MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 4

1. Symmetrisen matriisin $\boldsymbol{A}$ karakteristinen yhtälö on

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0,$$

jossa kertoimet I_1, I_2, I_3 ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ pääinvariantit:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \\
I_2 &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) - (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2), \\
I_3 &= \det \boldsymbol{A} = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})^3 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) + \tfrac{1}{6}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3.
\end{aligned}$$

Johda invarianttien $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2), \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^3)$ lausekkeet pääinvarianttien I_1, I_2 ja I_3 avulla.

2. Isotrooppisen termoelastisen aineen konstitutiiviset yhtälöt voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 \\
&\quad \alpha_3 \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{g} + \alpha_4(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{g} + \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{g}\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_5 \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{q} &= \beta_1 \boldsymbol{g} + \beta_2 \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon}^2 \boldsymbol{g}, \\
W &= W(\theta, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^3, \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 \boldsymbol{g}),
\end{aligned}$$

jossa θ on lämpötila, $\boldsymbol{q}$ lämpövuovektori, $\boldsymbol{g} = \mathrm{grad}\theta$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ ovat muodonmuutos- ja jännitystensorit. Skalaarikertoimet $\alpha_0, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \ldots, \beta_3$ ovat funktion W argumentteina olevien kuuden skalaarinvariantin ja lämpötilan funktioita.

   (a) Termodynamiikan toisesta pääsäännöstä johdettu dissipaatioepäyhtälö on

$$-\frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{g}}{\theta} \geq 0.$$

   Mitä rajoitteita se asettaa edellä esitetylle mallille?

   (b) Kirjoita linearisoidut konstitutiiviset yhtälöt. Mitä riippuvuuksia jäljelle jääneillä kertoimilla voi olla?

Palautustehtävä: Ulkoinen magneettikenttä aiheuttaa ferromagneettisen aineeseen venymiä. Ilmiötä kutsutaan magnetostriktioksi. Isotrooppisen kimmoisen aineen magnetostriktiota mallintava muodonmuutosenergiafunktio W riippuu siten esimerkiksi muodonmuutostensorista $\boldsymbol{\varepsilon}$ ja magneettikentän voimakkuusvektorista $\boldsymbol{H}$ [A/m], eli $W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{H})$. Täten se voidaan lausua funktiona kuudesta invariantista

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6),$$

jossa $I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2, I_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^3, I_4 = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}, I_5 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{H}), I_6 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{H})$. Jännitys $\boldsymbol{\sigma}$ saadaan muodonmuutosenergiatiheydestä seuraavasti:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \mu_0\left(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{I}\right).$$

Termiä $\mu_0(\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})/2)\boldsymbol{I})$ kutsutaan Maxwellin jännitystensoriksi. Magneettivuon tiheyden $\boldsymbol{B}$ ja magneettikentän voimakkuuden $\boldsymbol{H}$ valinen konstitutiivinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}).$$

jossa μ_0 on tyhjiön magneettinen permeabiliteetti ($4\pi \cdot 10^{-7}$ [Vs/Am]). Magnetisaatio $\boldsymbol{M}$ saadaan muodonmuutosenergian W avulla seuraavasti:

$$\mu_0\boldsymbol{M} = -\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{H}}.$$

Muodosta energialauseke W siten, että jännityksen ja venymän välillä on lineaarinen riippuvuus ja että myös magneettinen käyttäytyminen on lineaarista, eli yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi)\boldsymbol{H},$$

jossa χ on aineen suskeptibilitetti (laaduton suure ja ferromagneettisille aineille $\chi \gg 1$).[1]

Mikäli $\boldsymbol{B}$ on x-akselin suuntainen, eli $\boldsymbol{B} = (B, 0, 0)^T$, määritä jännityksettömän kappaleen venymä x-akselin sekä sitä vastaan poikittaisessa suunnassa. Määritä myös magneettikentän aiheuttama tilavuudenmuutos.

Ohje: Kirjoita muodonmuutosenergian W lauseke invarianttien $I_i, i = 1, \ldots, 6$ polynomisarjakehitelmänä

$$W = \sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1,\ldots} \alpha_{ik} I_i^k,$$

jossa kertoimet α_{ik} voivat olla invarianttien funktioita. Vaadittu lineaarisuusvaatimus asettaa kertoimille α_{ik} ja sallituille invarianttien potensseille tiukat rajoitteet. Huomaa myös, että mikäli magneettikenttä häviää tuloksena pitää olla klassisen kimmoteorian mukaiset konstitutiiviset yhtälöt.

[1] Ferromagneettisten aineiden magneettinen käyttäytyminen on todellisuudessa hyvin epälineaarista.