MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 5, ratkaisut, kevät 2015
Tuomas Kovanen

T1: Seuraava päättelyketju pätee:

$$\vec{H} \cdot \vec{t} = 0 \ \text{ kaikilla reunan tangenttivektoreilla } \vec{t}$$

jos ja vain jos

$$\mu^{-1}\vec{B} \cdot \vec{t} = 0 \ \text{ kaikilla reunan tangenttivektoreilla } \vec{t}$$

jos ja vain jos

$$\mu^{-1}\text{grad}A_3 \times \hat{e}_3 \cdot \vec{t} = 0 \ \text{ kaikilla reunan tangenttivektoreilla } \vec{t}$$

jos ja vain jos

$$\mu^{-1}\text{grad}A_3 \cdot \hat{e}_3 \times \vec{t} = 0 \ \text{ kaikilla reunan tangenttivektoreilla } \vec{t}$$

jos ja vain jos

$$\pm\mu^{-1}\text{grad}A_3 \cdot ||\vec{t}||\vec{n} = 0 \ \text{ kaikilla reunan tangenttivektoreilla } \vec{t}$$

jos ja vain jos

$$\text{grad}A_3 \cdot \vec{n} = 0.$$

T2: Merkitään $R_{m1}(\alpha)$:lla ja $R_{m2}(\alpha)$:lla ilmavälien reluktansseja paikkaparametrin ollessa α. Magneettipiirimallin oletuksilla magneettikenttään varastoitunut energia on

$$U(\alpha, \Phi) = \frac{1}{2}R_{m1}(\alpha)\Phi^2 + \frac{1}{2}R_{m2}(\alpha)\Phi^2, \tag{1}$$

jossa Φ on magneettivuo. Nyt $R_{m1}(\alpha) = R_{m2}(\alpha) = \frac{\alpha}{\mu_0 A}$, jossa A on ilmavälin poikkipinta-ala. Energiafunktio on siis

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ U(\alpha, \Phi) = \frac{\alpha}{\mu_0 A}\Phi^2.$$

Magneettinen voima kohdassa (α_0, Φ_0) on

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial U}{\partial \alpha}(\alpha_0, \Phi_0) \\ &= -\frac{\Phi_0^2}{\mu_0 A}, \end{aligned}$$

jossa Φ_0 on magneettivuo paikkaparametrin ollessa α_0.

Huomataan, että voima on negatiivinen, eli se pyrkii pienentämään etäisyyttä α. Tilanteessa järjestelmää ohjataan virralla I, joten annetaan vielä voima virran avulla. Magneettipiirimallin yhtälöistä saadaan

$$\Phi_0 = \frac{\mu_0 AnI}{2\alpha_0},$$

jossa n on käämin kierrosluku. Voima on

$$F = -\frac{\mu_0 An^2 I^2}{4\alpha_0^2}.$$

Tasapainossa $|F| = mg$, joten tasapainoetäisyys saadaan lausekkeesta $\sqrt{\frac{\mu_0 An^2 I^2}{4mg}}$. Jos etäisyys jostain syystä poikkeaa tästä tasapainoetäisyydestä niin palkki putoaa tai liikkuu kiinni sähkömagneettiin. Esimerkiksi jos palkkia poikkeutetaan hieman ylöspäin tasapainoetäisyydestä, eli α_0 pienenee, niin vetovoima kasvaa, ja koska gravitaatiovoima pysyy vakiona niin palkkiin kohdistuu nettovoima joka pyrkii liikuttamaan palkkia kohti sähkömagneettia.

T3:

(a) Ehto (1):

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\alpha}, \Phi) + U^c(\boldsymbol{\alpha}, U_m) &= \frac{1}{2} R_m(\boldsymbol{\alpha}) \Phi^2 + \frac{1}{2} P_m(\boldsymbol{\alpha}) U_m^2 \\ &= \frac{1}{2} U_m \Phi + \frac{1}{2} U_m \Phi \\ &= U_m \Phi. \end{aligned}$$

Ehto (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^c}{\partial U_m} &= P_m(\boldsymbol{\alpha}) U_m = \Phi. \\ \frac{\partial U}{\partial \Phi} &= R_m(\boldsymbol{\alpha}) \Phi = U_m. \end{aligned}$$

(b) Kun $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $\Phi(t)$ ja $U_m(t)$ on valittu tehtävänannon mukaisesti, yhtäsuuruus

$$U(\boldsymbol{\alpha}(t), \Phi(t)) + U^c(\boldsymbol{\alpha}(t), U_m(t)) = \Phi(t) U_m(t)$$

pätee kaikilla ajanhetkillä t. Lasketaan derivaatat kohdassa $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\boldsymbol{\alpha}(t), \Phi(t))_{|t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U^c(\boldsymbol{\alpha}(t), U_m(t))_{|t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\Phi(t) U_m(t))_{|t=0}.$$

Ketjusäännön mukaan tästä saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), \Phi(0)) \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}_{|t=0} + \frac{\partial U}{\partial \Phi}(\boldsymbol{\alpha}(0), \Phi(0)) \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}_{|t=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^c}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), U_m(0)) \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}_{|t=0}$$
$$+ \frac{\partial U^c}{\partial U_m}(\boldsymbol{\alpha}(0), U_m(0)) \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t}_{|t=0} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}_{|t=0} U_m(0) + \Phi(0) \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t}_{|t=0}.$$

Otetaan huomioon yhtälöt (2), jonka jälkeen jäljelle jää

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), \Phi(0)) \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}_{|t=0} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^c}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), U_m(0)) \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}_{|t=0}.$$

Saadaan siis

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), \Phi(0)) \mathrm{d}\alpha_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^c}{\partial \alpha_i}(\boldsymbol{\alpha}(0), U_m(0)) \mathrm{d}\alpha_i$$

kaikilla $\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, eli väite on todistettu.