MEI-55100 Mallintamisen perusteet
Harjoitus 1, ratkaisut, kevät 2015
Tuomas Kovanen

T1: Ensimmäinen väite (käytetään divergenssin määritelmää ja Stokesin teoreemaa):

$$\mathrm{divcurl}\vec{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{|V|} \int\limits_{\partial V} \mathrm{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}a = \lim_{V\to 0} \frac{1}{|V|} \int\limits_{\partial\partial V} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

kaikilla derivoituvilla vektorikentillä $\vec{F}$. Koska reunan reuna on nolla, jälkimmäiseen raja-arvoon liittyy (tilavuuksilla parametrisoitu reaalilukujen) jono, jonka kaikki alkiot ovat nollia.

Toinen väite (käytetään roottorin määritelmää ja "gradienttiteoreemaa"):

$$\vec{n}\cdot\mathrm{curlgrad}\varphi = \lim_{S\to 0} \frac{1}{|S|} \int\limits_{\partial S} \mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{|S|} \int\limits_{\partial\partial S} \varphi = 0$$

kaikilla vektoreilla $\vec{n}$ (kullakin vektorilla $\vec{n}$ raja-arvoprosessiin liittyy siis pintojen jono s.e. pinnan yksikkönormaali pisteessä jossa roottoria määritetään on aina $\vec{n}$) ja kaikilla derivoituvilla funktioilla φ.

T2:

(a) Työ siirrettäessä testivaraus $\hat{e}_2$:n suuntaista polkua C pitkin (parametrisointi $\vec{\gamma} : [0, b] \to \Omega \subset V^3$; $\vec{\gamma}(x_2) = c\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + d\hat{e}_3$):

$$\int\limits_C q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_0^b q\vec{E}(\vec{\gamma}(x_2))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}x_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 = \int\limits_0^b qE_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\mathrm{d}x_2 = 0.$$

Toisen pistetulon suhteen määritetyn sähkökenttävektorin $\vec{E}'$ avulla ilmaistuna (voidaan käyttää samaa polun parametrisointia kuin edellä):

$$\begin{aligned}\int\limits_C q\vec{E}' \cdot' \mathrm{d}\vec{l} &= \int\limits_0^b q\vec{E}'(\vec{\gamma}(x_2)) \cdot' \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}x_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 \\ &= \int\limits_0^b q\sum_i E_i'\hat{e}_i' \cdot' \hat{e}_2 \mathrm{d}x_2 \\ &= \int\limits_0^b q\sum_i E_i'\hat{e}_i' \cdot' \hat{e}_2' \mathrm{d}x_2 \\ &= \int\limits_0^b qE_2'\mathrm{d}x_2 \\ &= qE_2'b.\end{aligned}$$

Jotta tehty työ ei riipu pistetulosta niin tämän tulee olla nolla, ts. $E_2' = 0$. Vastaavasti $\hat{e}_3$:n suuntainen polku, saadaan $E_3' = 0$.

(b) Paikkavektori $\vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 = x_1 2\hat{e}_1' + x_2\hat{e}_2' + x_3\hat{e}_3'$, joten $\vec{x}$:n komponetit kannan $(\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3')$ määräämässä Karteesisessa koordinaatistossa on $(x_1', x_2', x_3') = (2x_1, x_2, x_3)$. Siis tässä koordinaatistossa levyt ovat kohtisuorassa x_1'-akseliin nähden kohdissa $x_1' = 0$ ja $x_1' = 2a$.

(c) $\vec{E}' = \frac{E_1}{2}\hat{e}_1' = \frac{E_1}{2}\frac{1}{2}\hat{e}_1 = \frac{E_1}{4}\hat{e}_1$.

T3:

(a) $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1} = \hat{e}_1$, $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2} = \hat{e}_2$, $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$.

(b) $\int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\mathrm{d}a = \int_0^b \int_0^a B_3\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = B_3 ab$.

(c) $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1} = \hat{e}_1 = \hat{e}_1'$, $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2} = \hat{e}_2 = 2\hat{e}_2'$, $\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_1} \times \frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial x_2} = \hat{e}_1' \times 2\hat{e}_2' = 2\hat{e}_3'$.

(d) $\int_S \vec{B}' \cdot' \vec{n}'\mathrm{d}a' = \int_0^b \int_0^a (\sum_i B_i'\hat{e}_i') \cdot' 2\hat{e}_3' \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_0^b \int_0^a 2B_3'\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 2B_3'ab$.

(e) Tulee toteutua $B_3 ab = 2B_3'ab$, eli $B_3' = B_3/2$.