MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 4

Tehtävä 1

Symmetrisen matriisin $\boldsymbol{A}$ karakteristinen yhtälö on

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0,$$

jossa kertoimet I_1, I_2, I_3 ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ pääinvariantit:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \\
I_2 &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) - (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2), \\
I_3 &= \det \boldsymbol{A} = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^3) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) + \tfrac{1}{6}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3.
\end{aligned}$$

Johda invarianttien $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2), \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^3)$ lausekkeet pääinvarianttien I_1, I_2 ja I_3 avulla.

Ratkaisu

Heti nähdään, että $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = I_1$ ja $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = 2I_2 + I_1^2$. Puuttuva yhteys saadaan kun muistetaan, että matriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä, eli

$$-\boldsymbol{A}^3 + I_1\boldsymbol{A}^2 + I_2\boldsymbol{A} + I_3\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}.$$

Otetaan jälki, jolloin saadaan

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^3) = I_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) + I_2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + 3I_3 = I_1^3 + 3I_1I_2 + 3I_3.$$

Tehtävä 2

Isotrooppisen termoelastisen aineen konstitutiiviset yhtälöt voidaan kirjoittaa yleisessä muodossa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \alpha_0\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}^2 \\
&\quad + \alpha_3\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g} + \alpha_4(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{g}\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha_5\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{q} &= \beta_1\boldsymbol{g} + \beta_2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g} + \beta_3\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{g}, \\
W &= W(\theta, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^3, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{g}),
\end{aligned}$$

jossa θ on absoluuttinen lämpötila, $\boldsymbol{q}$ lämpövuovektori, $\boldsymbol{g} = \mathrm{grad}\theta$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ ovat muodonmuutos- ja jännitystensorit. Skalaarikertoimet $\alpha_0, \ldots, \alpha_5, \beta_1, \ldots, \beta_3$ ovat funktion W argumentteina olevien kuuden skalaarinvariantin ja lämpötilan funktioita.

1. Termodynamiikan toisesta pääsäännöstä johdettu dissipaatioepäyhtälö on

$$-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g}}{\theta} \geq 0.$$

   Mitä rajoitteita se asettaa edellä esitetylle mallille?

2. Kirjoita linearisoidut konstitutiiviset yhtälöt. Mitä riippuvuuksia jäljelle jääneillä kertoimilla voi olla?

Ratkaisu

Koska absoluuttinen lämpötila on aina positiivinen, saadaan

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{g} = \beta_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} + \beta_2 \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon}^2 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} \leq 0.$$

Otaksutaan ensin prosessi, jossa ei tapahdu muodonmuutoksia. Tällöin

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{g} = \beta_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} \leq 0,$$

joten kertoimen β_1 on toteutettava $\beta_1 \leq 0$. Mielivaltaiselle prosessille kertoimen β_2 on hävittävä, jotta epäyhtälö toteutuisi kaikille ε ja $\boldsymbol{g}$, sekä kertoimen β_3 on oltava negatiivinen. Täten siis

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{g} = \beta_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} + \beta_3 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 \boldsymbol{g} \leq 0, \qquad \beta_1, \beta_3 \leq 0.$$

Linearisoidut yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{q} &= \beta_1 \boldsymbol{g}, \end{aligned}$$

ja kertoimet α_1 sekä β_1 ovat vakioita, sekä kerroin $\alpha_0 = \alpha_{00} + \alpha_{01} \mathrm{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$, jossa α_{00} ja α_{01} ovat vakioita.