MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 7, kevät 2015

Tehtävä 1

Erään liikkeen kuvaus materiaalikoordinaattien X_K avulla on annettu muodossa

$$x_1 = \exp(\alpha t)X_1 - \exp(-\alpha t)X_2, \quad x_2 = \exp(\alpha t)X_1 + \exp(-\alpha t)X_2, \quad x_3 = X_3. \tag{1}$$

Määritä nopeuden ja kiihtyvyyden lausekkeet materiaali- ja spatiaalikoordinaattien avulla, eli $V_K = V_K(X_L, t), A_K = A_K(X_L, t)$ ja $v_i = v_i(x_k, t), a_i = a_i(x_k, t)$.

Ratkaisu

Nopeusvektorin materiaalinen esitys

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha[\exp(\alpha t)X_1 + \exp(-\alpha t)X_2], \\
V_2 &= \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \alpha[\exp(\alpha t)X_1 - \exp(-\alpha t)X_2], \\
V_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Spatiaalinen esitysmuoto saadaan $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), t)$, joten on määritettävä liikkeen (1) käänteiskuvaus

$$X_1 = \tfrac{1}{2}\exp(-\alpha t)(x_1 + x_2), \quad X_2 = \tfrac{1}{2}\exp(\alpha t)(x_2 - x_1), \quad X_3 = x_3.$$

Nopeuden avaruudelliseksi esitysmuodoksi saadaansiten

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha[\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)] = \alpha x_2, \\
v_2 &= \alpha[\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) - \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)] = \alpha x_1, \\
v_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Kiihtyvyyden lausekkeet saadaan yksinkertaisimmin käyttäen materiaalista muotoa

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = \alpha^2[\exp(\alpha t)X_1 - \exp(-\alpha t)X_2, \\
A_2 &= \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = \alpha^2[\exp(\alpha t)X_1 + \exp(-\alpha t)X_2, \\
A_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Tstä saadaan kiihtyvyyden avaruudelliset lausekkeet

$$a_1 = \alpha^2 x_1, \quad a_2 = \alpha^2 x_2, \quad a_3 = 0.$$

Hahmottele nopeuskentän kuvaajaa eli piirrä nopeusvektoktoreita joissain avaruuden pisteissä.

Tehtävä 2

Liike on annettu muodossa

$$x_1 = \frac{X_1}{1+tX_1}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \tag{2}$$

Määritä tiheys ρ sekä materiaalikoordinaattien $\mathbf{X}$ että spatiaalikoordinaattien $\mathbf{x}$ avulla (i) integroimalla jatkuvuusyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \mathrm{div}\mathbf{v} = 0,$$

ja (ii) deformaatiogradientin avulla.

Ratkaisu

Liikkeen kuvaus on ny annettu materiaalikoordinaattien X_K avulla

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t).$$

Muodostetaan ensin jatkoa silmälläpitäen käänteiskuvaus $\boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)$, ja se on tehtävän tapauksessa

$$X_1 = \frac{x_1}{1-\alpha t x_1}, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_3. \tag{3}$$

Nopeusvektorin materiaalinen muoto saadaan helposti derivoimalla liikkeen kuvaus (2) ajan suhteen

$$V_1(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -\alpha \frac{X_1^2}{(1+\alpha t X_1)^2},$$

josta helposti havaitaan, että liikkeen spatiaalinen muoto on

$$v_1(\boldsymbol{x}, t) = -\alpha x_1^2.$$

Massan taseyhtälö, eli jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v}\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

jossa div on spatiaalinen divergenssioperaattori, eli derivointi suoritetaan spatiaalikoordinaattien $\boldsymbol{x}$ suhteen ja $\dot{\rho}$ on tiheyden materiaalinen aikaderivaatta. Suorittamalla derivointi saadaan

$$\dot{\rho} - \rho 2\alpha x_1,$$

josta saadaan integraali

$$\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 2\int \frac{\alpha X_1}{1+\alpha t X_1} \mathrm{d}t,$$

josta integroimalla saadaan

$$\ln \rho = 2 \ln(1+\alpha t X_1) + C.$$

Merkitsemällä tiheyttä ajanhetkellä 0 symbolilla ρ_0, saadaan integroimisvakiolle C arvo $C = \ln \rho_0$, joten

$$\ln \rho - \ln[\rho_0(1+\alpha t X_1)].$$

Täten tiheyden materiaalinen esitysmuoto on

$$\rho(\boldsymbol{X}, t) = \rho_0(1 + \alpha t X_1)^2. \tag{4}$$

Käyttämällä liikkeen käänteiskuvausta (3) saadaan tiheyden spatiaalinen muoto

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\rho_0}{(1 - \alpha t x_1)^2}.$$

Liikkeen kuvauksesta (2) saadaan deformaatiogradientti, jonka 11-komponentti on

$$F_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{1}{(1 + \alpha t X_1)^2}.$$

Johdetaan deformaatiogradientin determinantin $J = \det \boldsymbol{F}$ sekä alkutilan ja nykytilan tiheyksien välinen relaatio. Massan säilymisen perusteella differentiaalinen massa-alkio $\mathrm{d}m$ on sama sekä alku- että nykytilassa

$$\mathrm{d}m = \rho_0 \mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}v = \rho J \mathrm{d}V.$$

Täten $\rho_0 = J\rho$, eli $\rho = J^{-1}\rho_0$, nyt $J = F_{11}$, joten

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t X_1)^2.$$

Tulos on tietenkin sama kuin on saatu yhtälössä (4).

Tehtävä 3

Kaksidimensioinen deformaatio on annettu lausekkeilla

$$x_1 = 4L - 2X_1 - X_2, \quad x_2 = 2L + \tfrac{3}{2}X_1 - \tfrac{1}{2}X_2.$$

Määritä deformaatiogradientti ja sen käänteiskuvaus ja tutki mihin neliö $0 \leq X_1, X_2 \leq L$ kuvautuu deformoituneessa tilassa. Määritä materiaalisen vektorin $\boldsymbol{a}_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ kuva $\boldsymbol{a}$ deformoituneessa tilassa. Määritä myös materiaalinen vektori $\boldsymbol{b}_0$, jonka kuva on spatiaalinen vektori $\boldsymbol{b} = (1, 0)^T$.

Ratkaisu

Määritetään nurkkapisteiden koordinaatit deformoituneessa tilassa. Origo kuvautuu pisteeksi $(4L, 2L)$. Piste $(L, 0)$ kuvautuu pisteeksi $(2L, 7/2L)$, piste (L, L) pisteeksi $(L, 3L)$, piste $(0, L)$ pisteeksi $(3L, 3/2L)$.

Deformaatiogradientti on karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa lausuttuna

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Käänteiskuvaus on

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Materiaalinen vektori $\boldsymbol{a}_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$ kuvautuu vektoriksi

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{5}.$$

Vastaavasti spatiaalisen vektorin $\boldsymbol{b}$ materiaalinen alkukuva on

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{b}_0| = \sqrt{2/5}.$$

Piirä kuva!