v}$ pinnalla S lausekkeesta

$$\vec{v}(\vec{x'}, t) = \sum_i \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(x'_1, x'_2, x'_3, t)\hat{e}_i.$$

Anna $\vec{v}$:n komponentit kannassa $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ koordinaattien x_i funktiona. Tarkista, että kun $x_1 = d + tv_1$ niin nopeus on $v_1\hat{e}_1$.

(c) Perustele luennoilla esitetty tulos

$$\int_{\partial S} \vec{v} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -B_3 v_1 l.$$

(Vektorikenttä $\vec{v}$ on nyt määritelty koko pinnalla S.)

Lasketaan vielä lopuksi pinnan S läpäisevän magneettivuon aikaderivaatta lausekkeesta $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \int_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}' \mathrm{d}a'$, jossa $\vec{B}'$ on pistetulon $\cdot'$ suhteen määritetty magneettivuontiheysvektorikenttä. Merkitään

$$\vec{B}' = B'_1\hat{e}'_1 + B'_2\hat{e}'_2 + B'_3\hat{e}'_3,$$
$$\boldsymbol{B'} = (B'_1, B'_2, B'_3)^T,$$

ja

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3,$$
$$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)^T.$$

Harjoitusten 1 perusteella tiedämme, että

$$\boldsymbol{B'} = |\det F| F^{-1} \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

jossa

$$F = \begin{pmatrix} \frac{d+tv_1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Kontinuumimekaniikassa Eulerin ja Lagrangen koordinaatteja käytetään materiaalikappaleisiin kuuluville pisteille, mutta tässä vastaavia koordinaatteja voidaan käyttää myös ilma-alueen pisteille, kun jäykän kappaleen liike tulkitaan ilma-alueen venymisenä.

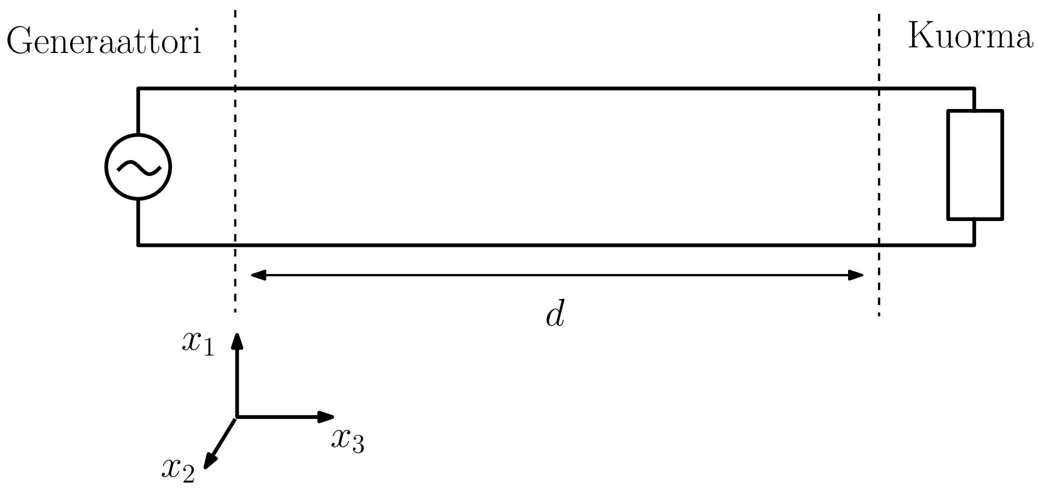
(Matriisi F vastaa kontinuumimekaniikan “deformaatiogradienttia”.)

(d) Näytä yhtälön (1) avulla, että

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}'\mathrm{d}a' = -B_3 v_1 l,$$

jossa siis pinta S ei muutu ajan suhteen vasemman puolen integraalissa.

Tehtävä 2: Tarkastellaan aikaharmonista mallia pitkässä ja kapeassa johdinparissa etenevälle sähkömagneettiselle aallolle, ks. kuva. Mallinnetaan johtimet ja niitä ympäröivät eristeet ideaalisina (ei lämpöhäviöitä).



Aikaharmonisessa mallissa jännitteen $U(x_3,t)$ ja virran $I(x_3,t)$ aikariippuvuus on sinimuotoista:

$$U(x_3,t) = \mathrm{Re}\{\bar{U}(x_3)e^{j\omega t}\},$$
$$I(x_3,t) = \mathrm{Re}\{\bar{I}(x_3)e^{j\omega t}\},$$

jossa $\bar{U}(x_3)$ ja $\bar{I}(x_3)$ ovat kompleksiset jännite ja virta.

(a) Hae reaaliosan $\mathrm{Re}\{\bar{U}(x_3)e^{j\omega t}\}$ lauseke. (Anna ensin kompleksiluku $\bar{U}(x_3)$ osoitinmuodossa $|\bar{U}(x_3)|e^{j arg(\bar{U}(x_3))}$.)

Jännite U ja virta I ovat tätä muotoa jos

(i) generaattorin jännite on aikaharmoninen (sinimuotoinen),

(ii) materiaalit (generaattorissa, johdinparissa ja kuormassa) ovat lineaarisia,
(iii) generaattorin jännite on ollut kytkettynä tarpeeksi kauan aikaa jotta aalto on edennyt järjestelmän joka osaan (transientit ovat vaimentuneet).

Luennoilla näytettiin, että jännite ja virta toteuttavat 1D-aaltoyhtälön x_3-suunnassa, esim.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

(b) Näytä, että aikaharmonisessa tapauksessa tämä voidaan pakottaa toteutuvaksi vaatimalla

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}}{\mathrm{d}x_3^2} = \gamma^2\bar{U}, \tag{2}$$

jossa $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$.

(c) Näytä, että kaikki muotoa

$$\bar{U}(x_3) = U_0^+ e^{-\gamma x_3} + U_0^- e^{\gamma x_3},$$

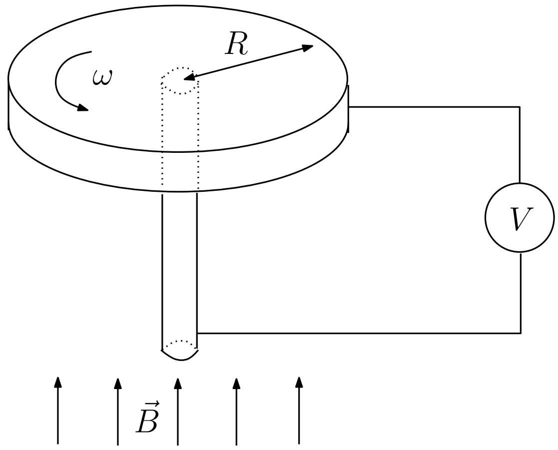
jossa U_0^+ ja U_0^- ovat vakioita, olevat funktiot käyvät ratkaisuksi yhtälölle (2).

(d) Hae termiä $U_0^+ e^{-\gamma x_3}$ vastaava aikatason ratkaisu. Perustele itsellesi, että tämä esittää generaattorilta kuormalle etenevää aaltoa. Mikä on aallon (vakiovaihepisteen) etenemisnopeus?

Tuntemattomat vakiot U_0^+ ja U_0^- voidaan kiinnittää antamalla reunaehdot kohdissa $x = 0$ ja $x = l$, jolloin ratkaisu määräytyy yksikäsitteiseksi. Esimerkiksi reunaehtoina voidaan kiinnittää $\bar{U}(0)$ ja $\bar{U}(l)/\bar{I}(l)$.

Tällaista pitkää ja kapeaa johdinparia, jolla ohjataan (tarkoituksella tai sattumalta) sähkömagneettisia aaltoja, sanotaan siirtolinjaksi (engl. transmission line).

Palautustehtävä: Tarkastellaan kulmanopeudella ω pyörivän homopolaarigeneraattorin tuottamaa jännitettä V, ks. kuva 1. Määritä jännitemittarin jännite V magneettivuontiheyden pystysuuntaisen komponentin B, kulmanopeuden ω ja säteen R funktiona. Opastus: sovella Faradayn lakia sopivan ajassa muuttuvan pinnan tapauksessa.



Kuva 1: Pyörivä kiekko ja siinä kiinni oleva tanko ovat ei-magnetoituvaa johdemateriaalia (esim. alumiinia). Jännitemittari on kytketty harjaksin pyörivään osaan (mittari ei pyöri). Kiekko on kohtisuorassa homogeenista ajan suhteen muuttumatonta magneettikenttää vasten.

Täydentävää tietoa: Palautustehtävän sähkömekaaninen järjestelmä toimii myös toiseen suuntaan: kytkemällä jännitemittarin paikalle jännitelähde, saadaan paikallaan oleva johdekiekko pyörimään. Tämän kaltaisen homopolaarimoottorin voit tehdä helposti kiinnittämällä (johtavan) nappimagneetin sormipariston päähän, ja kytkemällä kuparijohtimen sormipariston vastakkaisesta päästä nappimagneetin reunaan.