MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 6, ratkaisut, kevät 2015
Tuomas Kovanen

T1:

(a) mikä tahansa piste $\vec{x} \in S$ voidaan antaa muodossa $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i$, mutta myös muodossa

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x'_i \hat{e}'_i = x'_1 \frac{d + tv_1}{d} \hat{e}_1 + x'_2 \hat{e}_2 + x'_3 \hat{e}_3.$$

Koska kyseessä on sama vektori tulee sen komponenttien (esimerkiksi) kannassa $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ olla samat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d + tv_1}{d} x'_1 \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned}$$

Tämä on kysytty kuvaus $\boldsymbol{\chi}$.

(b) Nopeusvektorikenttä on

$$\vec{v}(\boldsymbol{x}', t) = \frac{v_1}{d} x'_1 \hat{e}_1.$$

Eulerin koordinaattien avulla ilmaistuna

$$\begin{aligned} \vec{v}(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{v_1 d}{d(d + tv_1)} x_1 \hat{e}_1 \\ &= \frac{v_1}{d + tv_1} x_1 \hat{e}_1. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x_1 = d + tv_1$ saadaan $\vec{v}(\boldsymbol{x}, t) = v_1 \hat{e}_1$.

(c) Lasketaan ristitulo $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= \frac{v_1}{d + tv_1} x_1 \hat{e}_1 \times B_3 \hat{e}_3 \\ &= -\frac{v_1}{d + tv_1} x_1 B_3 \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Kun $x_1 = 0$ niin $\vec{v} \times \vec{B} = 0$, ja koska reunakäyrän ∂S vaakasuorilla osuuksilla pätee $\vec{v} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$, jää integroinnista jäljelle vain reunakäyrän pystysuora osuus kohdassa $x_1 = d+tv_1$. Tällä pystysuoralla osuudella $\vec{v}\times\vec{B} = -v_1 B_3 \hat{e}_2$. Saadaan siis

$$\int\limits_{\partial S} \vec{v} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -B_3 v_1 l.$$

(d) Lasketaan $\vec{B}' \cdot' \vec{n}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{B}' \cdot' \vec{n}' &= \boldsymbol{B'}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(|\mathrm{det} F| F^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{d+tv_1}{d} \begin{pmatrix} \frac{d}{d+tv_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{d+tv_1}{d} B_3.
\end{aligned}$$

Integroidaan S:n yli:

$$\int\limits_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}' \mathrm{d}a' = \frac{d+tv_1}{d} B_3 dl = (d+tv_1) B_3 l.$$

Saadaan

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}' \mathrm{d}a' = -v_1 B_3 l.$$

T2:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{\bar{U}(x_3) e^{j\omega t}\} &= \mathrm{Re}\{|\bar{U}(x_3)| e^{jarg(\bar{U}(x_3))} e^{j\omega t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{|\bar{U}(x_3)| e^{j(\omega t + arg(\bar{U}(x_3)))}\} \\
&= |\bar{U}(x_3)| \cos(\omega t + arg(\bar{U}(x_3))).
\end{aligned}$$

(b) Seuraava päättelyketju pätee:

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}}{\mathrm{d}x_3^2} = \gamma^2\bar{U}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}}{\mathrm{d}x_3^2}e^{j\omega t} = \gamma^2\bar{U}e^{j\omega t} \quad \forall t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\bar{U}e^{j\omega t}) = -\omega^2 LC\bar{U}e^{j\omega t} = LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{U}e^{j\omega t}) \quad \forall t$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{Re}\{\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\bar{U}e^{j\omega t})\} = \mathrm{Re}\{LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{U}e^{j\omega t})\} \quad \forall t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\mathrm{Re}\{\bar{U}e^{j\omega t}\} = LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Re}\{\bar{U}e^{j\omega t}\} \quad \forall t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

(c)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_3^2}(U_0^+e^{-\gamma x_3} + U_0^-e^{\gamma x_3}) = \gamma^2(U_0^+e^{-\gamma x_3} + U_0^-e^{\gamma x_3}) = \gamma^2\bar{U}(x_3).$$

(d) Termiä $U_0^+e^{-\gamma x_3}$ vastaava aikatason ratkaisu on

$$\mathrm{Re}\{U_0^+e^{-\gamma x_3 e^{j\omega t}}\} = \cdots = |U_0^+|\cos(\omega t - \omega\sqrt{LC}x_3 + arg(U_0^+)).$$

Jännite on vakio, kun kosinin argumentti on vakio:

$$\omega t - \omega\sqrt{LC}x_3 + arg(U_0^+) = \text{vakio}.$$

Vakiovaihepiste riippuu siis ajasta:

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{arg(U_0^+) - \text{vakio}}{\omega\sqrt{LC}}.$$

Etenemisnopeus on

$$v = \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$