MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 2, kevät 2015

1. Dyadin $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$, jossa $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ jälki on skalaari jota merkitään $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$ ja määritellään pistetulona

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

   (a) Mikäli vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on annettu suorakulmaisessa ortonormaalissa kannassa $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, eli esimerkiksi $\boldsymbol{a} = a_i\hat{\boldsymbol{e}}_i = a_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + a_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$, niin määritä $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$.

   (b) Toisen kertaluvun tensori $\boldsymbol{A}$ on edelä mainitussa kannassa kirjoitettuna muotoa

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_j. \tag{2}$$

   Määritä $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$.

2. Vektorin $\boldsymbol{a}$ gradientin integraali voidaan laskea lausekkeella

$$\int_{\Omega} \mathrm{grad}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a,$$

   jossa $\boldsymbol{n}$ on pinnan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali. Määritellään alueen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ keskimääräinen infinitesimaalinen muodonmuutos $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ yhtälöllä

$$\mathrm{vol}(\Omega)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}a. \tag{3}$$

   Näytä, että

$$\mathrm{vol}(\Omega)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}a, \tag{4}$$

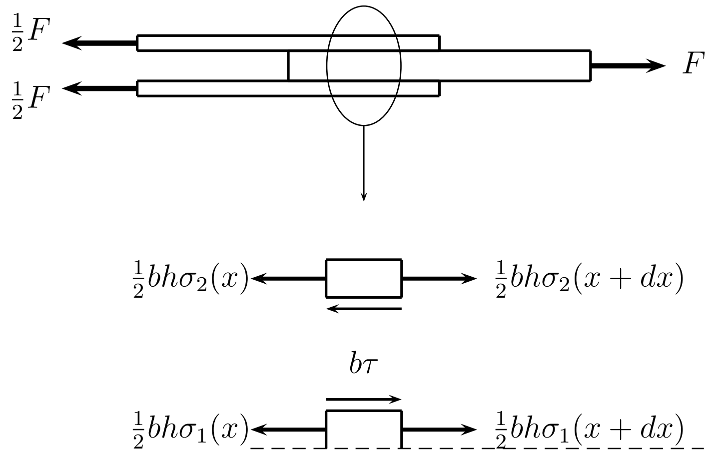
   jossa vektori $\boldsymbol{u}$ on siirtymäkenttä ja $\boldsymbol{n}$ on reunapinnan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali. Täten keskimääräinen muodonmuutos alueessa Ω riippuu vain siirtymän $\boldsymbol{u}$ reuna-arvoista.

   Täydetävää tietoa: Kyseinen yhtälö on keskeisessä roolissa materiaalimallien muodostamisessa, jossa mikroskaalassa ratkaistut suureet muunnetaan homogenisoimalla makroskaalan suureiksi käyttäen hyväksi edustavaa tilavuusalkiota Ω (engl. representative volume element).

3. Tarkastelleen oheisen kuvan mukaista kaksileikkeistä liimaliitosta, jota kuormitetaan vetävällä vaakasuoralla voimalla F. Johda tasapainoyhtälö liitosalueen jännitystilan määrittämiseksi. Liitosaslueen pituus on L, uloimpien leikkeiden paksuus $h/2$ ja keskimmäisen leikkeen paksuus on h ja leikkeiden leveys b. Oleta, että leikkeissä vaikuttava normaalivoima on vakio leikkeen korkeuden suhteen ja liukuma γ liimaliitoksessa, jonka paksuus on $t \ll h$, voidaan olettaa paksuussuunnassa vakioksi ja se voidaan laskea leikkeiden välisestä vaakasuorasta siirtymäerosta

$$\gamma = \frac{u_2 - u_1}{t},$$

jossa u_1 on keskimmäisen leikkeen vaakasuora siirtymä ja u_2 on ulkopuolisten leikkeiden vaakasuora siirtymä. Ota symmetria huomioon ja tarkastele liitosalueen tasapainoa oheisen kuvan mukaisesti. Mikä on liitosalueen leikkausjännityksen jakauma? Liiman leikkauskerroin on G_S ja liitettävien leikkeiden kimmokerroin on E.



Palautustehtävä: Tarkastellaan ideaalinesteen tasapainoasemaa. Ideaalinesteessä kaikki leikkausjännityskomponentit häviävät ($\sigma_{ij} = 0$, jos $i \neq i$), ja kaikki normaalijännityskomponentit voidaan lausua hydrostaattisen paineen p avulla, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$.

1. Määritä kokoonpuristumattoman nestekerroksen $-H < x_3 < 0$ painejakauma kun paine vapaalla pinnalla $x_3 = 0$ on p_0. Tasapainoyhtälössä

   $$-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \rho \boldsymbol{b},$$

   voimavektori $\boldsymbol{b} = -g\hat{\boldsymbol{e}}_3$.

2. Määritä kokoonpuristuvan *barotrooppisen* (barotrooppisella nesteellä tarkoitetaan nestettä, jonka tiheys riippuu vain paineesta) nestekerroksen $-H < x_3 < 0$ tiheysjakauma kun nesteen tilayhtälö on muotoa

   $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{K}{\rho_0},$$

   jossa K on nesteen kokoonpuristuvuusmoduuli (vedelle noin 2,1 GPa), ja ρ_0 on sen tiheys paineessa p_0.