MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 1, kevät 2015
Tuomas Kovanen

Tehtävä 1: Todenna (luennoilla esitettyjen) roottorin ja divergenssin määritelmien avulla, että

$$\text{div curl}\vec{A} = 0$$
$$\text{curl grad}f = 0$$

kaikilla derivoituvilla vektorikentillä $\vec{A}$ ja skalaarifunktioilla f. Opastus: reunan reuna on tyhjä joukko, ja integraali tyhjän joukon yli on nolla.

Tehtävä 2: Luennoilla esitetyssä esimerkissä tarkasteltiin sähkökenttää ja testivaraukseen tehtyä työtä kahden yhdensuuntaisen vastakkaisesti varatun levyn välissä (alue $\Omega \subset V^3$). Aluksi käytimme pistetuloa

$$\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R},$$

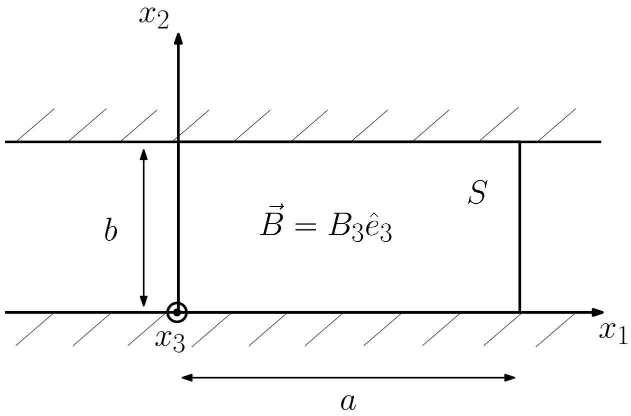
jolla mitattuna V^3:n kanta $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ on ortonormaali. Tämän kannan määräämässä Karteesisessa (x_1, x_2, x_3)-koordinaatistossa levyt ovat kohtisuorassa x_1-akseliin nähden kohdissa $x_1 = 0$ ja $x_1 = a$. Kyseisen pistetulon suhteen määritettynä sähkökentän voimakkuus -vektorikenttä on $\vec{E} = E_1\hat{e}_1$ alueessa Ω (jossa E_1 on vakiofunktio Ω:ssa). Toisella pistetulolla $\cdot'$ mitattuna kanta $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3) = (\hat{e}_1/2, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ on ortonormaali, ja tämän pistetulon suhteen määritetty sähkökentän voimakkuus -vektorikenttä on $\vec{E}' = E'_1\hat{e}'_1 + E'_2\hat{e}'_2 + E'_3\hat{e}'_3$, jossa $E'_1 = E_1/2$.

(a) Todenna, että $E'_2 = E'_3 = 0$. (Opastus: tarkastele tehtyä työtä, kun testivarausta siirretään $\hat{e}_2$:n ja $\hat{e}_3$:n suuntaisia polkuja pitkin.)

(b) Piirrä levyt kannan $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ määräämään Karteesiseen koordinaatistoon.

(c) Anna $\vec{E}'$ kannassa $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ jossa $\vec{E} = E_1\hat{e}_1$. (Näin huomaat, että todellakin $\vec{E}' \neq \vec{E}$.)

Tehtävä 3: Tarkastellaan homogeenista magneettikenttää kahden yhdensuuntaisen virrallisen levyn välissä (alue $\Omega \subset V^3$). Kiinnitetään pistetulo $\cdot$ ja ortonormaali kanta $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ siten, että tämän kannan määräämässä Karteesisessa (x_1, x_2, x_3)-koordinaatistossa levyjen poikkileikkaus näyttää seuraavalta:



Lasketaan pinnan S magneettivuo, kun pinnan lävistyssuunnaksi valitaan suunta $\hat{e}_3$.

Parametrisoidaan ensin pinta S esimerkiksi koordinaateilla x_1 ja x_2. Tämä parametrisointi on kuvaus

$$\vec{\gamma} : [0,a] \times [0,b] \to \Omega \subset V^3, \quad \vec{\gamma}(x_1,x_2) = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + c\hat{e}_3,$$

jossa c on pinnan x_3-koordinaatti.

(a) Laske ristitulo $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1} \times \frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}$.

(b) Laske pinnan S magneettivuo integraalista

$$\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\mathrm{d}a = \int_0^b\int_0^a \vec{B}\cdot\frac{\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}}{||\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}||}||\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}||\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$= \int_0^b\int_0^a \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

jossa $||\cdot||$ on pistetulon tuottama normi. (Tässä integrointikaavassa voitaisiin käyttää mitä tahansa pinnan S parametrisointia.)

Käytetään seuraavaksi toista pistetuloa $\cdot'$ jonka mukaan kanta $(\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3') = (\hat{e}_1, \hat{e}_2/2, \hat{e}_3)$ on ortonormaali. (Ts. muutetaan pituuksien ja kulmien referenssiä siten, että $\hat{e}_2$:n suuntainen yksikkösiirtymä onkin vain puolet edellisestä.) Integraalin laskemiseksi käytetään (esimerkiksi) samaa pinnan parametrisointia $\vec{\gamma}$ kuin edellä.

(c) Laske ristitulo $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1} \times \frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}$, jossa ristitulo on nyt uuteen pistetuloon $\cdot'$ liittyvä ristitulo. Anna siis ensin vektorit $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1}$ ja $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2}$ ortonormaalissa kannassa $(\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3')$.

(d) Merkitään pistetulon $\cdot'$ suhteen määritettyä magneettivuontiheys -vektorikenttää $\vec{B}'$:lla. Laske pinnan S magneettivuo integraalista

$$\int_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}' \mathrm{d}a' = \int_0^b \int_0^a \vec{B}' \cdot' \frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

(Anna $\vec{B}'$ muodossa $\vec{B}' = \sum_i B_i' \hat{e}_i'$.)

(e) Mikä tulee olla B_3':n ja B_3:n suhde, jotta kohdissa (b) ja (d) saadaan sama vuo?

Samaan tapaan kuin tehtävässä 1 näytimme, että $E_2' = E_3' = 0$, voitaisiin nyt näyttää (tarkastelemalla x_1- ja x_2-akselia vastaan kohtisuorassa olevien pintojen magneettivuota), että $B_1' = B_2' = 0$.

Palautustehtävä: Pistetulon $\cdot$ suhteen määritetty sähkökentänvoimakkuusvektori mallinnusalueen $\Omega \subset V^3$ pisteessä $\vec{x}$ on $\vec{E}(\vec{x})$. Merkitään tätä lyhyesti $\vec{E}$:llä merkintöjen yksinkertaistamiseksi. Vektoriavaruuteen V^3 on annettu ortonormaali kanta $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. Merkitään, että

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 + E_3 \hat{e}_3, \\ \boldsymbol{E} &= (E_1, E_2, E_3)^T, \end{aligned}$$

jossa yläindeksi T tarkoittaa transpoosia.

Toisen pistetulon $\cdot'$ mukaan kanta $(\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3')$, jossa

$$\hat{e}_j' = \sum_i F_{ij} \hat{e}_i, \quad j = 1, 2, 3$$

on ortonormaali. Merkitään, että

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}.$$

Koska vektorit $\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'$ muodostavat kannan, ovat nämä vektorit lineaarisesti riippumattomia. Tämä tarkoittaa, että $\det F \neq 0$. Pistetulon $\cdot'$ suhteen määritetty sähkökenttävektori pisteessä $\vec{x}$ on $\vec{E}'(\vec{x})$, jota merkitsemme lyhyesti $\vec{E}'$:lla. Merkitään lisäksi, että

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= E_1' \hat{e}_1' + E_2' \hat{e}_2' + E_3' \hat{e}_3', \\ \boldsymbol{E'} &= (E_1', E_2', E_3')^T. \end{aligned}$$

Näytä, että testivarauksen q infinitesimaaliseen (virtuaaliseen) siirtymään liittyvä työ on riippumaton pistetulon valinnasta, ts.

$$q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\vec{E}' \cdot' \mathrm{d}\vec{l} \quad \forall \mathrm{d}\vec{l} \in V^3, \tag{1}$$

jos ja vain jos

$$\boldsymbol{E'} = F^T \boldsymbol{E}. \tag{2}$$

Jaetaan tehtävä osiin:

(a) Anna mielivaltainen vektori $\mathrm{d}\vec{l}$ muodossa $\mathrm{d}l'_1\hat{e}'_1 + \mathrm{d}l'_2\hat{e}'_2 + \mathrm{d}l'_3\hat{e}'_3$, ja selvitä miten annat tämän vektorin komponentit kannassa $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ matriisin F ja komponenttien $\mathrm{d}l'_1, \mathrm{d}l'_2, \mathrm{d}l'_3$ avulla.

(b) Näytä, että (1) implikoi (2):n ja (2) implikoi (1):n. (Tarvitset (a)-kohdan tulosta pistetulon $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ laskemisessa.)

Täydentävää tietoa: Vastaavalla tavalla voisimme näyttää, että magneettivuontiheydelle tulee toteutua $\boldsymbol{B'} = |\det(F)|F^{-1}\boldsymbol{B}$ jotta pinta-alkion magneettivuo on pistetulosta riippumaton. Huomaa, että tämä muunnoskaava on eri kaava kuin sähkökentänvoimakkuusvektorilla. Tämä tarkoittaa, että sähkökentänvoimakkuus ja magneettivuontiheys ovat pohjimmiltaan erityyppisiä suureita, vaikka molempia mallinnetaankin klassisissa oppikirjoissa tavallisilla vektoreilla.