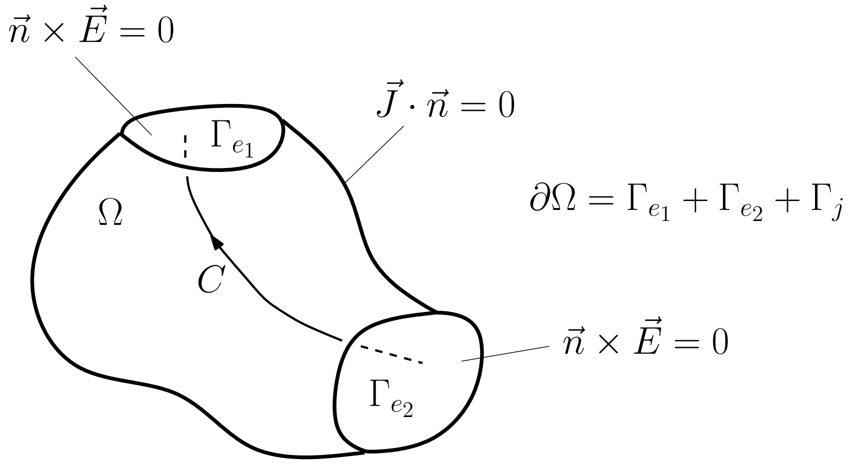
MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 3, kevät 2015
Tuomas Kovanen

Tehtävä 1: Tarkastellaan virtastationääristä mallia kuvan alueessa Ω, kun jännite

$$U = \int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

on kiinnitetty. (Kyseessä on abstrakti malli, mutta ei anneta sen haitata. Esimerkkinä alueesta Ω voisi olla vaikka ihmisen keho, johon kytkettyjen elektrodien Γ_{e_1} ja Γ_{e_2} välille kytketään jännite.)



Parin $(\vec{E}, \vec{J})$ määrittelevät yhtälöt alueessa Ω ovat

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\vec{E} &= 0 \\ \mathrm{div}\vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= g\vec{E}, \end{aligned}$$

jossa johtavuus g on paikan funktio, mutta ei riipu $\vec{E}$:stä (oletetaan lineaariset materiaalit).

(a) Näytä, että

$$\int_{C'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

kaikilla poluilla C' jotka alkavat Γ_{e_2}:lta ja päättyvät Γ_{e_1}:lle. (Tämä tarkoittaa, että Γ_{e_1}:n ja Γ_{e_2}:n välinen jännite on hyvin määritelty käsite.)

(b) Kirjoita ratkaistava osittaisdifferentiaaliyhtälö potentiaalille φ ($\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$) ja tilannetta vastaavat (Dirichlet:n ja Neumannin) reunaehdot.

Tehtävä 2: Todenna, että edellisessä tehtävässä alueessa Ω lämmöksi muuttunut teho voidaan antaa jännitteen ja virran tulona. Näytä siis, että

$$\int_\Omega \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V = UI,$$

jossa $I = \int_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a$ (normaalivektori $\vec{n}$ on ulkonormaali). Opastus: Anna ensin $\vec{E}$ muodossa $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ ja käytä tulon derivointikaavaa $\mathrm{div}(\varphi\vec{J}) = \mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{J} + \varphi \mathrm{div}\vec{J}$. Tällä tavoin saat ilmaistua tehon integraalina reunan $\partial\Omega$ yli, ja voit hyödyntää tilanteen reunaehdot.

Tehtävä 3: Edellä tarkastellussa esimerkkitilanteessa on olemassa lineaarinen kuvaus $\mathcal{G}$ jännitteiltä virroille. Jos jännite U ja virta I samaistetaan reaalilukuihin, niin tämä tarkoittaa, että kuvaus

$$\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{G}(U) = I$$

on lineaarinen. Kuvauksen lineaarisuus puolestaan tarkoittaa, että skalaarilla kertominen ja yhteenlasku voidaan tehdä ennen tai jälkeen kuvauksen.

Todenna, että kenttäyhtälöiden lineaarisuus implikoi kuvauksen $\mathcal{G}$ on lineaarisuuden. Näytä siis, että

(i) $\mathcal{G}(\alpha U) = \alpha\mathcal{G}(U)$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja kaikilla jännitteillä U,

(ii) $\mathcal{G}(U_1 + U_2) = \mathcal{G}(U_1) + \mathcal{G}(U_2)$ kaikilla jännitteillä U_1 ja U_2.

Opastus: Kohdassa (i) todenna ensin, että jos jännitettä U skaalataan α:lla niin kenttäyhtälöiden ratkaisu $(\vec{E}, \vec{J})$ skaalautuu α:lla. Virran saat integroimalla skaalattua virrantiheyttä. Kohta (ii) vastaavasti.

Koska kuvaus $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, voimme ilmaista sen vakiolla $G \in \mathbb{R}$, ts.

$$I = GU,$$

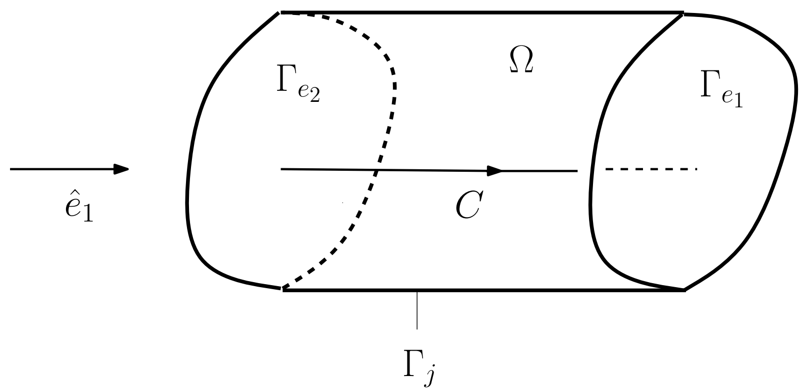
jossa G on *konduktanssi*. Sen arvo riippuu johtavuudesta g ja tarkastelualueen geometriasta sekä valituista kytkentäkohdista Γ_{e_1} ja Γ_{e_2}. Kääntäen: tämä kaikki informaatio on saatu pakattua yhteen reaalilukuun G.

Palautustehtävä: Edellä käsitellyssä tilanteessa voidaan konduktanssin G arvo määrittää (tehtävien 2 ja 3 nojalla) kaavasta

$$G = \frac{1}{U^2} \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V, \tag{1}$$

jossa pari $(\vec{E}, \vec{J})$ on virtastationäärinen kenttä jännitteellä U. (Lineaarisuuden takia G:n arvo ei riipu käytetystä jännitteen U arvosta.)

Esimerkkinä edellä käsitellystä tilanteesta tarkastellaan sylinterimäistä kappaletta Ω, jossa johtavuus g on vakio. Kappaleen pituus $\hat{e}_1$-suuntaan on d, ja poikkileikkauksen pinta-ala on vakio A.



Tässä tilanteessa pari $(\vec{E}, \vec{J})$ alueessa Ω on muotoa

$$\vec{E} = E_1 \hat{e}_1, \quad \vec{J} = g E_1 \hat{e}_1, \tag{2}$$

jossa E_1 on vakio.

(a) Todenna, että kaikki muotoa (2) olevat parit $(\vec{E}, \vec{J})$ toteuttavat alueessa Ω yhtälöt

$$\begin{aligned} \mathrm{curl} \vec{E} &= 0 \\ \mathrm{div} \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= g \vec{E}, \end{aligned}$$

ja reunalla $\partial\Omega$ yhtälöt

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \Gamma_j : \text{llä} \\ \vec{n} \times \vec{E} &= 0 \quad \Gamma_{e_1} : \text{llä ja } \Gamma_{e_2} : \text{lla} \end{aligned}$$

(b) Kiinnitä sitten vakio E_1 määräämällä jännite $U = \int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

(c) Määritä G:n arvo kaavan (1) avulla. (G:n arvo tulee riippumaan johtavuudesta g ja geometrisista vakioista d, A.)

(d) Näytä, että vakio E_1 voitaisiin kiinnittää myös kiinnittämällä virta $I = \int_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a$. (Ts. ratkaisu (2) voidaan määrätä yksikäsitteiseksi myös kiinnittämällä jännitteen sijasta virta.)

Täydentävää tietoa: Analogisesti edellisen analyysin kanssa saadaan sähköstaattisen mallin tapauksessa (olettaen vastaavat reunaehdot ja sähkövuontiheyden lähteettömyys alueessa Ω) lineaarinen riippuvuus jännitteen U ja *sähkövuon*

$$\Phi_e = \int\limits_{\Gamma_{e_1}} \vec{D} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a$$

välille. Formaalisti ilmaistuna $\Phi_e = CU$, jossa C on *kapasitanssi*. Kapasitanssi saadaan määritettyä yhtälöstä

$$C = \frac{1}{U^2} \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \mathrm{d}V,$$

jossa pari $(\vec{E}, \vec{D})$ on staattinen sähkökenttä jännitteellä U. Magnetostaattisen mallin tapauksessa (olettaen vastaavat reunaehdot ja magneettikentän voimakkuuden pyörteettömyys alueessa Ω) saadaan lineaarinen riippuvuus magneettivuon Φ ja ns. *magneettijännitteen*

$$U_m = \int\limits_{C} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

välille. Formaalisti ilmaistuna $\Phi = P_m U_m$, jossa P_m on *permeanssi*. Permeanssi saadaan määritettyä yhtälöstä

$$P_m = \frac{1}{U_m^2} \int\limits_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V,$$

jossa pari $(\vec{B}, \vec{H})$ on staattinen magneettikenttä magneettijännitteellä U_m. Huomaa: Jos U_m täsmää johtimessa kulkevan virran I kanssa (vrt. Amperen laki) niin permanssi P_m ja induktanssi L ovat yksi ja sama asia.