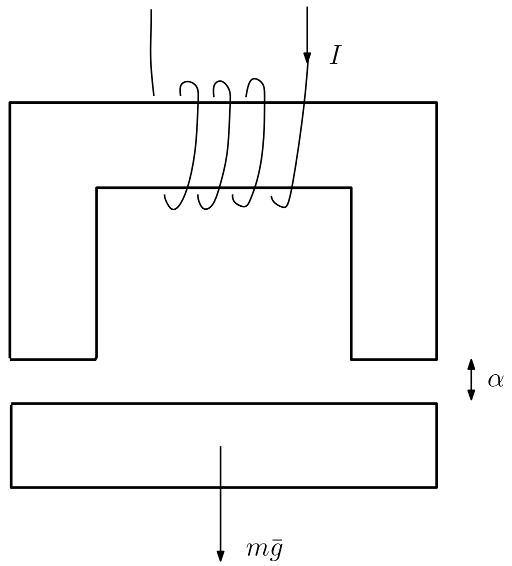
MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 5, kevät 2015
Tuomas Kovanen

Tehtävä 1: Näytä, että 2D-magnetostaattisessa mallissa, jossa $\vec{B} = \text{curl}(A_3\hat{e}_3)$, homogeeninen Neumannin reunaehto

$$\text{grad}A_3 \cdot \vec{n} = 0$$

kiinnittää $\vec{H}$:n tangentiaalisen komponentin reunalla nollaksi. (Vihje: $\text{curl}(A_3\hat{e}_3) = \text{grad}A_3 \times \hat{e}_3$.)

Tehtävä 2: Miksi ei ole hyvä ajatus yrittää leijuttaa rautapalkkia sähkömagneetilla, ks. kuva? Mallinna järjestelmä magneettipiirinä ja määritä rautapalkkiin kohdistuva magneettinen voima.



Tehtävä 3: Tarkastellaan sähkömekaanista järjestelmää jossa tunnemme magneettikenttään varastoituneen energian $U(\boldsymbol{\alpha}, \Phi)$ liikkuvan osan (yleistettyjen) paikkakoordinaattien $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ja magneettivuon Φ funktiona. Luennoilla näytimme, että (yleistetyn) voiman komponentit F_i, $i = 1, \ldots, n$, saadaan derivoimalla funktiota U vastaavan paikkakoordinaatin α_i suhteen siten, että magneettivuo Φ pidetään vakiona. Formaalisti

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}_0, \Phi_0),$$

jossa derivaatta siis lasketaan “pisteessä” $(\boldsymbol{\alpha}_0, \Phi_0)$ joka vastaa sitä tilannetta jossa voima halutaan määrittää.

Vaihtoehtoisesti voima voidaan määrittä ns. *komplementaarisen energian* (lyhyesti *koenergian*) avulla. Koenergia U^c on $\boldsymbol{\alpha}$:n ja magneettijännitteen U_m funktio, joka määritellään energian avulla siten, että ehto

$$U(\boldsymbol{\alpha}, \Phi) + U^c(\boldsymbol{\alpha}, U_m) = \Phi U_m \tag{1}$$

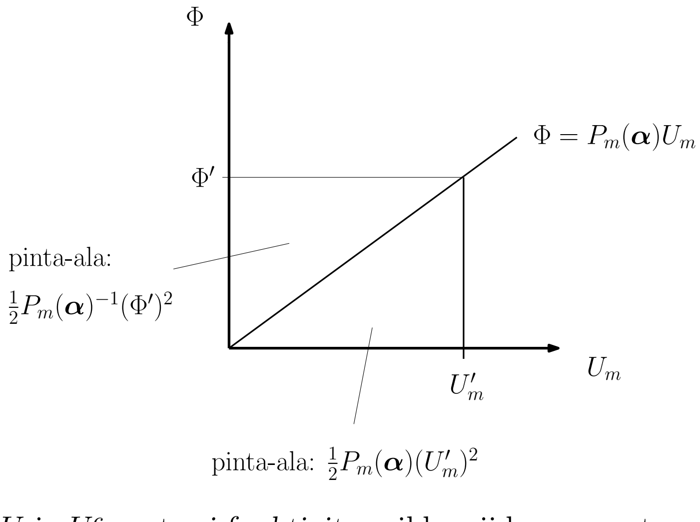
toteutuu. Koska U ei riipu U_m:stä ja U^c ei riipu Φ:stä niin tästä seuraa suoraan, että

$$\frac{\partial U^c}{\partial U_m} = \Phi \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial \Phi} = U_m. \tag{2}$$

Lineaaristen materiaalien tapauksessa, jolloin $U_m = R_m(\boldsymbol{\alpha})\Phi$, energia ja koenergia ovat

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\alpha}, \Phi) &= \frac{1}{2} R_m(\boldsymbol{\alpha})\Phi^2, \\ U^c(\boldsymbol{\alpha}, U_m) &= \frac{1}{2} P_m(\boldsymbol{\alpha}) U_m^2, \end{aligned}$$

jossa $P_m(\boldsymbol{\alpha}) = R_m(\boldsymbol{\alpha})^{-1}$, ks. kuva.



Huomaa, että U ja U^c ovat *eri funktioita* vaikka niiden saamat *arvot* ovat lineaarisessa tapauksessa aina samat.

(a) Näytä, että ehdot (1) ja (2) toteutuvat lineaaristen materiaalien tapauksessa.

(b) Todenna, että voima voidaan määrittää myös derivoimalla koenergiaa paikkakoordinaattien suhteen. Tarkemmin sanottuna

$$-\frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}_0, \Phi_0) = \frac{\partial U^c}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}_0, U_{m0}) \quad i = 1, \ldots, n,$$

jossa U_{m0} on magneettijännite, kun liikkuvan osan paikka on $\boldsymbol{\alpha}_0$. Opastus: Väite pätee jos ja vain jos

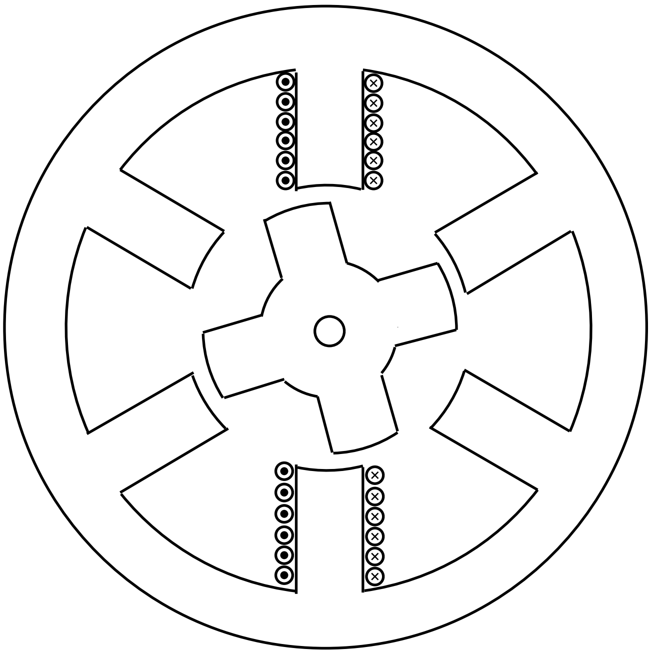
$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}_0, \Phi_0)\mathrm{d}\alpha_i = \sum_i \frac{\partial U^c}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}_0, U_{m0})\mathrm{d}\alpha_i \quad \forall \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Todentaaksemme, että (3) pätee, valitaan mielivaltainen infinitesimaalinen siirtymä $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Tarkastellaan liikettä $\boldsymbol{\alpha}(t)$ jolle pätee $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0$, ja joka toteuttaa kyseisen infinitesimaalisen siirtymän aikavälillä $\mathrm{d}t$, ts.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t}(0)\mathrm{d}t.$$

Valitaan sitten aikariippuvat funktiot $\Phi(t)$ ja $U_m(t)$ siten, että $\Phi(0) = \Phi_0$ ja $U_m(0) = U_{m0}$, ja yhdessä $\boldsymbol{\alpha}(t)$:n kanssa ne toteuttavat ehdon (1) kaikilla ajanhetkillä t. (Tällaiset funktiot $\Phi(t)$ ja $U_m(t)$ on aina olemassa: esimerkiksi $\Phi(t) = \Phi_0$ kaikilla t ja $U_m(t) = \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\boldsymbol{\alpha}(t), \Phi(t))$ kaikilla t.) Derivoi nyt yhtälöä (1) puolittain ajan suhteen ja tarkastele derivaattaa kohdassa $t = 0$. Käytä ketjusääntöä ja yhtälöitä (2).

Palautustehtävä: Oheisessa kuvassa on esitetty poikkileikkauskuva reluktanssimoottorista (engl. switched reluctance motor). Reluktanssimoottorin kilpailuvaltteja ovat sen pienet valmistuskustannukset ja luotettavuus: sen roottorissa käytetään materiaalina ainoastaa rautaa (ei tarvita esim. kestomagneetteja tai alumiinijohtimia). Myös staattorirunko on rautaa.



Selvitä verkosta tai kirjallisuudesta reluktanssimoottorin toimintaperiaate. Analysoi roottoriin kohdistuvaa momenttia, kun roottorin paikka on kuvan mukainen ja kuvaan merkittyihin käämeihin on kytketty virta I. Mallinna moottoria magneettipiirinä. (Merkitse tarvittavia mittoja symbolein.)