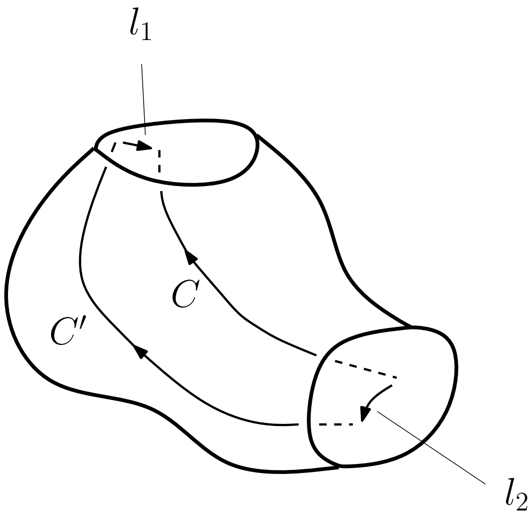
MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 3, ratkaisut, kevät 2015
Tuomas Kovanen

T1:

(a) Olkoon C' mielivaltainen polku Γ_{e_2}:lta Γ_{e_1}:lle. Muodostetaan suljettu polku $-C + l_1 + C' + l_2$, joka on pinnan $S \subset \Omega$ reuna.



Nyt $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ pinnalla Γ_{e_1}, joten $\vec{E} \cdot \vec{t} = 0$ kaikilla Γ_{e_1}:n tangenttivektoreilla $\vec{t}$. Tästä seuraa, että

$$\int_{l_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

Samoin

$$\int_{l_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

Siispä

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int\limits_{C} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \int\limits_{C'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{-C} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int\limits_{l_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int\limits_{S} \mathrm{curl}\vec{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \\
&= 0,
\end{aligned}$$

jossa viimeinen yhtäsuuruus pätee, koska $\mathrm{curl}\vec{E} = 0$ alueessa Ω.

(b) Osittaisdifferentiaaliyhtälö potentiaalille φ on

$$\mathrm{div}(g\mathrm{grad}\varphi) = 0$$

alueessa Ω.

Reunaehdot Γ_{e_1}:llä ja Γ_{e_2}:lla: Nyt $\mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{t} = 0$ kaikilla Γ_{e_1}:n tangenttivektoreilla $\vec{t}$, mikä on ekvivalenttia sen kanssa (gradientin määritelmän mukaan), että φ on vakio Γ_{e_1}:llä. Samoin φ on vakio Γ_{e_2}:lla. Asetetaan esim.

$$\begin{aligned}
\varphi &= 0 \quad \Gamma_{e_1}\text{:llä} \\
\varphi &= U \quad \Gamma_{e_2}\text{:lla,}
\end{aligned}$$

jolloin vaatimus $\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U$ toteutuu. Nämä ovat tehtävän Dirichlet'n reunaehdot.

Reunaehdot Γ_j:llä: Ehto $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ toteutuu Γ_j:llä jos ja vain jos

$$\mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{n} = 0 \quad \Gamma_j\text{:llä.}$$

Tämä on tehtävän Neumannin reunaehto.

T2: Yritetään antaa häviöteho $\int_\Omega \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V$ integraalina reunan $\partial\Omega$ yli, jolloin pääsemme hyödyntämään tilanteen reunaehdot:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V &= \int\limits_{\Omega} -\mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{J} \mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega} (-\mathrm{div}(\varphi \vec{J}) + \varphi \mathrm{div} \vec{J}) \mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega} -\mathrm{div}(\varphi \vec{J}) \mathrm{d}V \quad (\text{nyt } \mathrm{div}\vec{J} = 0 \text{ alueessa } \Omega) \\
&= -\int\limits_{\partial\Omega} \varphi \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \quad (\text{divergenssiteoreema}) \\
&= -\int\limits_{\Gamma_{e_1}} \varphi \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a - \int\limits_{\Gamma_{e_2}} \varphi \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \quad (\text{nyt } \vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \ \Gamma_j\text{:llä}) \\
&= -\varphi_1 \int\limits_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a - \varphi_2 \int\limits_{\Gamma_{e_2}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \quad (\text{nyt } \varphi \text{ on vakio } \Gamma_{e_1}\text{:llä ja } \Gamma_{e_2}\text{:lla}).
\end{aligned}
$$

Lisäksi toteutuu

$$
\int\limits_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a = -\int\limits_{\Gamma_{e_2}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a =: I,
$$

koska

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a + \int\limits_{\Gamma_{e_2}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a &= \int\limits_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a + \int\limits_{\Gamma_{e_2}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a + \int\limits_{\Gamma_j} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a \\
&= \int\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{J} \mathrm{d}V \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Yhteensä siis saadaan

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V &= -\varphi_1 I + \varphi_2 I \\
&= (\varphi_2 - \varphi_1) I \\
&= UI.
\end{aligned}
$$

T3:

(i) Olkoon $(\vec{E}, \vec{J})$ virtastationäärinen kenttä jännitteellä U, ts. pari $(\vec{E}, \vec{J})$ toteuttaa tehtävässä 1 annetut kenttäyhtälöt ja reunaehdot, ja ehdon

$$\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U.$$

Jännitettä U vastaava virta voidaan ilmaista integraalina

$$I = \int_{\Gamma_{e_1}} \vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a.$$

Nyt meidän tulee näyttää, että mielivaltaisella reaaliluvulla α pari $(\alpha\vec{E}, \alpha\vec{J})$ on virtastationäärinen kenttä jännitteellä αU, ts. se toteuttaa tehtävässä 1 annetut kenttäyhtälöt ja reunaehdot ja ehdon

$$\int_C \alpha\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \alpha U.$$

Tämä seuraa suoraan yhtälöiden lineaarisuudesta (kirjoita auki). Huomaa, että tämä pätee vain lineaarisen väliaineyhtälön tapauksessa. Nyt, koska $(\alpha\vec{E}, \alpha\vec{J})$ on virtastationäärinen kenttä jännitteellä αU, on jännitettä αU vastaava virta

$$\int_{\Gamma_{e_1}} \alpha\vec{J} \cdot \vec{n} \mathrm{d}a = \alpha I,$$

ts. kun jännitettä skaalataan α:lla niin virta skaalautuu α:lla.

(ii) Samoin kuin kohta (i).