MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 2

Tehtävä 1

Dyadin $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, jossa $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ jälki on skalaari jota merkitään $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$ ja määritellään pistetulona

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

1. Mikäli vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on annettu suorakulmaisessa ortonormaalissa kannassa $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, eli esimerkiksi $\boldsymbol{a} = a_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = a_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + a_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + a_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3$, niin määritä $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$.

2. Toisen kertaluvun tensori $\boldsymbol{A}$ on edelä mainitussa kannassa kirjoitettuna muotoa

$$\boldsymbol{A} = A_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j. \tag{2}$$

   Määritä $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$.

Ratkaisu

Einsteinin summaussääntöä käytten saadaan kompaktisti

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_i \hat{\boldsymbol{e}}_i) \cdot (a_j \hat{\boldsymbol{e}}_j) = a_i b_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i.$$

Toisen kertaluvun tensorin jälki vastaavasti

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(A_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j) = A_{ij} \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j) = A_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = A_{ij} \delta_{ij} = A_{ii}.$$

Tehtävä 2

Vektorin $\boldsymbol{a}$ gradientin integraali voidaan laskea lausekkeella

$$\int_{\Omega} \mathrm{grad}\boldsymbol{a} \, \mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}a, \tag{3}$$

jossa $\boldsymbol{n}$ on pinnan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali. Määritellään alueen $\Omega \in \mathbb{R}^3$ keskimääräinen infinitesimaalinen muodonmuutos $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ yhtälöllä

$$\mathrm{vol}(\Omega)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}v. \tag{4}$$

Näytä, että

$$\mathrm{vol}(\Omega)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}a, \tag{5}$$

jossa vektori $\boldsymbol{u}$ on siirtymäkenttä ja $\boldsymbol{n}$ on reunapinnan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali. Täten keskimääräinen muodonmuutos alueessa Ω riippuu vain siirtymän $\boldsymbol{u}$ reuna-arvoista.

Täydetävää tietoa: Kyseinen yhtälö on keskeisessä roolissa materiaalimallien muodostamisessa, jossa mikroskaalassa ratkaistut suureet muunnetaan homogenisoimalla makroskaalan suureiksi käyttäen hyväksi edustavaa tilavuusalkiota Ω (engl. representative volume element).

Ratkaisu

Sijoitetaan muodonmuutostensorin lauseke

$$\mathrm{vol}(\Omega)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}v = \int\limits_{\Omega} \tfrac{1}{2}(\mathrm{grad}\boldsymbol{u} + (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^T)\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n})^T)\mathrm{d}a$$
$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{u})\mathrm{d}a.$$

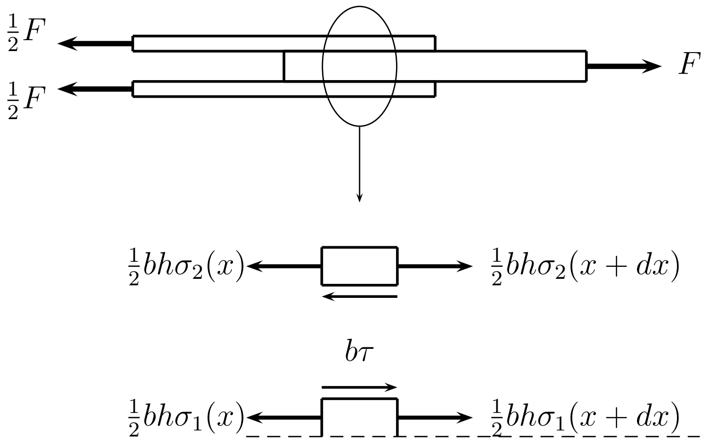
Mieti mten todistaisit yhtälön (3).

Tehtävä 2

Tarkastelleen oheisen kuvan mukaista kaksileikkeistä liimaliitosta, jota kuormitetaan vetävällä vaakasuoralla voimalla F. Johda tasapainoyhtälö liitosalueen jännitystilan määrittämiseksi. Liitosaslueen pituus on L, uloimpien leikkeiden paksuus $h/2$ ja keskimmäisen leikkeen paksuus on h ja leikkeiden leveys b. Oleta, että leikkeissä vaikuttava normaalivoima on vakio leikkeen korkeuden suhteen ja liukuma γ liimaliitoksessa, jonka paksuus on $t \ll h$, voidaan olettaa paksuussuunnassa vakioksi ja se voidaan laskea leikkeiden välisestä vaakasuorasta siirtymäerosta

$$\gamma = \frac{u_2 - u_1}{t},$$

jossa u_1 on keskimmäisen leikkeen vaakasuora siirtymä ja u_2 on ulkopuolisten leikkeiden vaakasuora siirtymä. Ota symmetria huomioon ja tarkastele liitosalueen tasapainoa oheisen kuvan mukaisesti. Mikä on liitosalueen leikkausjännityksen jakauma? Liiman leikkauskerroin on G_S ja liitettävien leikkeiden kimmokerroin on E.



Ratkaisu

Kehittämällä termi $\sigma_1(x + \mathrm{d}x)$ Taylorin sarjaksi saadaan

$$\sigma_1(x + \mathrm{d}x) \approx \sigma_1(x) + \frac{\mathrm{d}\sigma_1(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Vastaavasti σ_2:lle. Täten saadaan kuvan vapaakappaleille tasapainoyhtälöt

$$\frac{1}{2}bh\frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \tau b\mathrm{d}x = 0,$$
$$\frac{1}{2}bh\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \tau b\mathrm{d}x = 0.$$

Merkitään jatkossa derivaattaa paikkakoordinaatin x suhteen suureen oikeassa yläkulmassa olevalla pilkulla. Ottamalla huomioon liimaliitoksen konstitutiivinen yhtälö $\tau = G_S\gamma = G_S(u_2 - u_1)/t$ ja leikkeiden $\sigma_i = E\varepsilon_i = Eu_i'$, saadaan

$$u_2'' - \frac{2}{th}\frac{G_S}{E}(u_2 - u_1) = 0, \tag{6}$$
$$u_1'' + \frac{2}{th}\frac{G_S}{E}(u_2 - u_1) = 0. \tag{7}$$

Eliminoidaan u_2 alemmasta yhtälöstä

$$u_2 = u_1 - \frac{th}{2}EG_S u_1'',$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (6), saadaan neljännen kertaluvun tavallinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

$$u_1^{(4)} - \frac{4}{th}\frac{G_S}{E}u_1'' = 0.$$

Merkitään $k^2 = 4G_S/(thE)$ (huomaa, että k:n dimensio on pituuden dimension käänteisarvo), saadaan

$$u_1^{(4)} - k^2 u_1'' = 0 \tag{8}$$

Yritteellä $u_1(x) = \exp(rx)$ saadaan karakteristinen yhtälö $r^4 - k^2r^2 = 0$, josta $r = 0$, ja $r = \pm k$, joten yhtälön (8) yleinen ratkaisu on muotoa

$$u_1 = A + Bx + C\exp(kx) + D\exp(-kx), \tag{9}$$

jossa A, B, C ja D ovat integroimisvakioita.

Mallinnuksen oleellinen osa on reunaehtojen määrittäminen. Neljännen kertaluvun reuna-arvotehtävälllä on asetettava neljä reunaehtoa, kaksi kummassakin päässä. Asetetaan x-koordinaatiston origo keskimmäisen leikkeen vasempaan päähän. Keskimmäisen leikkeen vasen pää on jännityksetön ja oikealla vaikuttaa jännitys $\sigma_1 = F/bh$, täten

$$\sigma_1(0) = Eu_1'(0) = 0, \tag{10}$$
$$\sigma_1(L) = Eu_1'(L) = F/bh. \tag{11}$$

Toiset kaksi reunaehtoa saadaan uloimpien leikkeiden reunaehdoista, eli

$$\sigma_2(0) = Eu_2'(0) = E(u_1'(0) - \tfrac{1}{2}(E/G_S)u_1'''(0)) = 0, \tag{12}$$
$$\sigma_2(L) = Eu_2'(L) = E(u_1'(L) - \tfrac{1}{2}(E/G_S)u_1'''(L)) = 0. \tag{13}$$

Reunaehdoista (10) ja (11) saadaan yhtälöt

$$B + kC - kD = 0, \tag{14}$$
$$B + k\exp(kL)C - k\exp(-kL)D = \frac{F}{bhE}, \tag{15}$$

ja vastaavasti ehdoista (12) ja (13) saadaan

$$B - kC + kD = \frac{F}{bhE}, \tag{16}$$
$$B - k\exp(kL)C + k\exp(-kL)D = 0. \tag{17}$$

Vakioden arvoiksi saadaan

$$\begin{aligned} B &= \frac{F}{2bhE}, \\ C &= \frac{\exp(-kL)(\exp(-kL)+1)}{1-\exp(-kL)}\frac{F}{2bhEk}, \\ D &= \frac{1+\exp(-kL)}{1-\exp(-2kL)}\frac{F}{2bhEk}. \end{aligned}$$

Huomaa, että integroimisvakiota A ei voida määrittää näistä reunaehdoista. Mieti miksi!

Huomaa myös, että olen kirjoittanut kaikki eksponenttilausekkeet siten, että niissä ei esiinny lauseketta $\exp(kL)$. Tämä on erityisen tärkeää lausekkeiden numeerisen evaluoinnin kannalta.

Leikkeiden 1 ja 2 normaalijännitysten ja sauman leikkausjännitysten lausekkeet ovat siten

$$\sigma_1(x) = \left\{1 + \frac{1+\exp(-kL)}{1-\exp(-2kL)}\left[\exp[k(x-L)] - \exp(-kx)\right]\right\}\frac{F}{2bh}, \tag{18}$$
$$\sigma_2(x) = \left\{1 - \frac{1+\exp(-kL)}{1-\exp(-2kL)}\left[\exp[k(x-L)] - \exp(-kx)\right]\right\}\frac{F}{2bh}, \tag{19}$$
$$\tau(x) = -\left\{\frac{1+\exp(-kL)}{1-\exp(-2kL)}\left[\exp[k(x-L)] + \exp(-kx)\right]\right\}\frac{F}{4bh}kL\frac{h}{L}. \tag{20}$$

Ongelmassa on siten kaksi dimensiotonta suhdetta, jotka määrittävät käyttäytymisen, eli

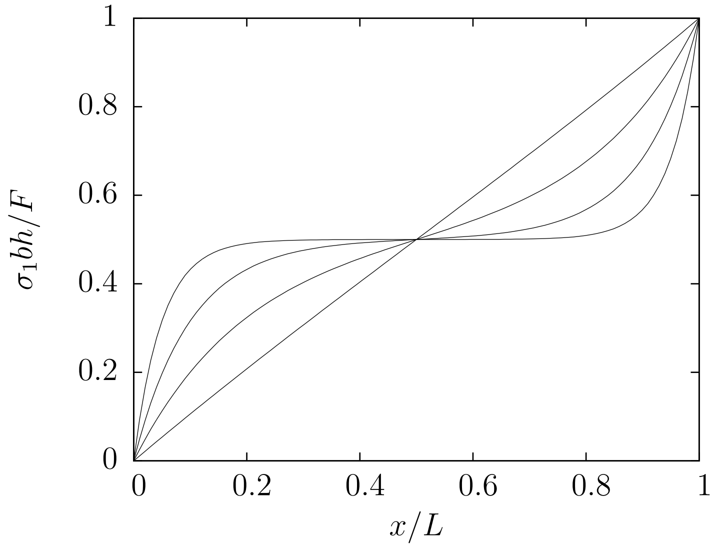
$$kL = 2\sqrt{\frac{G_s}{E}}\sqrt{\frac{h}{t}}\frac{L}{h}, \quad \text{ja} \quad \frac{h}{L},$$

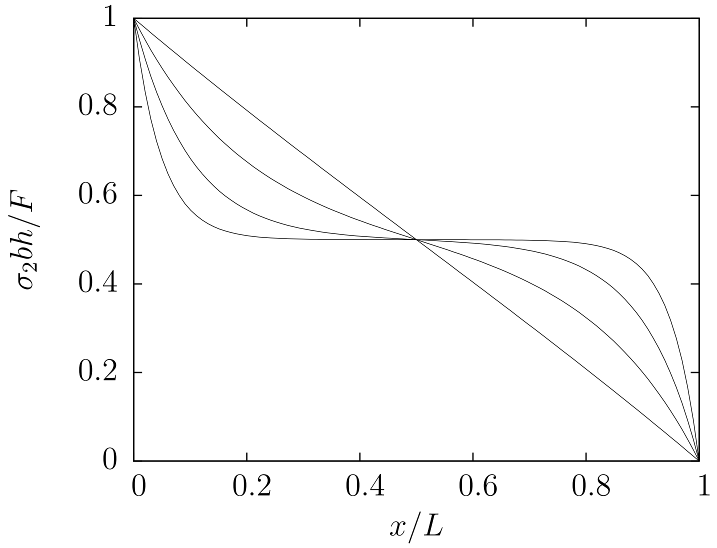
jossa tietenkin dimensiottomaan vakioon kL vaikuttaa liiman ja leikkeen kimmovakioiden suhde G_S/E ja leikkeen ja liimasauman paksuussuhde h/t.

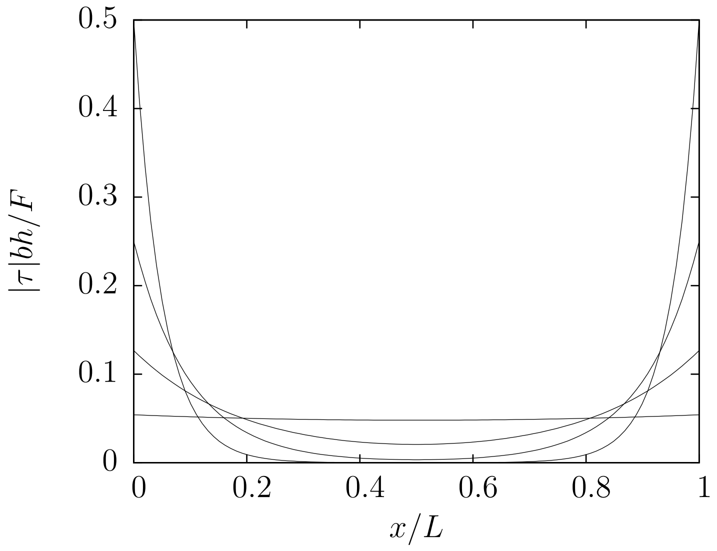
Leikkausjännitysten resultantin on tietenkin oltava

$$\int_0^L \tau\, b\, \mathrm{d}x = F/2.$$

Jännitysjakaumien kuvaajat kun $L/h = 10$ parametrin kL arvoilla $1, 5, 10$ ja 20. Parametrin kL kasvaessa muodostuu voimistuvat reunahäiriöt kun $kL > 1$ liitosalueen reunoille. Mieti oheisten tulosten perusteella miten niissä näkyvät mallin rajoitteet.


$\sigma_1 bh/F$
x/L
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


$\sigma_2 bh/F$
x/L
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


$|\tau| bh/F$
x/L
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1