Tapio Salmi

23140
RAKENTEIDEN DYNAMIIKKA

Luennot kl. 2003

Tampereen teknillinen yliopisto
Koneosasto/Teknillinen mekaniikka ja optimointi

TAMPERE 2003

TTY/Koneosasto

Teknillinen mekaniikka ja optimointi

23140 RAKENTEIDEN DYNAMIIKKA

Luennot kl. 2003/*Tapio Salmi*

UNIVERSITY OF OULU
Department of Civil Engineering

51166S ADVANCED STRUCTURAL ANALYSIS II 3,0 ov

Assoc.prof. *Tapio Salmi*, 1993

CONTENTS

PART ONE: DYNAMICS OF STRUCTURES

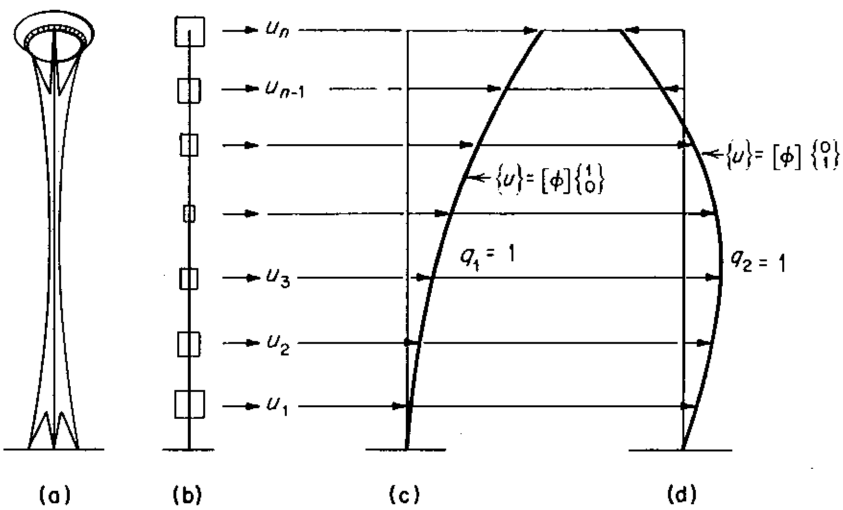
RAKENTEIDEN DYNAMIIKKA

1 JOHDANTO

1.1 Yleistä:

Rakenteiden suunnittelussa joutuu insinöörikunta paneutumaan yhä mutkikkaampaa luonnetta oleviin probleemoihin. Tämän päivän rakenteissa vaaditaan pidempiä jännevälejä kuin ennen samalla, kun taloudelliset tekijät pakottavat säästämään materiaalia. Sellaisina rakenteet ovat entistä herkempiä dynaamisille herätteille. Ongelmia aiheuttaa myös se seikka, että toisissa olosuhteissa suunnitellut rakenteet joutuvat ajan mukana, liikenteen kasvaessa ja ajoneuvonopeuden lisääntyessä, yhä suurempien dynaamisten kuormitusten alaisiksi. Ajattelutapa, että rakenteiden mitoitus on vain statiikan tehtävä, on kovasti vähenemässä.

Rakennusinsinööri on kiinnostunut lähinnä alustaansa kiinnitetyistä rakenteista kuten rakennuksista, silloista, tornirakenteista, koneiden alustoista jne. Tällaisten rakenteiden liikkeet ovat aina yhteydessä muodonmuutoksiin. Rakenne voi olla vain edestakaisessa liikkeessä tasapainoasemansa molemmin puolin. Kiinteiden rakenteiden dynamiikka on näin ollen värähtelydynamiikkaa.



Kuva 1 Todellinen rakenne (a), idealisoitu rakenne (b), 1. värähtelymuoto (c), 2. värähtelymuoto (d).

1.2 Teorian perusoletukset:

Rakenteiden dynaamisen käyttäytymisen tarkastelun perustana ovat ne rakenteen ominaisuudet, joita kutsutaan kuormitus-siirtymäominaisuuksiksi.
Tässä esityksessä tullaan tarkastelemaan lähinnä idealisia rakenteita, idealisia systeemeitä, joilla tarkoitetaan rakenteita, joiden kuormituksen ja siirtymäkentän välinen relaatio on riippumaton siitä tiestä, jota pitkin lopulliseen siirtymäkenttään on tultu. Idealinen systeemi on konservatiivinen, ja sen kuormitus-siirtymäominaisuudet voidaan karakterisoida potentiaalifunktiolla.

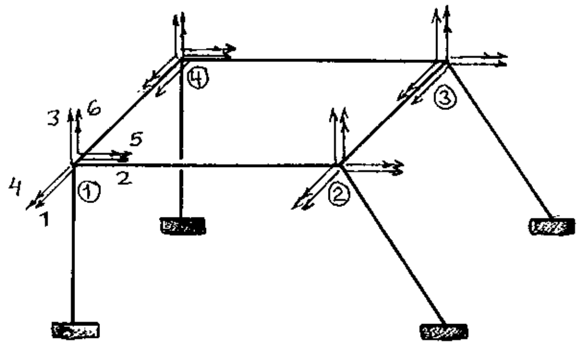
Rakenne on sisäisesti idealinen, jos sen toiminta on sekä geometrisesti että fysikaalisesti lineaarinen. Sisäisesti ideaali rakenne on kuormitus-siirtymäominaisuuksiltaan lineaarinen. Lineaarisuus mahdollistaa superpositioperiaatteen soveltamisen kuormitus-siirtymärelaatioihin.
Se, että rakenne on sisäisesti idealinen, ei vielä tee kuormitettua rakennetta idealiseksi systeemiksi. Myös kuormituksen ja rakenteen kahlitsemistavan on täytettävä eräitä ehtoja. Vaaditaan, että rakenne on kahlittu siten, että kuormituksen aiheuttamat muutokset kahlitsemistavassa eivät aiheuta epälineaarisuuslähdettä.

Kuormitettu rakenne muodostaa idealisen konservatiivisen systeemin vain, jos vaikuttavat ulkoiset voimat ovat konservatiivisia, niihin ei saa kuulua esimerkiksi nopeudesta riippuvia voimia. Tavallisimpia rakenteiden dynamiikassa esille tulevia nopeudesta riippuvia voimia ovat kitkavoimat ja väliaineen vastus. Siis välttämättömät ehdot, jotta kuormitettu värähtelevä rakenne muodostaisi idealisen eli konservatiivisen systeemin, ovat:

* rakenne on sisäisesti idealinen.
* rakenteen kahlitsemistavasta ei synny epälineaarisuuslähdettä.
* ulkoiseen voimasysteemiin ei kuulu nopeudesta riippuvia voimia.

2 SAUVARAKENTEEN LIIKEYHTÄLÖT VEKTORIAVARUUDESSA

2.1 Diskreetit koordinaatit:



Kuva 2 Rakenteen diskreetti koordinaatisto.

Statiikan tehtävässä sauvarakenteen siirtymiä seurattiin tarkastelemalla ensin rakenteen nurkkapisteiden siirtymiä. Nurkkiin asetettiin karteesinen koordinaatisto, jonka mukaisesti sekä siirtymien että voimien mittaus suoritettiin. Nurkkien eli solmujen tasapainoyhtälöryhmä, joka on lineaarinen yhtälöryhmä, ratkaistiin, jolloin saatiin solmujen siirtymät. Siitä voitiin ratkaista kunkin elementin (sauvan) päätepoikkileikkausten voimasuureet (rasitukset), joista taas saatiin laskettua elementin alueella tapahtuvat siirtymät ja rasitukset. Näin rakenteen statiikan tehtävän ratkaiseminen onnistui tarkasti, vaikka käytettiin vain äärellisulotteista koordinaatistoa ja vaikka rakenteen ominaisuudet ovat jatkuvasti jakautuneet, toisin sanoen vaikka rakenne todellisuudessa on kontinuumi.

Edellä selostettua solmuihin liitettyä koordinaatistoa kutsutaan diskreetiksi. Kuvassa 1 on diskreetti koordinaatisto, jonka ulotteisuusluku (dimensio) on 24.

Voidaanko dynamiikan tehtävässä käyttää samanlaista (samaa) diskreettiä koordinaatistoa? Rakenteen globaalit solmusiirtymät

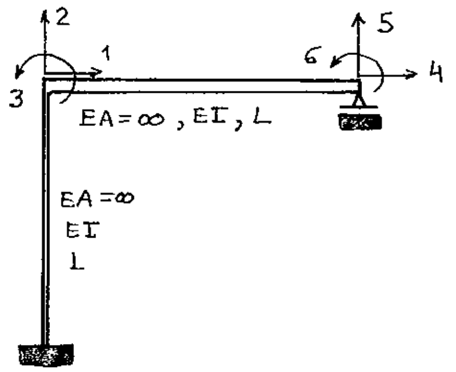
$$\{D\} = \{D_1\ D_2\ \dots\ D_{24}\} \tag{1}$$

tulkitaan tietenkin ajan t funktioiksi

$$\{D(t)\} = \{D_1(t)\ D_2(t) \dots D_{24}(t)\} \tag{2}$$

Näin voidaan menetellä. Osoittautuu, kuten myöhemmin nähdään, että näin menetellen dynamiikan tehtävä saadaan vain likimäärin ratkaistua, sitä tarkemmin, mitä tiheämmässä solmuja on. Tarkemman tuloksen saamiseksi dynamiikan tehtävässä solmuja kannattaa panna muuallekin kuin sauvarakenteen nurkkiin!

2.2 Sidotut ja vapaat koordinaatit:



Kuva 3 Taitekehän sidottu koordinaatisto.

Usein siirtymäkoordinaatit {D} eivät ole toisistaan riippumattomia eli vapaita koordinaatteja, sillä jostain syystä siirtymäkoordinaattien välillä voi olla kytkentäyhtälöitä (equations of constraints). Sauvat voivat olla esimerkiksi venymättömiä ja tuet joustamattomia, josta seuraa kytkentäyhtälöiksi kinemaattisia ehtoja.

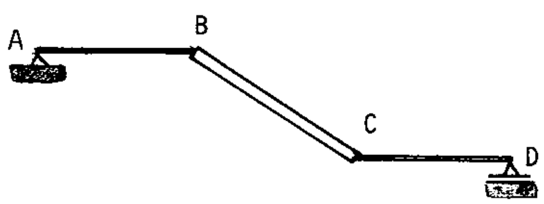
Myös voimakoordinaatit voivat olla kytkettyjä. Jos esimerkiksi rakenteella on jäykän kpleen liikemahdollisuuksia, niin voimakoordinaatteja {F} sitoo toisiinsä jäykän kpleen tasapainoyhtälöt, kytkentäyhtälöt ovat siis staattisia ehtoja.

Esimerkkinä kinemaattisista kytkentäyhtälöistä tarkastellaan kuvan 3 kehää, jonka 6-ulotteinen siirtymäkoordinaatisto ei ole vapaa, sillä siirtymäkoordinaatteja sitovat ehdot

$$D_1 - D_4 = 0 \quad \& \quad D_2 = 0 \quad \& \quad D_5 = 0$$

Koko rakenteen vapausasteiden lukumäärä on siis $6 - 3 = 3$. Vapaiksi koordinaateiksi q_1, q_2, q_3 voidaan valita

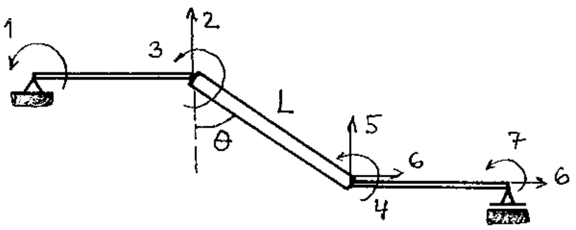
$$q_1 = D_1 = D_4 \quad , \quad q_2 = D_3 \ , \quad q_3 = D_6$$



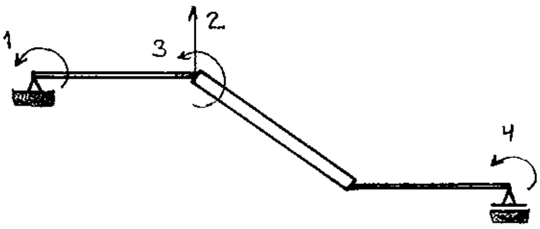
ESIMERKKI:

Kuvan rakenteen kaikkien palkkien vetojäykkyys ja palkin BC taivutusjäykkyys ovat hyvin suuret verrattuna palkkien AB ja CD taivutusjäykkyyteen. Määritä rakenteen vapausasteiden lukumäärä ja esitä jokin vapaa koordinaatisto.

RATKAISU:



(a)



(b)

Kuva 4 Rakenteen sidottu (a) ja vapaa (b) koordinaatisto.

Koska palkki BC on täysin jäykkä taivutukselle, niin

$$D_4 = D_3 \qquad (1)$$

Jäykän kpleen liikkeestä seuraa

$$\begin{cases} D_5 = D_2 + D_3 \cdot L \sin\theta & (2) \\ D_6 = + D_3 \cdot L \cos\theta & (3) \end{cases}$$

Huomaa: Ehdot (2)+(3) vastaavat jo ehtoa, että palkki BC ei veny;

$$D_2 \cos\theta = D_5 \cos\theta - D_6 \sin\theta$$

Rakenteen vapausasteiden lukumäärä on 7−3=4. Valitaan (kuva 4 (b))

$$q_1 = D_1\,,\quad q_2 = D_2\,,\quad q_3 = D_3\,,\quad q_4 = D_7$$

Rakenteen dynamiikan tehtävä pyritään suorittamaan vapaassa siirtymäkoordinaatistossa. Tavallisissa rakenteiden analysointitehtävissä vapaa koordinaatisto on olemassa jäse on helppo löytää. Siihen päästäänottamalla ensin käyttöön "luonnollinen" sidottu koordinaatisto, josta sidosyhtälöiden avulla siirrytään vapaaseen koordinaatistoon. Tämä onnistuu silloin, kun sidosyhtälöt ovat <u>holonomiset</u> (holonomic).
Jos tarkasteltava systeemi sisältää nopeudesta riippuvia voimia, niin niiden väliset sidosyhtälöt, tasapainoyhtälöt, sisältävät solmujen nopeuskomponentteja eikä suoraan siirtymäkomponentteja. Jos nämä sidosyhtälöt eivät integroidu, niin niitä sanotaan <u>epäholonomisiksi</u> (nonholonomic). Tällaisissa systeemeissä ei päästä sidotusta koordinaatistosta vapaaseen koordinaatistoon. Näitä tapauksia ei käsitellä tässä yhteydessä.

2.3 Koordinaatiston muunnokset:

Usein vapaata koordinaatistoa ei löydetä suoraan vaan käytetään ensin sidottua koordinaatistoa. Sen jälkeen suoritetaan koordinaatiston muunnos eli transformaatio sidotusta koordinaatistosta vapaaseen koordinaatistoon.

Tarkastellaan rakennetta, jonka sidotut siirtymäkoordinaatit ovat $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Olkoon systeemin vapausasteiden lukumäärä $n < m$ ja vapaat koordinaatit $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Sidotun koordinaatiston $\{D\}$ ja vapaan koordinaatiston $\{q\}$ välillä vallitsee transformaatio

$$\{D\} = \{D(\{q\})\} \qquad (3)$$

joka jakaantuu m kappaleeksi skalaariyhtälöitä

$$D_j = D_j(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (4)$$

Vastaavien differentiaalien välillä vallitsee yhteys

$$dD_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_j}{\partial q_k} dq_k \quad \Rightarrow \quad \{dD\} = [C]\{dq\} \qquad (5)$$

missä

$$C_{jk} = \frac{\partial D_j}{\partial q_k} \qquad (5)'$$

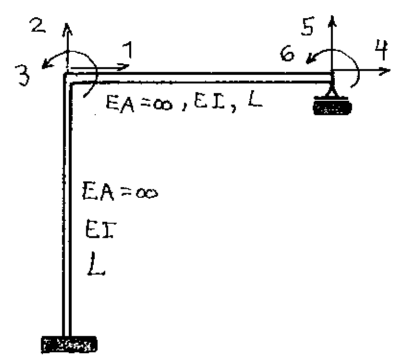
Kerroinmatriisia $[C]$ sanotaan transformaatiomatriisiksi.

Jos yhtälöt (4) ovat lineaariset, niin $[C]$ on vakiomatriisi ja yhtälö (5) edustaa silloin globaalia transformaatiota

$$\{D\} = [C]\{q\} \qquad (6)$$

toisin sanoen yhtälöt (3) ja (6) ovat sama yhtälö. Jos yhteys (4) sen sijaan on epälineaarinen, niin (5) esittää vain paikallista eli lokaalia transformaatiota.

Tässä esityksessä tullaan tarkastelemaan lähinnä vain lineaarisia muunnoksia, jolloin globaali yhteys (6) on käytettävissä.



ESIMERKKI:

Määritä kuvan rakenteen sidotun ja vapaan siirtymäkoordinaatiston välinen muunnosmatriisi.

RATKAISU:

Sivun 5 perusteella

$$\begin{cases} q_1 = D_1 = D_4 \\ q_2 = D_3 \\ q_3 = D_6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = q_1 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = q_2 \\ D_4 = q_1 \\ D_5 = 0 \\ D_6 = q_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kirjoitetaan siirtymät solmusiirtymävektoriin $\{D\}$ siten, että ensin vapaat $\{D\}_f = \{q\}$ ja sitten sidotut koordinaatit $\{D\}_c$. Sidosyhtälöt ovat lineaarinen yhtälöryhmä

$$[A]\{D\} = \{0\} \Rightarrow [[A]_f \,\vdots\, [A]_c] \begin{bmatrix} \{q\} \\ \hdashline \{D\}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \hdashline \{0\} \end{bmatrix}$$

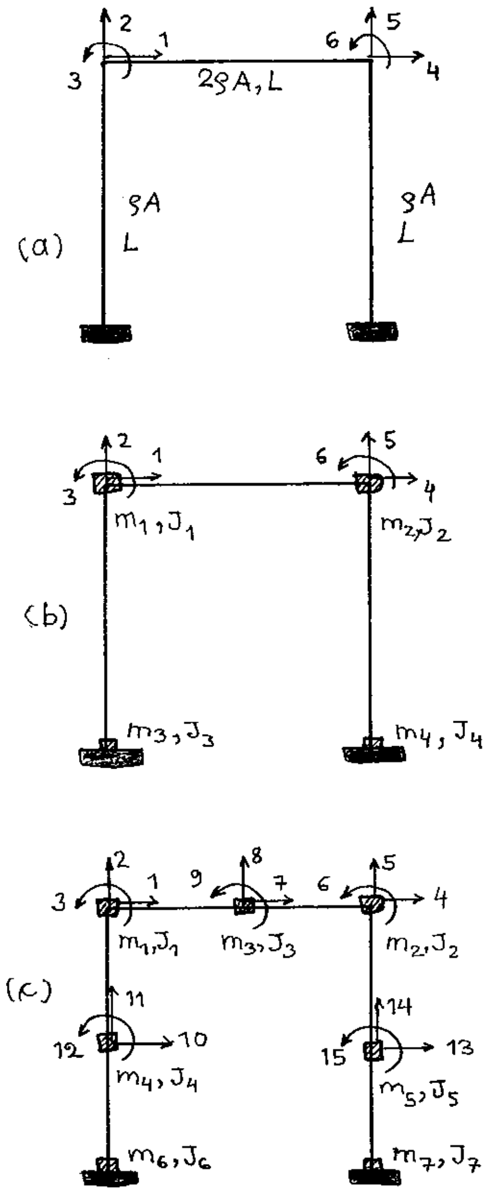
$$\Rightarrow [A]_f\{q\} + [A]_c\{D\}_c = \{0\} \qquad (\det[A]_c \neq 0)$$

$$\Rightarrow \{D\}_c = -[A]_c^{-1}[A]_f\{q\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \{D\}_f \\ \hdashline \{D\}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \\ \hdashline -[A]_c^{-1}[A]_f \end{bmatrix} \{q\} \Rightarrow [C] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[A]_c^{-1}[A]_f \end{bmatrix} \tag{7}$$

Koordinaatiston muunnos kannattaa tehdä tietyissä tapauksissa myös <u>vapaasta</u> koordinaatistosta <u>vapaaseen</u> koordinaatistoon. Esimerkiksi, kun rakenteelle on löydetty vapaa koordinaatisto, niin sen jälkeen etsitään vielä sellainen vapaa koordinaatisto, jossa rakenteen <u>liikeyhtälöt separoituvat</u> kukin yhtälö itsenäiseksi yhden vapausasteen liikeyhtälöksi. Koordinaatistoa, jossa liikeyhtälöt separoituvat kutsutaan <u>pääkoordinaatistoksi</u>. Muita koordinaatistomuunnoksia olisi esimerkiksi <u>koordinaatiston kierto</u>, joka usein joudutaan tekemään.

2.4 Massan diskretisoimis- eli keskittämisperiaate:



Kuva 5 Diskreetti koordinaatisto (a), massan diskretisointi (b) ja (c).

Kun käytetään diskreettiä koordinaatistoa, niin tällöin seurataan rakenteen solmujen liikettä ja käytetään siis varsin pienen dimension omaavaa globaalia koordinaatistoa (kuva 5 (a)).

Usein, mutta ei aina, rakenteen massa (hitaus) diskretisoidaan (keskitetään) samalla tavalla kuin koordinaatisto.
Esimerkiksi kuvan 5 kehän palkkien massa voidaan keskittää rakenteen nurkkiin (solmuihin) siten, että translaatiomassat

$$m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2}\varrho AL + \tfrac{1}{2}\cdot 2\varrho AL = \tfrac{3}{2}\varrho AL$$
$$m_3 = m_4 = \tfrac{1}{2}\varrho AL$$

Kysymyksessä on kuitenkin massajakautuman kannalta approksimaatio. Jos halutaan tarkemmin ottaa huomioon massan jakautuminen, on varattava laskentaan useampia koordinaatteja, kuten kuvassa 5(c) on tehty. Translaatiomassoiksi solmuihin saataisiin

$$m_1 = m_2 = \tfrac{1}{3}\varrho AL + \tfrac{1}{3}\cdot 2\varrho AL = \varrho AL$$
$$m_3 = \tfrac{1}{3}\cdot 2\varrho AL = \tfrac{2}{3}\varrho AL$$
$$m_4 = m_5 = \tfrac{1}{3}\varrho AL$$
$$m_6 = m_7 = \tfrac{1}{3}\varrho AL$$

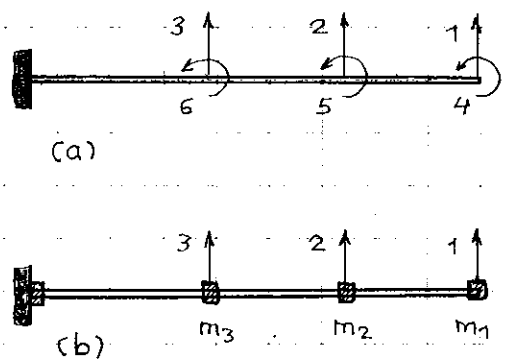
Rotaatiohitauksien keskittäminen on hyvin vaikeaa. Usein valitaan $J_1 = J_2 = 0$ ja $J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = J_7 = J_8 = 0$, mikä on hyvä approksimaatio rotaatiohitauksien keskittämiselle. Tähän kysymykseen palataan tarkemmin hieman myöhemmin.

Valitsemalla rakenteesta yhä tiheämpi tarkkailupisteiden verkko, tullaan yhä useamman ulotteisiin koordinaatistoihin, joilla voidaan yhä tarkemmin kuvata rakenteen todellista liikettä. Kun jatkuvasti jakautunut massa (hitaus) kuvataan edellä esitetyllä tavalla muodostetussa äärellisulotteisessa avaruudessa, puhutaan <u>massan diskretisoinnista</u> eli <u>keskittämisestä</u>.

On selvää, että rakenteelle voidaan n-ulotteisen avaruuden koordinaatisto valita monellakin tavalla. Pyrkimyksenä on suorittaa niin koordinaatiston kuin massan diskretisointi mahdollisimman tarkoituksenmukaisesti ja oikein kutakin annettua ulotteisuuslukua n kohti.

2.5 Koordinaatiston staattinen tiivistäminen:

Massaa ei aina kannata keskittää samalla tavalla kuin koordinaatisto. Kuvan 6 ulokepalkin massa on diskretisoitu vain translaatiomassoiksi m_1, m_2 ja m_3. Rotaatiokoordinaatteihin ei ole liitetty massaa (hitautta).



<u>Kuva 6</u> Massan diskretisointi translaatiomassoiksi.

Koska rotaatiokoordinaatit esittävät massattomia vapausasteita, niistä kannattaa <u>muodollisesti</u> päästä eroon. Rotaatiokoordinaatit voidaan "poistaa" tarkastelusta niin sanotun koordinaatiston <u>staattisen tiivistämistekniikan</u> avulla.

Staattinen tiivistäminen tarkoittaa sitä, että siirrytään kuvan 6 (a) koordinaatistosta kuvan 6 (b) koordinaatistoon siten, että tehtävän statiikan ratkaisu säilyy edelleen tarkkana.

Alkuperäisessä (kuva 6(a)) koordinaatistossa solmujen tasapainoyhtälöryhmä on

$$[K]\{D\} = \{P\} \tag{8}$$

Merkitään

$\{P^*\}$ jäljelle jääviin koordinaatteihin liittyvät solmuvoimat

$\{P^o\}$ poistettaviin koordinaatteihin liittyvät solmuvoimat

$\{D^*\}$ jäljelle jäävät solmusiirtymät

$\{D^o\}$ poistettavat solmusiirtymät

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c}\{P^*\}\\ \hline \{P^o\}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c}[K_{11}] & [K_{12}]\\ \hdashline [K_{21}] & [K_{22}]\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\{D^*\}\\ \hline \{D^o\}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}[K_{11}]\{D^*\}+[K_{12}]\{D^o\}\\ \hdashline [K_{21}]\{D^*\}+[K_{22}]\{D^o\}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}\{P^o\} = [K_{21}]\{D^*\}+[K_{22}]\{D^o\} & \Rightarrow \{D^o\} = [K_{22}]^{-1}(\{P^o\}-[K_{21}]\{D^*\})\\ \{P^*\} = [K_{11}]\{D^*\}+[K_{12}]\{D^o\} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \{P^*\} = [K_{11}]\{D^*\}+[K_{12}]([K_{22}]^{-1}\{P^o\}-[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{D^*\}$$

$$\Rightarrow \quad \{P^*\}-[K_{12}][K_{22}]^{-1}\{P^o\} = ([K_{11}]-[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])\{D^*\}$$

Siis uudessa koordinaatistossa tasapainoyhtälö on muotoa

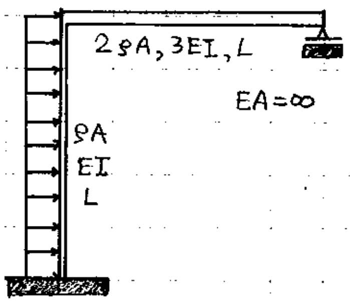
$$\boxed{\{P^{**}\} = [K^*]\{D^*\}} \qquad (9)$$

$$\boxed{\{P^{**}\} = \{P^*\}-[K_{12}][K_{22}]^{-1}\{P^o\}} \qquad (10)$$

$$\boxed{[K^*] = [K_{11}]-[K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]} \qquad (11)$$

Huomaa: Kaavojen (10) ja (11) mukainen laskenta tapahtuu käytännössä Gaussin eliminointitekniikkaa hyväksikäyttäen.

Staattista tiivistämistä kannattaa yleensä käyttää vain jos ei ole tehokkaampia menetelmiä käytettävissä. Mikäli on käytettävissä moderni, tehokas ominaisarvoratkaisija, tiivistäminen tuskin kannattaa. Sitä näkee sovellettavan siten, että rakenteen massa keskitetään melko pienelle solmumäärälle, niin sanotuille *isäntäsolmuille* ja muut solmut tiivistetään pois.



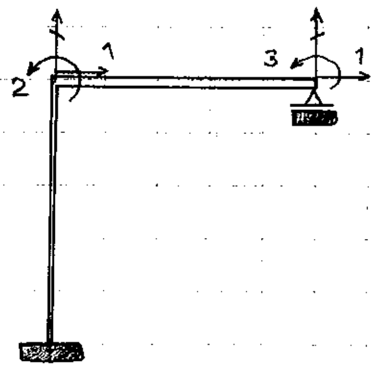
ESIMERKKI:

Kuvan kehän massa keskitetään nurkkiin. Sitä kuormittaa harmoninen tuulikuormitus

$$p(t) = p_0 \sin \Omega t$$

Määritä rakenteen alin ominaiskulmataajuus sekä nurkkien siirtymien amplitudit.

RATKAISU:



Kuvan koordinaatistossa globaali jäykkyysmatriisi

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{c|cc} 12 & 6L & 0 \\ \hline 6L & 16L^2 & 6L^2 \\ 0 & 6L^2 & 12L^2 \end{array}\right]$$

Keskitetään rakenteen massa translaatiokoordinaattiin 1, jolloin saadaan

$$m_1 = 2\varrho AL + \tfrac{1}{2}\varrho AL = \tfrac{5}{2}\varrho AL$$

Rotaatiokoordinaatteihin liittyviä hitaussuureita on vaikea arvioida. Tiivistetään rotaatiokoordinaatit pois.

$$\{P\} = \{P^{ekv}\} = \left[\begin{array}{c} pL/2 \\ \hline pL^2/12 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$[K_{11}] = 12\frac{EI}{L^3} \quad ; \quad [K_{12}] = [K_{21}]^T = \frac{EI}{L^3}[6L \ \ 0]$$

$$[K_{22}] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 16L^2 & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow [K_{22}]^{-1} = \frac{L^3}{EI}\frac{1}{156L^4}\begin{bmatrix} 12L^2 & -6L^2 \\ -6L^2 & 16L^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{P^{**}\} = \{P^*\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1}\{P^\circ\}$$

$$= \frac{pL}{2} - [6L \ \ 0]\begin{bmatrix} 12L^2 & -6L^2 \\ -6L^2 & 16L^2 \end{bmatrix}\frac{1}{156L^4}\begin{bmatrix} pL^2/12 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{pL}{2} - \frac{pL}{26} = \frac{6}{13}pL$$

$$[K^*] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] =$$

$$= 12\frac{EI}{L^3} - \frac{1}{156L^4}[6L \ \ 0]\begin{bmatrix} 12L^2 & -6L^2 \\ -6L^2 & 16L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6L \\ 0 \end{bmatrix}\frac{EI}{L^3} = 12\frac{EI}{L^3} - \frac{36}{13}\frac{EI}{L^3} = \frac{120}{13}\frac{EI}{L^3}$$

(jatkuu)

Hitausvoima-ajattelutapa:

$$K^* q_1 = P^{**} - m_1 \ddot{q}_1$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{q}_1 + K^* q_1 = P^{**} \quad | : m_1 \quad , \text{ merk. } \omega^2 = \frac{K^*}{m_1}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = \frac{\omega^2}{K^*} P^{**} \quad , \quad q_{st} = \frac{P^{**}}{K^*} = \frac{6 p_0 L/13}{120 EI/13 L^3} = \frac{p_0 L^4}{20\, EI}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = \omega^2 q_{st}\, f(t) \quad , \quad f(t) = \sin \Omega t$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = \omega^2 q_{st} \sin \Omega t$$

Pysyvien värähtelyjen vaste (steady-state response):

$$q_1(t) = q_{st} V \sin \Omega t \quad , \quad \text{vahvistuskerroin } V = \frac{1}{1-(\Omega/\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \quad q_1(t) = \frac{q_{st}}{1-(\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t \qquad \blacktriangleleft$$

Ominaistaajuus:

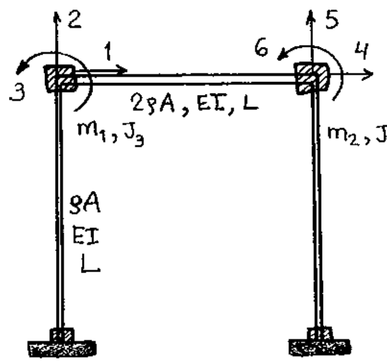
$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{m_1}} = \sqrt{\frac{48}{13} \frac{EI}{\rho A L^4}} \approx 1{,}9215 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \qquad \triangleleft$$

Huomaa:
Tiivistettyjen solmusiirtymien $q_2(t)$ ja $q_3(t)$ arvoja ei saada sivun (10) kaavasta

$$\{D^\circ\} = [K_{22}]^{-1} (\{P^\circ\} - [K_{21}]\{D^*\})$$

sillä kaava pätee vain statiikan tehtävässä.

2.6 Massaltaan diskreetin rakenteen liikeyhtälöt:



Kuva 7 Rakenteen solmukoordinaatit.

Kuvan 7 kehän palkkien massa on keskitetty rakenteen nurkkasolmuihin. Rakenteen solmusiirtymävektori (yleensä sidotussa) koordinaatistossa merkitiin

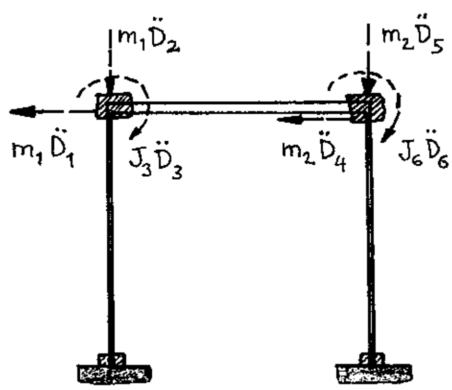
$$\{D\} = \{D_1\ D_2\ \dots\ D_6\}$$

Solmujen kiihtyvyyksien vektori, solmukiihtyvyysvektori on

$$\{\ddot{D}\} = \{\ddot{D}_1\ \ddot{D}_2\ \dots\ \ddot{D}_6\}$$

Käyttämällä hitausvoimakuvitelmaa voidaan solmuihin liittää kuvan 8 kuvitellut hitausvoimat

$$\{H\} = \{-m_1\ddot{D}_1\ -m_1\ddot{D}_2\ \dots\ -J_6\ddot{D}_6\} \qquad (12)$$



Kuva 8 Keskitettyihin massoihin liittyvät hitausvoimat.

Määrittelemällä keskitetty massamatriisi (lumped mass matrix)

$$[M]_L = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & J_3 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & J_6 \end{bmatrix} = \lceil m_1\ m_1\ J_3\ m_2\ m_2\ J_6 \rfloor \qquad (13)$$

saadaan Hitausvoimavektoriksi

$$\{H\} = -[M]_L\{\ddot{D}\} \qquad (14)$$

Kirjoitetaan solmujen kuviteltu tasapainoyhtälö hitausvoima-ajattelutavan mukaisesti

$$[K]\{D\} = \{P\} + \{H\} \qquad (15)$$

jossa annettuihin solmukuormituksiin $\{P\}$ (sisältää myös ekvivalenttiset solmukuormitukset) lisätään solmujen kuvitellut hitausvoimat $\{H\}$. Sieventämällä saadaan rakenteen liikeyhtälöksi diskreetissä koordinaatistossa

$$\boxed{[M]_L\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{P(t)\}} \qquad (16)$$

2.7 Liikeyhtälöiden transformoituminen koordinaattimuunnoksissa:

Massaltaan diskretisoidun rakenteen solmunopeusvektori (kuva 7)

$$\{\dot{D}\} = \{\dot{D}_1 \ \dot{D}_2 \ \cdots \ \dot{D}_6\}$$

Rakenteen liike-energiaksi seuraa

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{D}_1^2 + \dot{D}_2^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{D}_4^2 + \dot{D}_5^2) + \tfrac{1}{2} J_3 \dot{D}_3^2 + \tfrac{1}{2} J_6 \dot{D}_6^2 \tag{17}$$

Käyttämällä massamatriisia (13) voidaan rakenteen liike-energian lauseke kirjoittaa matriisimuodossa

$$T = \tfrac{1}{2}\{\dot{D}\}^T [M] \{\dot{D}\} \tag{18}$$

Olkoon $\{q\}$-koordinaatisto uusi siirtymäkoordinaatisto ja vallitkoon $\{D\}$- ja $\{q\}$-koordinaatistojen välillä lokaali yhteys (5)

$$\{dD\} = [C]\{dq\} \tag{19}$$

Jakamalla yhtälön (19) molemmat puolet ajalla dt saadaan

$$\left\{\frac{dD}{dt}\right\} = [C]\left\{\frac{dq}{dt}\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{D}\} = [C]\{\dot{q}\} \tag{20}$$

$\Rightarrow$

$$T = \tfrac{1}{2}([C]\{\dot{q}\})^T [M] ([C]\{\dot{q}\}) = \tfrac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [C]^T [M] [C] \{\dot{q}\} \tag{21}$$

Merkitään

$$\boxed{[M]_q = [C]^T [M] [C]} \tag{22}$$

ja sanotaan, että $[M]_q$ on massamatriisi uudessa $\{q\}$-koordinaatistossa. Tällöin liike-energia säilyttää muotonsa

$$T = \tfrac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [M]_q \{\dot{q}\} \tag{23}$$

Koska käytettiin lokaalia yhteyttä (19), niin ei vedottu muunnoksen lineaarisuuteen. Tulos (22) on siis käytettävissä, vaikka muunnos olisi epälineaarinenkin.

Annetaan siirtymille $\{D\}$ pieni virtuaalinen lisäys $\{\delta D\}$ siten, että

$$\{\delta D\} = \{\delta D_1 \ \delta D_2 \ \dots \ \delta D_n\}$$

Solmuvoimat tekevät tällöin virtuaalisen työn

$$\delta W = P_1 \delta D_1 + P_2 \delta D_2 + \dots + P_n \delta D_n = \{P\}^T \{\delta D\} \tag{24}$$

Jos koordinaattien $\{D\}$ ja $\{q\}$ välillä on edelleen yhteys

$$D_j = D_j(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \delta D_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial D_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{m} C_{jk} \delta q_k$$

$$\Rightarrow \quad \{\delta D\} = [C]\{\delta q\} \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad \delta W = \{P\}^T [C]\{\delta q\} = ([C]^T \{P\})^T \{\delta q\} \tag{26}$$

Merkitään

$$\boxed{\{Q\} = [C]^T \{P\}} \tag{27}$$

ja sanotaan, että $\{Q\}$ on <u>kuormitusvektori</u> uudessa $\{q\}$-koordinaatistossa. Tällöin virtuaalisen työn lauseke säilyy samanmuotoisena

$$\delta W = \{Q\}^T \{\delta q\} \tag{28}$$

Muunnos voi jälleen olla epälineaarinenkin.

Jos muunnos on <u>lineaarinen</u>, niin

$$\{D\} = [C]\{q\} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad \{P\} = [K]\{D\} \quad \& \quad \{Q\} = [K]_q \{q\} \tag{30}$$

$$\overset{(27)}{\Rightarrow} \quad \{Q\} = [C]^T \{P\} = [C]^T [K]\{D\} = [C]^T [K][C]\{q\}$$

$$\overset{(30)}{\Rightarrow} \quad \boxed{[K]_q = [C]^T [K][C]} \tag{31}$$

Muunnoksen oli siis oltava lineaarinen.

Liikeyhtälö (16) on

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{P\} \quad | \, [C]^T$$

$$\{D\} = [C]\{q\} \quad \text{lineaarinen muunnos}$$

$$\Rightarrow \{\ddot{D}\} = [C]\{\ddot{q}\}$$

$\Rightarrow$

$$[C]^T[M][C]\{\ddot{q}\} + [C]^T[K][C]\{q\} = [C]^T\{P\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{[M]_q\{\ddot{q}\} + [K]_q\{q\} = \{Q\}} \qquad (32)$$

Yhtälö (32) on liikeyhtälö $\{q\}$-koordinaatistossa. Se on <u>samanmuotoinen</u> kuin liikeyhtälö (16) $\{D\}$-koordinaatistossa!

<u>Yhteenveto</u>:

$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{P(t)\}$ liikeyhtälö
Muunnos: $\{D\} = [C]\{q\}$ $\Rightarrow$ $[M]_q = [C]^T[M][C]$ $[K]_q = [C]^T[K][C]$ $\{Q\} = [C]^T\{P\}$
$\Rightarrow$ $[M]_q\{\ddot{q}\} + [K]_q\{q\} = \{Q\}$ liikeyhtälö

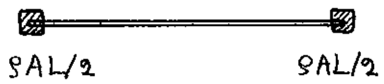
(33)

2.8 Palkkielementin keskitetty massamatriisi:

Kuva 9 Palkkielementti

Keskitetään kuvan 9 palkkielementin massa elementin päihin (solmuihin) kuvan 10 mukaisesti. Tällöin elementin **keskitetty massamatriisi** (lumped mass matrix)

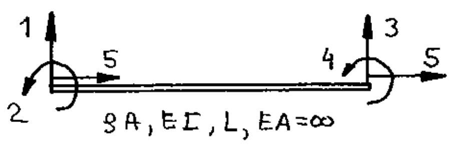
$$[\underline{m}]_L = \tfrac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\rho AL \lceil 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \rfloor \tag{34}$$



Kuva 10 Palkkielementin massan keskittäminen.

Statiikasta muistetaan elementin (kuva 9) jäykkyysmatriisi

$$[\underline{k}] = \frac{EI}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EAL^2}{EI} & 0 & 0 & -\frac{EAL^2}{EI} & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ \hline & & & \frac{EAL^2}{EI} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{array}\right] \tag{35}$$

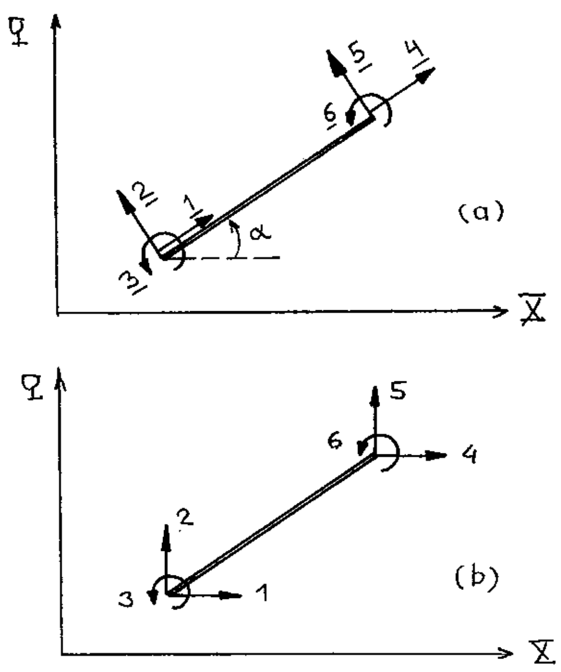


Kuva 11 Venymätön palkkielementti.

Jos palkkielementti on <u>venymätön</u> (kuva 11), niin sen massa- ja jäykkyysmatriisiksi seuraa

$$[\underline{m}]_L = \tfrac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\rho AL \lceil 1\ 0\ 1\ 0\ 2 \rfloor \tag{36}$$

$$[\underline{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$



Kuva 12 Elementin lokaalin koordinaatiston kierto.

Jos palkkielementin lokaali koordinaatisto ei yhdy globaalikoordinaattiakselien suuntiin, niin koordinaatistoa pitää kiertää kuvan 12 (b) asentoon. Siirtymäkoordinaattien $\{\underline{d}\}$ ja $\{d\}$ välillä on lineaarinen yhteys

$$\left\{\begin{aligned} \underline{d}_1 &= \cos\alpha\, d_1 + \sin\alpha\, d_2 \\ \underline{d}_2 &= -\sin\alpha\, d_1 + \cos\alpha\, d_2 \\ \underline{d}_3 &= d_3 \\ \underline{d}_4 &= \cos\alpha\, d_4 + \sin\alpha\, d_5 \\ \underline{d}_5 &= -\sin\alpha\, d_4 + \cos\alpha\, d_5 \\ \underline{d}_6 &= d_6 \end{aligned}\right. \tag{38}$$

eli $\{\underline{d}\} = [C]\{d\}$, missä

$$[C] = \left[\begin{array}{c|c} [T] & [0] \\ \hline [0] & [T] \end{array}\right] \tag{39}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

⇒

$$[m]_L = [C]^T[\underline{m}]_L[C] \tag{41}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} [T]^T & [0] \\ \hline [0] & [T]^T \end{array}\right] \tfrac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} [T] & [0] \\ \hline [0] & [T] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} [T]^T \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} [T] & [0] \\ \hline [0] & [T]^T \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} [T] \end{array}\right] \frac{\rho AL}{2} = [\underline{m}]_L \quad /.$$

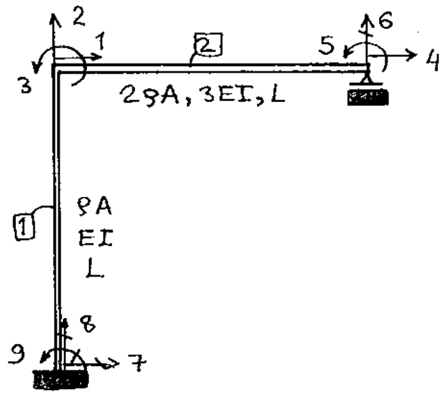
$$[k] = [C]^T[\underline{k}][C] \tag{42}$$

$$\{P\} = [C]^T\{\underline{P}\} \tag{43}$$

ESIMERKKI:

Määritä kuvan kehän globaali keskitetty massamatriisi.

RATKAISU:



$$[\underline{m}]^1_L = \tfrac{1}{2}\rho A L \begin{array}{c} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$[\underline{m}]^2_L = \frac{2\rho A L}{2} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow$$

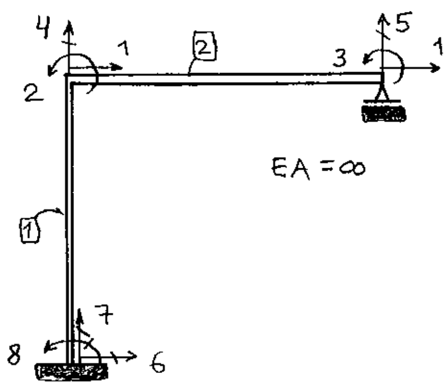
$$[M]_L = \tfrac{1}{2}\rho A L \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Tuloksen olisi tietysti pystynyt kirjoittamaan suoraankin ! ◁

ESIMERKKI:

Määritä kuvan kehän globaali keskitetty massamatriisi. Kehän palkin ovat venymättömät.

RATKAISU:



$$[\underline{m}]^1_L = \tfrac{1}{2}\rho A L \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[\underline{m}]^2_L = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\rho A L \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

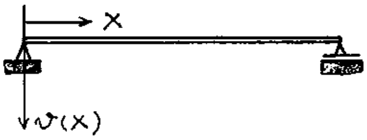
$$\Rightarrow$$

$$[M]_L = \tfrac{1}{2}\rho A L \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

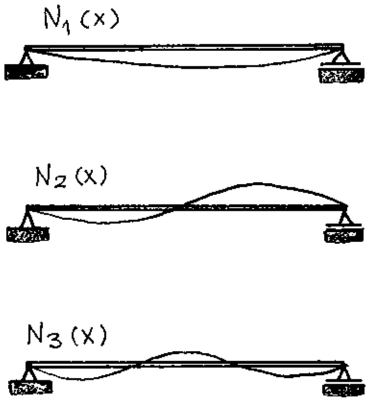
Tuloksen olisi taaskin pystynyt kirjoittamaan suoraankin ! ◁

3

3.1 Distributiiviset koordinaatit:



Kuva 13 Palkki



Kuva 14 Palkin siirtymän v interpolointifunktioita.

Toisen mahdollisuuden rakenteiden analyysiin tarjoavat *distributiiviset* eli jakautuneet koordinaatit.
Tasosauvarakenteen *kenttäfunktio* on sen siirtymä $v(x,t)$. Valitaan rakennekontinuumin alueelle *kinemaattisesti käyvät interpolointifunktiot* (muotofunktiot) $N_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$. Kinemaattinen käypyys tarkoittaa sitä, että funktiot $N_i(x)$ toteuttavat kinemaattiset reunaehdot.[*]
Interpolointifunktiot N_i, $i=1,2,3$ (kuva 14) määrittelevät 3-ulotteisen *funktioavaruuden kannan* (kantafunktiojoukko).
Kenttäfunktio $v(x,t)$ voidaan esittää tässä kannassa

$$v(x,t) = q_1(t)\,N_1(x) + q_2(t)\,N_2(x) + \dots + q_n(t)\,N_n(x) \tag{1}$$

missä $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ ovat *yleistetyt koordinaatit*. Matriisimuodossa kenttäfunktion $v(x,t)$ lauseke voidaan esittää

$$v(x,t) = [\,N_1 \;\; N_2 \;\; N_3\,] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \equiv [N]\{q\} \tag{2}$$

missä $[N] = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3]$ on *interpolointimatriisi*.

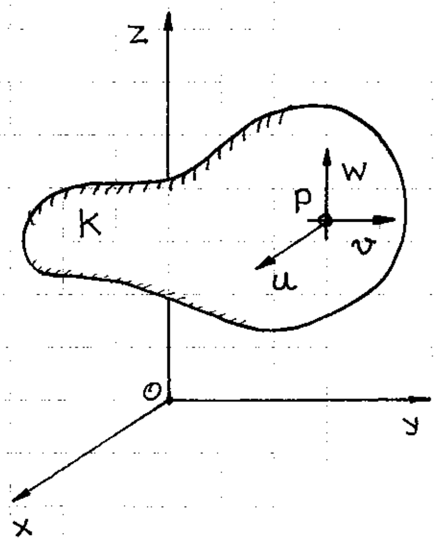
Jos seurattavia asioita on muitakin kuin poikittaissiirtymä $v(x,t)$, esimerkiksi $u(x,t)$ ja $w(x,t)$, niin kenttäfunktio käsitetään *kenttäfunktiovektoriksi*

$$\{f(x,t)\} = \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \\ w(x,t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

---

[*] Itse asiassa tässä on kyse *Ritzin funktioista* (vrt. Rayleigh-Ritzin menetelmä statiikassa).

3.2 Dynamiikan ongelman FEM-yhtälö



Kuva 1 Kontinuumikple

Kontinuumikappaleen (kuva 1) massa on jatkuvasti jakautunut tiettyyn avaruuden osaan tiheysfunktion

$$\rho = \rho(x,y,z,t) \qquad (1)$$

mukaisesti.

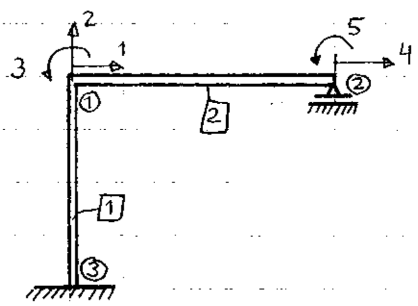
Kun kysymyksessä on kiinteä kple, eli solidi, niin tiheys ρ ei muutu ajan funktiona, joten

$$\rho = \rho(x,y,z) \qquad (2)$$

Tällöin on voimassa

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dV \qquad (3)$$

Merkitään kappaleen pisteen P: (x,y,z) siirtymäkomponentteja $u = u(t)$, $v = v(t)$, $w = w(t)$ kuvan 1 mukaisesti.

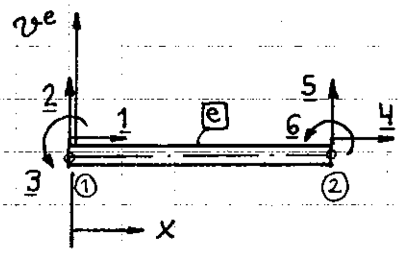


Kuva 2 Rakenteen globaalisolmumittausjärjestelmä

Elementtimenetelmässä kappale (rakenne) jaetaan elementteihin. Elementit liittyvät toisiinsa solmupisteissä (solmuissa). Solmujen siirtymiä merkitään $\hat{u}_i$ ja globaali solmusiirtymävektori

$$\{\hat{u}\} = \{\hat{u}_1 \; \hat{u}_2 \; \cdots \; \hat{u}_n\} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

missä n on systeemin vapausasteiden lukumäärä (number of degrees of freedom). Kuvassa 2 on globaalisiirtymävapausasteita 5 kappaletta, elementtejä on 2 ja globaalisolmuja on 3. Tuettuja vapausasteita ei kuvan 2 mallissa ole otettu mukaan laskentaan.



Kuva 1 HERMITEn palkkielementti

Kunkin elementin lokaalisolmujen siirtymäkomponentteja merkitään $\hat{\underline{u}}_i^e$ ja elementin solmusiirtymävektori

$$\{\hat{\underline{u}}^e\} = \{\hat{\underline{u}}_1^e \; \hat{\underline{u}}_2^e \; \cdots \; \underline{u}_{ne}^e\} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \\ \vdots \\ \hat{\underline{u}}_{n^e}^e \end{bmatrix}$$

missä n^e on elementin siirtymävapausasteiden lukumäärä. Kuvassa 1 on HERMITEn palkkielementti, jossa merkitään

$$\hat{\underline{u}}_1^e \equiv \hat{\underline{u}}_1^e \;,\; \hat{\underline{v}}_1^e \equiv \hat{\underline{u}}_2^e \;,\; \hat{\underline{\varphi}}_1^e \equiv \hat{\underline{u}}_3^e \;,\; \hat{\underline{u}}_2^e \equiv \hat{\underline{u}}_4^e \;,\; \hat{\underline{v}}_2^e \equiv \hat{\underline{u}}_5^e \;,\; \hat{\underline{\varphi}}_2^e \equiv \hat{\underline{u}}_6^e$$

$$\Rightarrow \quad \{\hat{\underline{u}}^e\} = \{\hat{\underline{u}}_1^e \; \hat{\underline{u}}_2^e \; \cdots \; \hat{\underline{u}}_6^e\} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \vdots \\ \hat{\underline{u}}_6^e \end{bmatrix}$$

Merkitään elementin siirtymäkentän komponentteja $u^e(x,y,z,t)$, $v^e(x,y,z,t)$, $w^e(x,y,z,t)$. Kenttäfunktio $\{u^e(x,y,z,t)\}$ on vektoriarvoinen:

$$\{u^e(x,y,z,t)\} = \begin{bmatrix} u^e(x,y,z,t) \\ v^e(x,y,z,t) \\ w^e(x,y,z,t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix} \tag{1}$$

Kenttäfunktion kukin komponentti interpoloidaan solmuarvoistaan yhtälöllä

$$\{u^e\} = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & & N_s^e & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & \cdots & 0 & N_s^e & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & & 0 & 0 & N_s^e \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \\ \hat{\underline{u}}_3^e \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{\underline{u}}_{ne-2}^e \\ \hat{\underline{u}}_{ne-1}^e \\ \hat{\underline{u}}_{ne}^e \end{bmatrix} \tag{2}$$

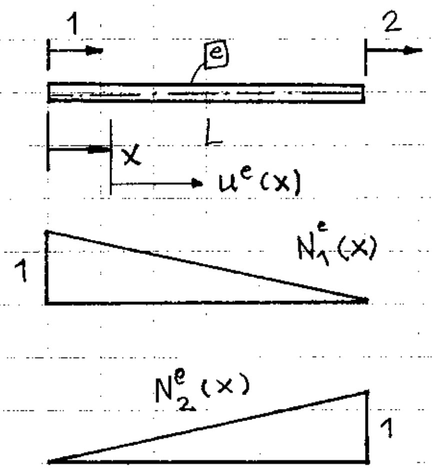
missä s on elementin solmujen lukumäärä. Lyhyesti kirjoitettuna yhtälö (2) on

$$\{u^e\} = \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{bmatrix} = [N^e]\{\hat{\underline{u}}^e\} \tag{3}$$

missä $[N^e]$ on elementin interpolaatiomatriisi.

Interpolointifunktioiksi N_i^e valitaan yleensä polynomeja, jotka täyttävät tietyt ehdot, esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^{s} N_i^e = 1 \tag{1}$$



Kuva 1 Sauvaelementti

Kuvan 1 sauvaelementin lineaarisen interpoloinnin funktiot ovat

$$N_1^e = 1 - \frac{x}{L} \quad , \quad N_2^e = \frac{x}{L}$$

$$[N^e] = [N_1^e \; N_2^e] = [1-\tfrac{x}{L} \;\; \tfrac{x}{L}]$$

$$\Rightarrow \quad \{u^e\} \equiv u^e = N_1^e \hat{\underline{u}}_1^e + N_2^e \hat{\underline{u}}_2^e$$

$$\Rightarrow \quad u^e(x) = (1-\tfrac{x}{L})\hat{\underline{u}}_1^e + \tfrac{x}{L}\hat{\underline{u}}_2^e$$

$$\Rightarrow \quad u^e = [N_1^e \; N_2^e] \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \end{bmatrix}$$

Merkitään elementin solmukiihtyvyyskomponentteja

$$\hat{\ddot{\underline{u}}}{}_i^e \equiv \frac{d^2}{dt^2} \hat{\underline{u}}^e \tag{2}$$

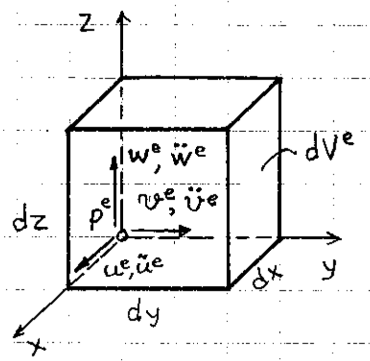
jolloin elementin solmukiihtyvyysvektori

$$\{\hat{\ddot{\underline{u}}}{}^e\} = \{\hat{\ddot{\underline{u}}}{}_1^e \;\; \hat{\ddot{\underline{u}}}{}_2^e \;\; \cdots \;\; \hat{\ddot{\underline{u}}}{}_{n^e}^e\} \tag{3}$$

Kiihtyvyyskentän vektori $\{\ddot{\underline{u}}^e(x,y,z,t)\}$ on

$$\{\ddot{\underline{u}}^e\} = [N^e]\{\hat{\ddot{\underline{u}}}{}^e\} \tag{4}$$

Interpolointimatriisi $[N^e]$ valitaan yleensä riippumattomaksi ajasta t.



Kuva 1 Materiaalipala

Otetaan elementin pisteeseen P^e liittyväksi materiaalipalaksi kuvan 1 suora suuntaissärmiö, jonka tahkot ovat koordinaattitasojen suuntaisia ja jonka tilavuus

$$dV^e = dx\,dy\,dz \tag{1}$$

ja massa

$$dm^e = \rho^e(x,y,z)\,dV^e \tag{2}$$

Materiaalipalaan kohdistuva hitausvoima

$$\{d\underline{h}^e\} = -dm^e\{\ddot{u}^e\} = -dm^e[N^e]\{\hat{\ddot{\underline{u}}}^e\} \tag{3}$$

Merkitään pisteeseen P^e liittyvää hitausvoimatiheyttä $\{\underline{h}^e\}$. Se määritellään lausekkeella

$$\{\underline{h}^e\} = \frac{\{d\underline{h}^e\}}{dV^e} = -\rho^e[N^e]\{\hat{\ddot{\underline{u}}}^e\} \tag{4}$$

Elementin tasapainoyhtälö on

$$[\underline{k}^e]\{\hat{\underline{u}}^e\} = \{\underline{\bar{F}}^e\} \tag{5}$$

missä jäykkyysmatriisilla $[\underline{k}^e]$ on lauseke

$$[\underline{k}^e] = \iiint_{V^e}[B^e]^T[E^e][B^e]\,dV^e \tag{6}$$

Kinemaattinen matriisi

$$[B^e] = [\partial^e][N^e] \tag{7}$$

Elementin solmuvoimavektori

$$\{\underline{\bar{F}}^e\} = \iiint_{V^e}[N^e]^T\{\underline{f}^e\}\,dV^e + \iint_{S^e}[N^e]^T\{\underline{p}^e\}\,dS^e \tag{8}$$

missä $\{\underline{f}^e\} = \{\underline{f}_x^e \;\; \underline{f}_y^e \;\; \underline{f}_z^e\}$ on elementin tilavuusvoimatiheysvektori ja $\{\underline{p}^e\} = \{\underline{p}_x^e \;\; \underline{p}_y^e \;\; \underline{p}_z^e\}$ pintavoimatiheysvektori.

Koska hitausvoima on eräs (kuviteltu) tilavuusvoimatiheys, niin soveltamalla hitausvoima-ajattelutapaa lisätään todellisiin voimiin $\{\underline{\bar{F}}^e\}$ kuviteltu hitausvoima $\{\underline{\bar{F}}_h^e\}$

$$\{\underline{\bar{F}}_h^e\} + \{\underline{\bar{F}}^e\} = \iiint_{V^e} [N^e]^T \{\underline{h}^e\} dV^e + \iiint_{V^e} [\underline{N}^e]^T \{\underline{f}^e\} dV^e + \iint_{S^e} [N^e]^T \{p^e\} dS^e$$

Silloin kuvitellusta tasapainoyhtälöstä

$$[\underline{k}^e]\{\underline{\hat{u}}^e\} = \{\underline{\bar{F}}_h^e\} + \{\underline{\bar{F}}^e\} \tag{1}$$

seuraa

$$[\underline{k}^e]\{\underline{\hat{u}}^e\} = -\iiint_{V^e} [N^e]^T \rho^e [N^e] dV^e \{\underline{\ddot{\hat{u}}}^e\} + \{\underline{\bar{F}}^e\} \tag{2}$$

Merkitään konsistenttia massamatriisia:

$$\boxed{[\underline{m}^e]_K = \iiint_{V^e} [N^e]^T \rho^e [N^e] dV^e} \tag{3}$$

$\Rightarrow$

$$[\underline{k}^e]\{\underline{\hat{u}}^e\} = -[\underline{m}^e]_K \{\underline{\ddot{\hat{u}}}^e\} + \{\underline{\bar{F}}^e\}$$

$\Rightarrow$

$$[\underline{m}^e]_K \{\underline{\ddot{\hat{u}}}^e\} + [\underline{k}^e]\{\underline{\hat{u}}^e\} = \{\underline{\bar{F}}^e\} \tag{4}$$

Sijoittelusummaus:

$$[M]_K = \sum_{e=1}^{\bar{n}} [m^e]_K \quad , \quad [K] = \sum_{e=1}^{\bar{n}} [k^e] \tag{5}$$

$$\{\hat{R}\} = \sum_{e=1}^{\bar{n}} \{\hat{r}^e\} + \{\hat{P}\} \quad , \quad \{\hat{r}^e\} = -\{\bar{F}^e\} \tag{6}$$

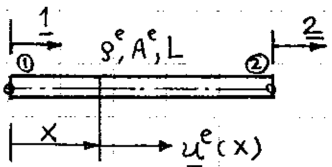
missä $\bar{n}$ on elementtien lukumäärä, $\{\hat{r}^e\}$ globaalisolmuun elementistä kohdistuva ekvivalenttinen solmuvoimavektori ja $\{\hat{P}\}$ suoraan globaalisolmuun annettujen solmuvoimien vektori.

Tällöin globaalisolmuihin liittyvien siirtymien $\{\hat{\mathcal{U}}\}$ differentiaaliyhtälö (liikeyhtälö) on

$$\boxed{[M]_K \{\ddot{\hat{\mathcal{U}}}\} + [K]\{\hat{\mathcal{U}}\} = \{\hat{R}(t)\}} \tag{7}$$

Näin rakennettu liikeyhtälö (7) esittää staattiseen siirtymämalliin perustuvaa ongelman ratkaisutapaa.

3.3 Sauva- ja palkkielementin konsistentti massamatriisi



Kuva 1 Sauvaelementti

Kuvan 1 sauvaelementti on kaksisolmuinen, jolloin solmusiirtymät ovat $\hat{\underline{u}}_1^e$ ja $\hat{\underline{u}}_2^e$.
Kenttäfunktiona on aksiaalisiirtymä $\underline{u}^e(x)$.
Koska näytteitä (vapausasteita) on kaksi, vain lineaarinen interpolaatio on mahdollinen.

Esitetään siirtymäkenttä $u^e(x)$ muodossa

$$\underline{u}^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

missä α_1 ja α_2 ovat toistaiseksi tuntemattomia parametreja (yleistettyjä koordinaatteja). Ehdoista

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(0) &= \hat{\underline{u}}_1^e \\ \underline{u}^e(L) &= \hat{\underline{u}}_2^e \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\underline{u}}_1^e = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ \hat{\underline{u}}_2^e = \alpha_1 + \alpha_2 L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\underline{u}}_1^e \\ \alpha_2 &= (\hat{\underline{u}}_2^e - \hat{\underline{u}}_1^e)/L \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}^e(x) = \hat{\underline{u}}_1^e + \frac{\hat{\underline{u}}_2^e - \hat{\underline{u}}_1^e}{L} x = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \hat{\underline{u}}_1^e + \frac{x}{L} \hat{\underline{u}}_2^e$$

Tämä on muotoa

$$\underline{u}^e(x) = N_1^e(x)\,\hat{\underline{u}}_1^e + N_2^e(x)\,\hat{\underline{u}}_2^e = [N_1^e \;\; N_2^e] \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \end{bmatrix} = [N^e]\{\hat{\underline{u}}^e\}$$

joten

$$N_1^e = 1 - \frac{x}{L} \quad , \quad N_2^e = \frac{x}{L}$$

$$[N^e] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] \qquad , \quad dV^e = A^e\, dx$$

$$\Rightarrow$$

$$[\underline{m}^e]_K = \iiint_{V^e} [N^e]^T \rho^e [N^e]\, dV^e = \int_0^L [N^e]^T \rho^e A^e [N^e]\, dx$$

$$= \int_0^L \rho^e A^e \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \end{bmatrix} [N_1^e \;\; N_2^e]\, dx = \int_0^L \rho^e A^e \begin{bmatrix} (N_1^e)^2 & N_1^e N_2^e \\ N_2^e N_1^e & (N_2^e)^2 \end{bmatrix} dx$$

Jos elementin materiaali on homogeeninen, niin ρ^e on vakio, ja jos elementti on tasapaksu, on poikkileikkausala A^e vakio.

Homogeeniselle ja tasapaksulle sauvalle saadaan

$$[\underline{m}^e]_K = \rho^e A^e \int_0^L \begin{bmatrix} (1-\frac{x}{L})^2 & \frac{x}{L}(1-\frac{x}{L}) \\ \frac{x}{L}(1-\frac{x}{L}) & (\frac{x}{L})^2 \end{bmatrix} dx$$

$\Rightarrow$

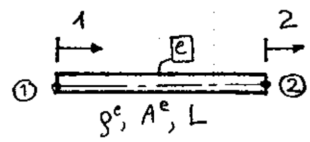
$$\underline{m}^e_{11} = \rho^e A^e \int_0^L (1-\frac{x}{L})^2 dx = \rho^e A^e \int_0^L (1-2\frac{x}{L}+\frac{x^2}{L^2}) dx = \rho^e A^e \Big/_0^L (x-\frac{x^2}{L}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{L^2})$$

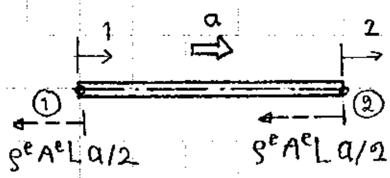
$$= \rho^e A^e L(1-1+\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\rho^e A^e = m^e_{22}$$

$$\underline{m}^e_{12} = m^e_{21} = \rho^e A^e \int_0^L \frac{x}{L}(1-\frac{x}{L}) dx = \rho^e A^e \Big/_0^L (\frac{x^2}{2L} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{L^2}) = \frac{1}{6}\rho^e A^e L$$

$\Rightarrow$

$$[\underline{m}^e]_K = \rho^e A^e L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

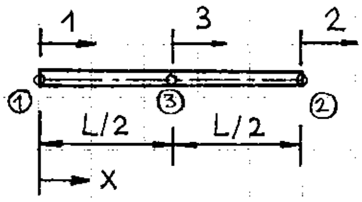




Hitausvoimatesti:

Annetaan jäykän kpleen kiihtyvyys $\hat{\ddot{u}}^e_1 = a = \hat{\ddot{u}}^e_2$

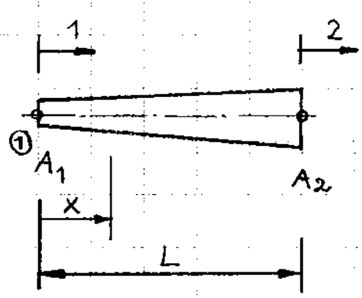
$$\Rightarrow \quad \{\underline{H}^e\} = -[m^e]_K \{\hat{\ddot{\underline{u}}}\} = -\rho^e A^e L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = -\rho^e A^e L \begin{bmatrix} a/2 \\ a/2 \end{bmatrix} \quad //.$$



HT1

Määritä kuvan sauvaelementin konsistentti massamatriisi ja tee sille jäykän kappaleen hitausvoimatesti.

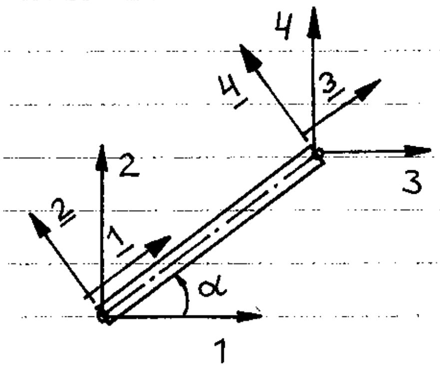
Vast: $$[\underline{m}^e]_K = \frac{\rho^e A^e L}{60} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 32 \end{bmatrix}$$



HT2

Kuvan sauvan poikkileikkaus muuttuu lineaarisesti arvosta A_1 arvoon A_2. Määritä elementin konsistentti massamatriisi.

Vast: $$[\underline{m}^e]_K = \frac{1}{12}\rho^e L \begin{bmatrix} 3A_1+A_2 & A_1+A_2 \\ A_1+A_2 & A_1+3A_2 \end{bmatrix}$$



Ristikon sauvaelementti:

$$[\underline{m}^e] = \frac{\rho A L}{6} \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ \left[\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

$$[m^e] = \frac{\rho A L}{6} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} \hat{\underline{u}}_1^e = \cos\alpha\, \hat{u}_1^e + \sin\alpha\, \hat{u}_2^e \\ \hat{\underline{u}}_2 = -\sin\alpha\, \hat{u}_1^e + \cos\alpha\, \hat{u}_2^e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1^e \\ \hat{u}_2^e \end{bmatrix} \quad , \quad \{\hat{\underline{u}}^e\} = [T^e]\{\hat{u}^e\}$$

$$[C^e] = \left[\begin{array}{c|c} [T^e] & [0] \\ [0] & [T^e] \end{array}\right] \quad , \quad [m^e] = [C^e]^T [\underline{m}^e][C^e]$$

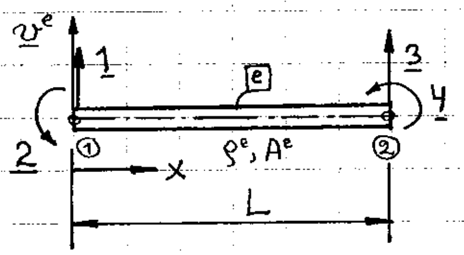
$c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$

$$\begin{bmatrix} [T^e]^T & [0] \\ [0] & [T^e]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{array}\right] \frac{\rho A L}{6}$$

$$= \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c & 2s & c & s \\ -2s & 2c & -s & c \\ c & s & 2c & 2s \\ -s & s & -2s & 2c \end{bmatrix} \frac{\rho A L}{6} = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [m^e] = [\underline{m}^e]$$

Sauvaelementin massamatriisi ei riipu elementin suunnasta!



Kuva 1 HERMITEn palkki-elementti

Käytetään palkille EULER-BERNOULLIn teoria (teknistä taivutusteoriaa), jolloin poikkileikkauksen leikkausmuodonmuutosta (liukumaa) ei oteta huomioon.
Valitaan kuvan 1 mukaisesti 2-solmuinen HERMITEn palkkielementti, jossa on 4 siirtymävapausastetta:

$$\hat{\underline{v}}_1^e \equiv \hat{\underline{u}}_1^e,\quad \hat{\varphi}_1^e \equiv \hat{\underline{u}}_2^e,\quad \hat{\underline{v}}_2^e \equiv \hat{\underline{u}}_3^e,\quad \hat{\varphi}_2^e \equiv \hat{\underline{u}}_4^e$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}^e(x) = N_1^e \hat{\underline{u}}_1^e + N_2^e \hat{\underline{u}}_2^e + N_3^e \hat{\underline{u}}_3^e + N_4^e \hat{\underline{u}}_4^e$$

Toisaalta $\underline{v}^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

missä $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ja α_4 ovat toistaiseksi tuntemattomat parametrit (4 kpl, yleistetyt koordinaatit).

Ehdot: $\underline{v}^e(0) = \hat{\underline{u}}_1^e \Rightarrow \hat{\underline{u}}_1^e = \alpha_1$

$$\underline{v}^e_{,x} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

$$\underline{v}^e_{,x}(0) = \hat{\underline{u}}_2^e \Rightarrow \hat{\underline{u}}_2^e = \alpha_2$$

$$\begin{matrix} \underline{v}^e(L) = \hat{\underline{u}}_3^e \\ \underline{v}^e_{,x}(L) = \hat{\underline{u}}_4^e \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\underline{u}}_3^e = \hat{\underline{u}}_1^e + \hat{\underline{u}}_2^e x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \\ \hat{\underline{u}}_4^e = \hat{\underline{u}}_2^e + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -\frac{3}{L^2}\hat{\underline{u}}_1^e - \frac{2}{L}\hat{\underline{u}}_2^e + \frac{3}{L^2}\hat{\underline{u}}_3^e - \frac{1}{L}\hat{\underline{u}}_4^e \\ \alpha_4 = \frac{2}{L^3}\hat{\underline{u}}_1^e + \frac{1}{L^2}\hat{\underline{u}}_2^e - \frac{2}{L^3}\hat{\underline{u}}_3^e + \frac{1}{L^2}\hat{\underline{u}}_4^e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v}^e(x) = \hat{\underline{u}}_1^e + \hat{\underline{u}}_2^e x + (-3\hat{\underline{u}}_1^e - 2L\hat{\underline{u}}_2^e + 3\hat{\underline{u}}_3^e - L\hat{\underline{u}}_4^e)\frac{x^2}{L^2} + (2\hat{\underline{u}}_1^e + L\hat{\underline{u}}_2^e - 2\hat{\underline{u}}_3^e + L\hat{\underline{u}}_4^e)\frac{x^3}{L^3}$$

$$\Rightarrow \underline{v}^e(x) = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)\hat{\underline{u}}_1^e + L\left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)\hat{\underline{u}}_2^e + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)\hat{\underline{u}}_3^e + L\left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)\hat{\underline{u}}_4^e$$

$$\Rightarrow$$

$$N_1^e(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_2^e(x) = L\left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

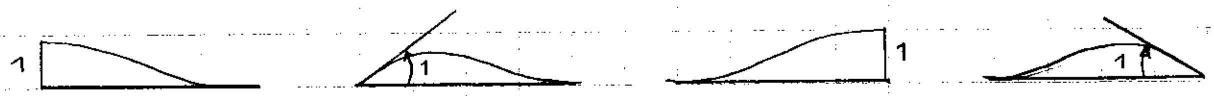
$$N_3^e(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4^e(x) = L\left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

HERMITEN POLYNOMIT

Kenttäfunktiolla $v^e(x)$ on näin ollen interpolaatioesitys

$$
\begin{aligned}
\underline{v}^e(x) &= N_1^e \hat{\underline{u}}_1^e + N_2^e \hat{\underline{u}}_2^e + N_3^e \hat{\underline{u}}_3^e + N_4^e \hat{\underline{u}}_4^e \\
&= [N_1^e \; N_2^e \; N_3^e \; N_4^e] \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_1^e \\ \hat{\underline{u}}_2^e \\ \hat{\underline{u}}_3^e \\ \hat{\underline{u}}_4^e \end{bmatrix} = [N^e]\{\hat{\underline{u}}^e\}
\end{aligned}
$$



$N_1^e(x)$ $\quad$ $N_2^e(x)$ $\quad$ $N_3^e(x)$ $\quad$ $N_4^e(x)$

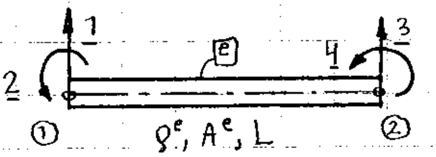
$$
\begin{aligned}
[\underline{m}^e]_k &= \iiint_{V^e} [N^e]^T \rho^e [N^e]\, dV^e \qquad , \quad dV^e = A^e\, dx \\
&= \int_0^L \rho^e A^e [N^e]^T [N^e]\, dx = \int_0^L \rho^e A^e \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{bmatrix} [N_1^e \; N_2^e \; N_3^e \; N_4^e]\, dx \\
&= \int_0^L \rho^e A^e \begin{bmatrix} (N_1^e)^2 & N_1^e N_2^e & N_1^e N_3^e & N_1^e N_4^e \\ & (N_2^e)^2 & N_2^e N_3^e & N_2^e N_4^e \\ & & (N_3^e)^2 & N_3^e N_4^e \\ \text{symm.} & & & (N_4^e)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jos palkkielementti on tasapaksu ja homogeeninen, niin $\rho^e A^e$ on vakio.

$$
\begin{aligned}
\underline{m}_{11}^e &= \rho^e A^e \int_0^L (N_1^e)^2 dx = \rho^e A^e \int_0^L (1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3})^2 dx \\
&= \rho^e A^e \int_0^L (1 - 6\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x^3}{L^3} + 9\frac{x^4}{L^4} - 12\frac{x^5}{L^5} + 4\frac{x^6}{L^6})\, dx \\
&= \rho^e A^e \Big/_0^L (x - 2\frac{x^3}{L^2} + \frac{x^4}{L^4} + \frac{9}{5}\frac{x^5}{L^4} - 2\frac{x^6}{L^5} + \frac{4}{7}\frac{x^7}{L^6}) \\
&= \rho^e A^e L \left(\frac{9}{5} - 2 + \frac{4}{7}\right) = \frac{13}{35}\rho^e A^e L = \frac{156}{420}\rho^e A^e L
\end{aligned}
$$

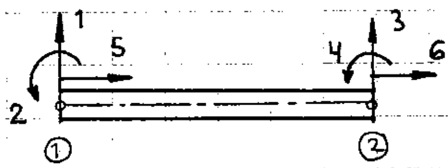
Vastaavasti saadaan integroimalla muutkin alkiot.

Tuloksena saadaan



$$[\underline{m}^e]_K = \frac{\varrho^e A^e L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{symm.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Kuva 1

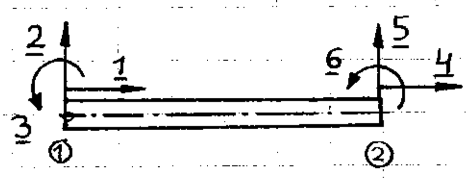


Jos otetaan huomioon aksiaalisiirtymävapausasteen, ne voidaan aluksi numeroida indekseillä 5 ja 6 kuvan mukaisesti.

Kuva 2

Jos palkin poikkileikkauksen massakeskiö ja pintakeskiö yhtyvät, niin aksiaaliliike ja taivutusliike ovat kytkemättömiä, joten voidaan kirjoittaa

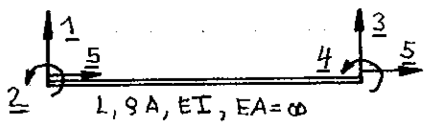
$$[\underline{m}^e]_K = \left[\begin{array}{c:c} \frac{\varrho^e A^e L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hdashline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \varrho^e A^e L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$



Vaihtamalla vapausastenumerointi kuvan mukaiseksi, saadaan vastaavasti rivejä ja sarakkeita vaihtamalla tulos:

Kuva 3

$$[\underline{m}^e]_K = \frac{\varrho^e A^e L}{420}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ \hdashline & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22L \\ & \text{symm.} & & & & 4L^2 \end{array}\right]$$



Kuva 1 Venymätön palkkielementti.

Joskus käytetään kuvan 1. venymätöntä (EA=∞) palkkielementtiä. Kuvan 1 ja 31.3 solmuvapausasteiden välillä on tällöin yhteys

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = q_5 \\ \underline{u}_2 = q_1 \\ \underline{u}_3 = q_2 \\ \underline{u}_4 = q_5 \\ \underline{u}_5 = q_3 \\ \underline{u}_6 = q_4 \end{cases} \Rightarrow \{\underline{u}\} = [C]\{q\}$$

$\Rightarrow$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad [m]_q = [C]^T [\underline{m}]_u [C]$$

$$[k]_q = [C]^T [\underline{k}]_u [C]$$

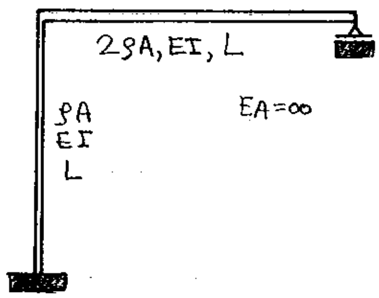
$\Rightarrow$

$$[\underline{m}]_c = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L & 0 \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & 156 & -22L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 420 \end{bmatrix} \tag{92}$$

$$[\underline{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{93}$$

Huomautettakoon vielä siitä, että konsistentti massamatriisikaan ei kuvaa tarkasti todellista massajakautumaa, sillä sen laskenta perustettiin staattiseen siirtymämalliin. Rakenteen värähdellessä sen kimmoviivan muoto on varmasti toinen kuin kinemaattisesti reunoiltaan kuormitetun statiikan tehtävän kimmoviiva.

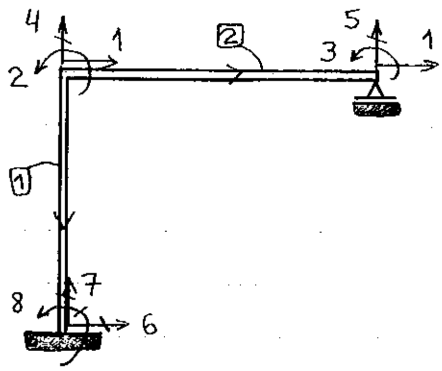
Rakenteen värähtelyjen tarkka käsittely on edellä esitettyä huomattavasti työläämpää. Siihen palataan myöhemmin.



ESIMERKKI:

Määritä oheisen kulmakehän staattiseen siirtymämalliin perustuva konsistentti massamatriisi. Kehän palkit ovat venymättömät.

RATKAISU:



$$[\underline{k}]_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & 12 & -6L & 0 \\ & \text{SYM} & & 4L^2 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$[\underline{k}]_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 36 & 18L & -36 & 18L & 0 \\ & 12L^2 & -18L & 6L^2 & 0 \\ & & 36 & -18L & 0 \\ & & & 12L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad [K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & 0 \\ & 16L^2 & 6L^2 \\ \text{SYM.} & & 12L^2 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{m}]_{c1} = \frac{\rho AL}{420}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L & 0 \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & 156 & -22L & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 420 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$[\underline{m}]_{c2} = \frac{\rho AL}{420}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 312 & 44L & 108 & -26L & 0 \\ & 8L^2 & 26L & -6L^2 & 0 \\ & & 312 & -44L & 0 \\ & & & 8L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 840 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

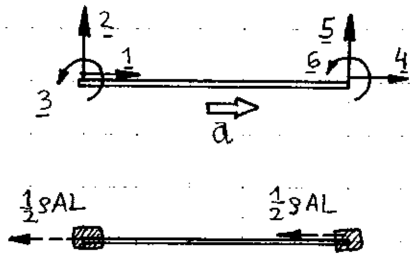
$$\Rightarrow \quad [M]_c = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 996 & 22L & 0 \\ & 12L^2 & -6L^2 \\ \text{SYM.} & & 8L^2 \end{bmatrix}$$

3.4 Massamatriisien tarkastelua ja vertailua:

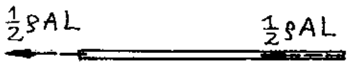
Jos elementtiä pienennetään rajatta lähestyy sen hitausvoimakenttä yhä tarkemmin translaatioliikkeen hitausvoimakenttää. Tästä johtuu, että minkä tahansa elementin massamatriisin $[m]_L$ tai $[m]_C$ on oltava sellainen, että hitausvoimavektori

$$\{\underline{H}\} = -[m]\{\ddot{\underline{d}}\}$$

vastaa tarkkaa hitausvoimaresultanttia, kun $\{\ddot{d}\}$ on jäykän kpleen translaation mukainen.



Kuva 23 Keskitetty massa.



Kuva 24 Konsistentti massa.

Annetaan elementille jäykän kpleen translaatiokiihtyvyys siten, että

$$\{\ddot{\underline{d}}\} = \{a \;\; 0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0 \;\; 0\}$$

Käyttämällä keskitettyä massamatriisia seuraa hitausvoimavektoriksi

$$\{\underline{H}\} = -[\underline{m}]_L\{\ddot{\underline{d}}\} = -\tfrac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \{\underline{H}\} = -\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}\rho ALa \\ 0 \\ 0 \\ \tfrac{1}{2}\rho ALa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mikä vastaa kuvan 23 tarkkaa hitausvoimavektoria. Käyttämällä konsistenttia massamatriisia seuraa hitausvoimavektoriksi

$$\{\underline{H}\} = -\frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} (140+70)a \\ 0 \\ 0 \\ (70+140)a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mikä vastaa kuvan 24 tarkkaa hitausvoimavektoria.

massamatriisien vertailua:

$[m]_C$, $[M]_C$	$[m]_L$, $[M]_L$
1. Positiivisesti definiitti. 2. Sama puolinauhan leveys kuin jäykkyysmatriisilla. 3. Vie enemmän muistia. 4. Suurempi laskenta-aika. 5. Ominaisarvoille saadaan ylälikiarvo, jos elementit ovat yhteensopivia ja integrointiaste on riittävä. 6. Ainakin taivutustehtävissä (palkit, laatat) tulokset yleensä tarkempia.	1. Voi olla posit. semidefiniitti. 2. Lävistäjämatriisi, jossa voi olla nollia lävistäjällä. 3. Vie vähemmän muistia. 4. Pienempi laskenta-aika. 5. Ominaisarvoille tulee joko ylä- tai alalikiarvo, mutta jälkimmäinen on tavallisempi. 6. Aaltotehtävissä tulokset ovat usein tarkempia.

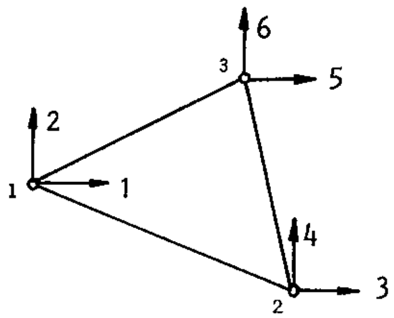
Keskitetyn massamatriisin tilalle on kehitetty myös tarkempia lävistäjätyyppisiä massamatriiseja. Esimerkiksi HINTON & Co 1976, ja SURANA 1978 ehdottavat palkeille ja laatoille seuraavaa menettelyä:

1° Lasketaan konsistentin massamatriisin $[m]_C$ lävistäjätermit.
2° Lasketaan keskitetyn massamatriisin $[m]_L$ vapausasteiden massasumma m_L.
3° Lasketaan translaatiovapausasteisiin liittyvät lävistäjätermit yhteen. Summa on m_T.
4. Muunnetaan keskitetyn massamatriisin lävistäjätermit kertomalla ne suhteella m_L/m_T.

Tämän HINTON-SURANA-massamatriisin antamiin tuloksiin palataan myöhemmin.

3.5 Eräiden kontinuumielementtien massamatriiseja:

Määritetään seuraavassa eräiden kontinuumielementtien (levy-, laatta-, kuori- ja solidielementtien) massamatriisit.



ESIMERKKI:
Kuvan vakiovenymän kolmiolevyelementti (CST) on tasapaksu ja homogeeninen. Sen paksuus on t, tiheys ρ ja pinta-ala A. Määritä levyelementin konsistentti ja keskitetty massamatriisi. Lineaariset interpolointifunktiot kannattaa lausua kolmiokoordinaattien avulla.
RATKAISU:

Valitaan interpolaatiofunktiot $N_i \equiv L_i$ (kolmiokoordinaatit)

$$[m]_c = \iiint_V [N]^T \rho [N] \, dV = \rho t \iint_A [N]^T [N] \, dA$$

$$[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{array}\right] , \quad \{u\} = [N]\{d\}, \quad \{d\} = \{u_1\, u_2 \,\vdots\, u_3\, u_4 \,\vdots\, u_5\, u_6\}$$

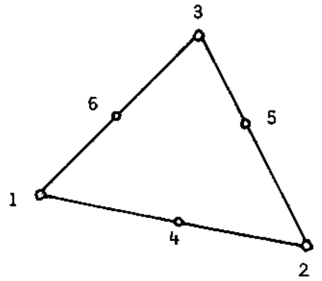
$$[N]^T[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} L_1^2 & 0 & L_1L_2 & 0 & L_1L_3 & 0 \\ & L_1^2 & 0 & L_1L_2 & 0 & L_1L_3 \\ \hline & & L_2^2 & 0 & L_2L_3 & 0 \\ & & & L_2^2 & 0 & L_2L_3 \\ \hline & \text{SYM.} & & & L_3^2 & 0 \\ & & & & & L_3^2 \end{array}\right]$$

$$\iint_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma \, dA = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \cdot 2A \quad , \quad m = \rho A t$$

$$\Rightarrow \quad \iint_A L_i^2 \, dA = \frac{2!}{4!} \cdot 2A = A/6 \quad , \quad \iint_A L_i L_j \, dA = \frac{1!\,1!}{4!} \cdot 2A = A/12$$

$$\Rightarrow \quad [m]_c = \frac{m}{12} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & \text{SYM.} & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{array}\right] , \quad [m]_L = \frac{m}{3} \lceil 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \rfloor \blacktriangleleft$$

4



ESIMERKKI:

Kirjoita kuvan *lineaarisen* venymän kolmioelementin (LST), jonka paksuus on t, tiheys ρ ja pinta-ala A, konsistentti ja keskitetty massamatriisi. Toisen asteen interpolointifunktiot kannattaa kirjoittaa kolmiokoordinaatteja käyttäen. Elementti voi liikkua vain omassa tasossaan.

RATKAISU:

Interpolointifunktiot eli muotofunktiot:

$$\begin{cases} N_1 = L_1(2L_1-1) \\ N_2 = L_2(2L_2-1) \\ N_3 = L_3(2L_3-1) \\ N_4 = 4L_1L_2 \\ N_5 = 4L_2L_3 \\ N_6 = 4L_3L_1 \end{cases}$$

$$[m_C] = \iiint_V [N]^T \rho [N]\, dV$$

$$dV = t\, dA$$

$$\Rightarrow \quad [m_C] = \rho t \iint_A [N]^T[N]\, dA$$

$$\{u\} = [N]\{d\}$$

$$\{d\} = \{u_1\ u_2 \,\vdots\, u_3\ u_4 \,\vdots\, u_5\ u_6 \,\vdots\, u_7\ u_8 \,\vdots\, u_9\ u_{10} \,\vdots\, u_{11}\ u_{12}\}$$

$$[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{array}\right]$$

$$[N]^T[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc}
N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 & 0 & N_1N_5 & 0 & N_1N_6 & 0 \\
 & N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 & 0 & N_1N_5 & 0 & N_1N_6 \\
\hline
 & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 & 0 & N_2N_5 & 0 & N_2N_6 & 0 \\
 & & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 & 0 & N_2N_5 & 0 & N_2N_6 \\
\hline
 & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 & 0 & N_3N_5 & 0 & N_3N_6 & 0 \\
 & & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 & 0 & N_3N_5 & 0 & N_3N_6 \\
\hline
 & & & & & & N_4^2 & 0 & N_4N_5 & 0 & N_4N_6 & 0 \\
 & & & & & & & N_4^2 & 0 & N_4N_5 & 0 & N_4N_6 \\
\hline
 & & \text{SYM.} & & & & & & N_5^2 & 0 & N_5N_6 & 0 \\
 & & & & & & & & & N_5^2 & 0 & N_5N_6 \\
\hline
 & & & & & & & & & & N_6^2 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & N_6^2
\end{array}\right]$$

$$\iint_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma\, dA = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}\, 2A$$

$$i=1,2,3: \quad \iint_A N_i^2\, dA = \iint_A L_i^2(2L_i-1)^2\, dA = \iint_A (4L_i^4 - 4L_i^3 + L_i^2)\, dA = \left(4\cdot\frac{4!}{6!} - 4\cdot\frac{3!}{5!} + \frac{2!}{4!}\right)\cdot 2A = \frac{A}{30}$$

(jatkuu)

jatkoa

$$i=4,5,6: \iint_A N_i^2\,dA = \iint_A 16 L_i^2 L_j^2\,dA = 16\cdot\frac{2!2!}{6!}\cdot 2A = \frac{8A}{45}$$

$$\begin{cases} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{cases} \quad \iint_A N_i N_j\,dA = \iint_A L_i L_j (2L_i-1)(2L_j-1)\,dA = 4\iint_A L_i^2 L_j^2\,dA - 4\iint_A L_i^2 L_j\,dA + \iint_A L_i L_j\,dA$$

$$= \left[4\cdot\frac{2!2!}{6!} - 4\cdot\frac{2!1!}{5!} + \frac{1!1!}{4!}\right]2A = -\frac{A}{180}$$

$$\begin{cases} i=1 \\ j=4,6 \end{cases} \quad \iint_A N_1 N_j\,dA = \iint_A L_1(2L_1-1)\cdot 4L_1L_j\,dA = \iint_A (8L_1^3L_j - 4L_1^2L_j)\,dA$$

$$= \left[8\,\frac{3!1!}{6!} - 4\,\frac{2!1!}{5!}\right]2A = 0$$

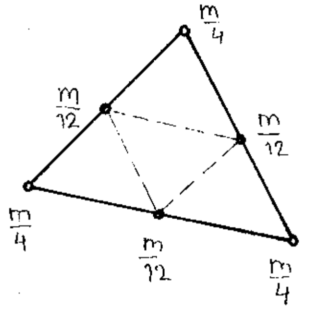
$$\begin{cases} i=1 \\ j=5 \end{cases} \quad \iint_A N_1 N_j\,dA = \iint_A L_1(2L_1-1)\cdot 4L_2L_3\,dA = \iint_A (8L_1^2L_2L_3 - 4L_1L_2L_3)\,dA$$

$$= \left[8\cdot\frac{2!1!1!}{6!} - 4\cdot\frac{1!1!1!}{5!}\right]\cdot 2A = -\frac{A}{45}$$

jne.

$m = \rho A t$

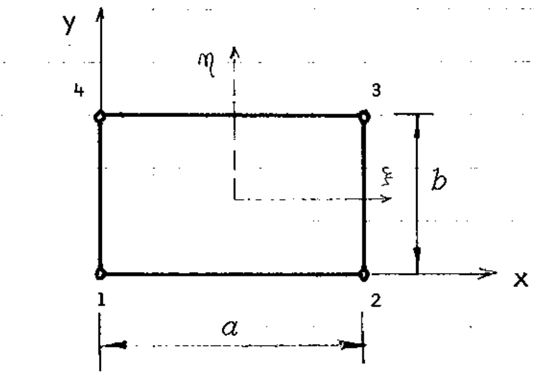
$$\Rightarrow \quad [m_C] = \frac{m}{180}\begin{bmatrix}
6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
 & 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\
 & & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\
 & & & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
 & & & & 6 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 6 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 32 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\
 & & & & & & & 32 & 0 & 16 & 0 & 16 \\
 & & \text{SYM.} & & & & & & 32 & 0 & 16 & 0 \\
 & & & & & & & & & 32 & 0 & 16 \\
 & & & & & & & & & & 32 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 32
\end{bmatrix}$$



Kuvassa eräs massojen keskittämismalli.

$3\cdot\frac{m}{4} + 3\cdot\frac{m}{12} = m$!

$$[m_L] = \frac{m}{12}\lceil 3\ 3\ \ 3\ 3\ \ 3\ 3\ \ 1\ 1\ \ 1\ 1\ \ 1\ 1 \rfloor$$

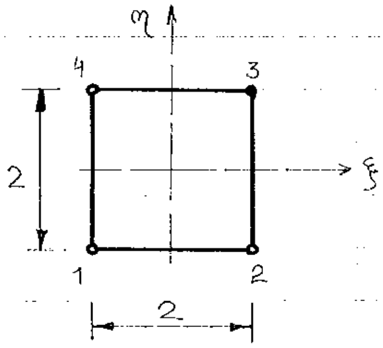


ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan tasapaksua ja homogeenista levyelementtiä, jonka paksuus on h ja tiheys ρ. Määritä elementin consistent-tyyppinen massamatriisi ja osoita, että tällöin saadaan solmuihin korrektit jäykän kappaleen translaatiosta johtuvat hitausvoimat. Muodosta vielä elementille lumped-tyylinen massamatriisi.

RATKAISU:

Bilineaariset muotofunktiot "emoelementille" (kuva) ovat:



$$N_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\{f\} = [N]\{d\}$$

eli

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \iint_A [N]^T[N] \rho h \, dA \quad , \; dA = dx\,dy$$

Koordinaatiston muunnos: $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\xi$ & $y = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\eta$

$$\Rightarrow \quad dA = dx\,dy = \tfrac{a}{2}d\xi \, \tfrac{b}{2}d\eta = \tfrac{1}{4}ab\,d\xi\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad [m] = \tfrac{1}{4}\rho abh \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N]^T[N]\, d\xi\, d\eta$$

$$[N]^T[N] = \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 & 0 \\ 0 & N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 \\ & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 & 0 \\ & & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 \\ & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 & 0 \\ & & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 \\ & \text{SYM.} & & & & & N_4^2 & 0 \\ & & & & & & & N_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_1^2 \, d\xi\, d\eta = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{16}(1-\xi)^2(1-\eta)^2 d\xi\, d\eta = \tfrac{1}{16}\int_{-1}^{1}(1-\xi)^2 d\xi \int_{-1}^{1}(1-\eta)^2 d\eta = \tfrac{4}{9}$$

(jatkuu)

(jatkoa)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_1 N_2 \, d\xi \, d\eta = \frac{2}{9} \quad , \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_1 N_3 \, d\xi \, d\eta = \frac{1}{9} \quad , \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_1 N_4 \, d\xi \, d\eta = \frac{2}{9}$$

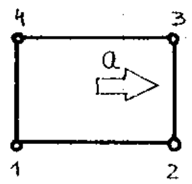
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_2^2 \, d\xi \, d\eta = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_3^2 \, d\xi \, d\eta = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_4^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{4}{9}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_2 N_3 \, d\xi \, d\eta = \frac{2}{9} \quad , \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_2 N_4 \, d\xi \, d\eta = \frac{1}{9} \quad , \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_3 N_4 \, d\xi \, d\eta = \frac{2}{9}$$

$\Rightarrow$

$$[m]_C = \frac{\varrho abh}{36} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & \text{SYM.} & & & 4 & 0 & 2 \\ \hline & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{array} \right]$$

b) Annetaan jäykän kpleen translaatiokiihtyvyys a

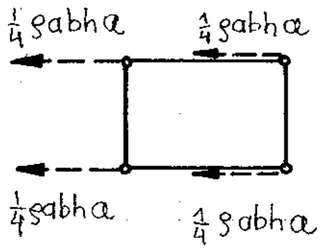


$\Rightarrow \quad \{\ddot{d}\} = \{a \; 0 \,\vdots\, a \; 0 \,\vdots\, a \; 0 \,\vdots\, a \; 0 \,\vdots\}$

$\{H\} = -[m]_C \{\ddot{d}\}$

$\Rightarrow$

$\{H\} = -\dfrac{\varrho abh}{4} \{a \; 0 \,\vdots\, a \; 0 \,\vdots\, a \; 0 \,\vdots\, a \; 0\}$



Resultantti

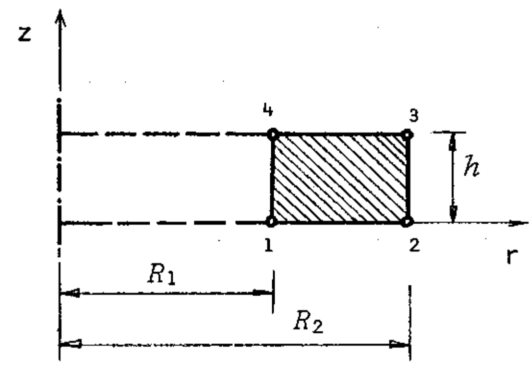
$R = -4 \cdot \dfrac{\varrho abh}{4} a = -ma \quad$ ✓.

Hitausvoimat solmuissa ovat korrektit.

c) $\quad [m]_L = \frac{1}{4} \varrho abh \, [I]_{8\times 8}$

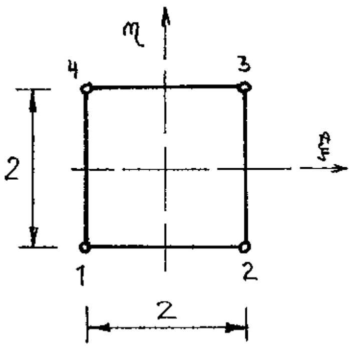
8

35.6 **ESIMERKKI:**



Tarkastellaan kuvan rengaselementtiä, jonka poikkileikkaus on bilineaarinen nelikulmio. Kenttäfunktion komponentit ovat radiaalisiirtymä $u(r,z)$ ja pystysiirtymä $w(r,z)$. Määritä rengaselementin consistent-tyyppinen massamatriisi. Materian tiheys on ρ.

RATKAISU:



Muotofunktiot "emoelementille":

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$[m] = \iint_V [N]^T[N]\,\rho\, dV \quad , \quad dV = 2\pi r\, dr\, dz$$

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \{d_3\} \\ \{d_4\} \end{bmatrix} \quad , \quad \{d_i\} = \begin{bmatrix} w_i \\ u_i \end{bmatrix}$$

$$[N]^T[N] = \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 & 0 \\ & N_1^2 & 0 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & 0 & N_1N_4 \\ & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 & 0 \\ & & & N_2^2 & 0 & N_2N_3 & 0 & N_2N_4 \\ & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 & 0 \\ & & & & & N_3^2 & 0 & N_3N_4 \\ & \text{SYM.} & & & & & N_4^2 & 0 \\ & & & & & & & N_4^2 \end{bmatrix}$$

Koordinaatiston muunnos: $r = \left(\frac{R_1+R_2}{2}\right) + \left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)\xi \quad , \quad z = \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\eta$

Merkitään $a = \dfrac{R_1+R_2}{R_2-R_1} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{R_2-R_1}{2}(a+\xi)$

$$\Rightarrow \quad dV = 2\pi r\, dr\, dz = 2\pi\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)(a+\xi)\cdot\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)d\xi \cdot \frac{h}{2}\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \pi\rho h\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_1^2\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)(a+\xi)\,d\xi\, d\eta$$

$$= \pi\rho h\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{16}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(a+\xi)\,d\xi\, d\eta$$

$$\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(a+\xi)\,d\xi\, d\eta = \frac{2}{9}(2a-1) = \frac{2}{9}\left(\frac{3R_1+R_2}{R_2-R_1}\right)$$

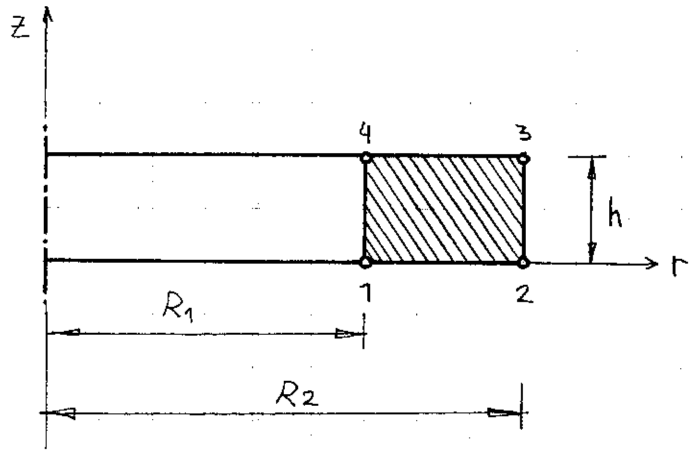
$$\Rightarrow$$

$$m_{11} = 2\pi\frac{\rho h}{36}(3R_1+R_2)(R_2-R_1)$$

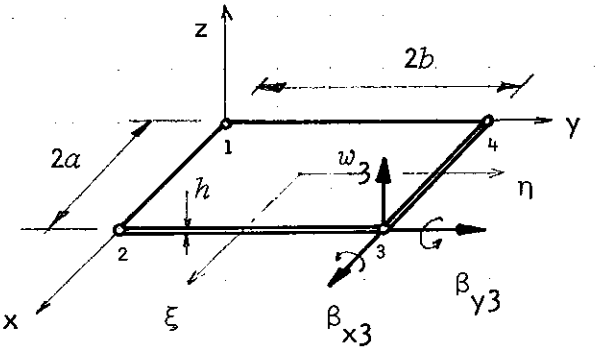
(jatkuu)

(jatkoa)

$$[m]_c = 2\pi \frac{\varrho h}{72}(R_2-R_1)^2 \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2(2a-1) & 0 & 2a & 0 & a & 0 & 2a-1 & 0 \\ & 2(2a-1) & 0 & 2a & 0 & a & 0 & 2a-1 \\ \hline & & 2(2a+1) & 0 & 2a+1 & 0 & a & 0 \\ & & & 2(2a+1) & 0 & 2a+1 & 0 & a \\ \hline & & & & 2(2a+1) & 0 & 2a & 0 \\ & & & & & 2(2a+1) & 0 & 2a \\ \hline & \text{SYM.} & & & & & 2(2a-1) & 0 \\ & & & & & & & 2(2a-1) \end{array}\right]$$



$$a = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$$

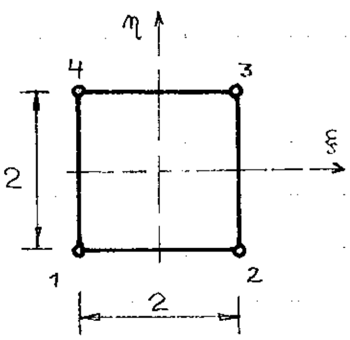


35.8 **ESIMERKKI:**

Kuva esittää nelisolmuista 12-vapausasteen täydellistä, epäkonformista ACM-ohuen laatan elementtiä. Elementin solmuvapausasteina ovat solmun pystysiirtymä w_i sekä rotaatiot β_{xi} ja β_{yi}. Määritä elementin consistent-tyyppisen massamatriisin alkio m_{11} ja vertaa sitä vastaavaan lumped-tyylisen massamatriisin alkioon.

RATKAISU:

ACM- (Adini-Clough-Melosh) elementin muotofunktiot "emoelementille ξ,η-koordinaatistossa ovat



emoelementti.

$$N_1^i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(2+\xi_i\xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2)$$

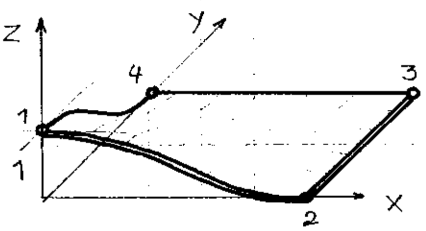
$$N_2^i = \frac{-b}{8}(1+\xi_i\xi)\,\eta_i(1+\eta_i\eta)^2(1-\eta_i\eta)$$

$$N_3^i = \frac{a}{8}\,\xi_i(1+\xi_i\xi)^2(1-\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

jolloin

$$w = \sum_{i=1}^{4}\left(N_1^i w_i + N_2^i \beta_{xi} + N_3^i \beta_{yi}\right)$$

$$\xi_i = -1, 1, 1, -1 \qquad , \quad i = 1,2,3,4$$
$$\eta_i = -1, -1, 1, 1$$



Muotofunktiota N_1 vastaava siirtymäkenttä.

Massamatriisi

$$[m] = \iint_A [N]^T[N]\,\rho h\, dA \qquad , \quad dA = dx\,dy$$

Kuvaus emolta ξη-koordinaatistosta xy-koordinaatistoon

$$x = a + a\xi \quad \& \quad y = b + b\eta$$

$$\Rightarrow \quad dA = dx\,dy = ab\,d\xi\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad [m] = \frac{1}{2}\rho hab\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T[N]\,d\xi\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \frac{1}{2}\rho abh\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(N_1^1(\xi,\eta))^2\,d\xi\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \frac{1}{2}\rho abh\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{64}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(2-\xi-\eta-\xi^2-\eta^2)^2\,d\xi\,d\eta$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \frac{1}{128}\rho abh\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[(1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\xi-\xi^2)^2 + (1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\eta-\eta^2)^2 +$$
$$+ 2(1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\xi-\xi^2)(1-\eta-\eta^2)\Big]\,d\xi\,d\eta$$

(jatkuu)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\xi-\xi^2)^2\,d\xi\,d\eta=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\eta-\eta^2)^2\,d\xi\,d\eta=\frac{2816}{315}$$

$$2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\xi)^2(1-\eta)^2(1-\xi-\xi^2)(1-\eta-\eta^2)\,d\xi\,d\eta=\frac{3872}{225}$$

$$\Rightarrow\quad m_{11}=\frac{1}{64}\rho abh\left[2\cdot\frac{2816}{315}+\frac{3872}{225}\right]=\frac{3554}{6300}\rho abh\approx 0{,}564\,\rho abh$$

lumped-tyyppisen massamatriisin

$m_{11}^{L}=\frac{1}{4}\rho h\cdot 2a\cdot 2b=\rho abh$ ero alkioon m_{11}^{C} on suuri.

Lähteestä Zienkiewicz: Finite Element Method, 2. painos, s. 329 löytyy ACM-laattaelementin koko massamatriisi:

MASS MATRIX OF A RECTANGULAR PLATE ELEMENT ACM

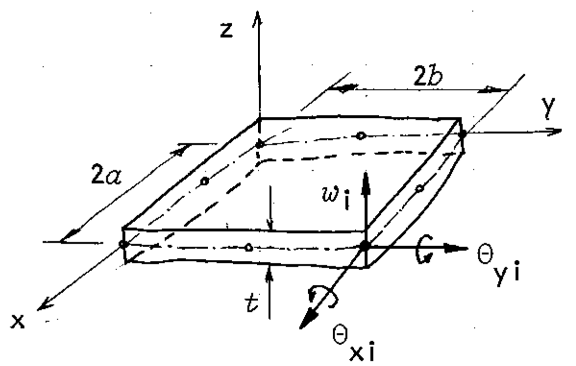
$$[m]^e=[L][M][L]$$

$$[M]=\lambda\begin{bmatrix}
3454 & & & & & & & & & & & \\
-461 & 80 & & & & & & & & & & \\
-461 & -63 & 80 & & & & & & & & & \\
1226 & -274 & 199 & 3454 & & & & & & & & \\
274 & -60 & 42 & 461 & 80 & & & & & & & \\
199 & -42 & 40 & 461 & 63 & 80 & & & & & & \\
1226 & -199 & 274 & 394 & 116 & 116 & 3454 & & & & & \\
-199 & 40 & -42 & -116 & -30 & -28 & -461 & 80 & & & & \\
-274 & 42 & -60 & -116 & -28 & -30 & -461 & 63 & 80 & & & \\
394 & -116 & 116 & 1226 & 199 & 274 & 1226 & -274 & -199 & 3454 & & \\
116 & -30 & 28 & 199 & 40 & 42. & 274 & -60 & -42 & 461 & 80 & \\
-116 & 28 & -30 & -274 & -42 & -60 & -199 & 42 & 40 & -461 & -63 & 80
\end{bmatrix}$$

$[L]$ is defined in Table 10.1 and $\lambda=\dfrac{\rho tab}{6300}$

missä

$$[L]=\begin{bmatrix}[\ell] & & & [0]\\ & [\ell] & & \\ & & [\ell] & \\ [0] & & & [\ell]\end{bmatrix},\qquad [\ell]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2b & 0\\ 0 & 0 & 2a\end{bmatrix}$$



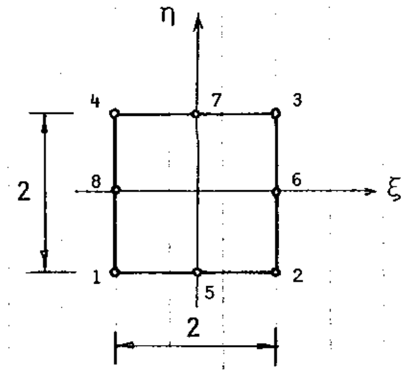
ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan paksun (ja ohuen) laatan AIZ (*Ahmad, Irons, Zienkiewicz*) elementtiä, joka pystyy ottamaan likimääräisesti huomioon myös leikkausmuodonmuutoksen. Elementti on isoparametrinen ja sillä on 8 solmua, jotka sijaitsevat sen keskipinnalla. Solmusiirtymät listataan solmuittain

$$\{d\} = \{w_1\ \Theta_{y1}\ \Theta_{x1} \mid \ldots \mid w_8\ \Theta_{y8}\ \Theta_{x8}\}$$

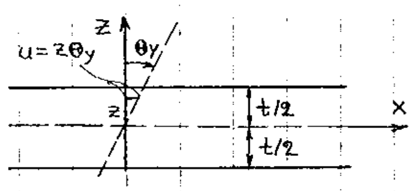
Määritä elementin konsistentin massamatriisin alkiot $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{33}, m_{23}, m_{14}$.

RATKAISU:



Muotofunktiot ovat

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4$$
$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4$$
$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4$$
$$N_4 = (1-\xi)(1+\xi)(-\xi+\eta-1)/4$$
$$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$$
$$N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$$
$$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$$
$$N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} 0 & zN_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i \\ N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \Theta_{yi} \\ \Theta_{xi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a(1+\xi) \\ y = b(1+\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = a\,d\xi \\ dy = b\,d\eta \end{cases}$$

$$[m] = \iiint_V [N]^T \rho [N]\, dV \quad , \quad dV = dx\,dy\,dz = ab\,dz\,d\xi\,d\eta$$

$\Rightarrow$

$$[m] = \rho ab \iiint [N]^T [N]\, dz\,d\xi\,d\eta$$

$$[N] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & zN_1 & 0 & 0 & zN_2 & 0 & & 0 & zN_8 & 0 \\ 0 & 0 & -zN_1 & 0 & 0 & -zN_2 & \ldots & 0 & 0 & -zN_8 \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & & N_8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\{d\} = \{w_1\ \Theta_{y1}\ \Theta_{x1} \mid \ldots \mid w_8\ \Theta_{y8}\ \Theta_{x8}\}$$

$$\{f\} = [N]\{d\}$$

(jatkuu)

(jatkoa)

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \rho ab \iiint N_1^2 \, dz \, d\xi \, d\eta = \rho abt \iint_A N_1^2 \, d\xi \, d\eta$$

$$= \rho abt \iint_A (1-\xi)^2 (1-\eta)^2 (-\xi-\eta-1)^2/4^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{3}{40} \rho abt$$

$$m_{12} = m_{13} = m_{23} = 0$$

$$m_{22} = m_{33} = \rho ab \iiint z^2 N_1^2 \, dz \, d\xi \, d\eta = \rho ab \frac{t^3}{12} \iint_A N_1^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{\rho abt^3}{160}$$

$$m_{14} = \rho ab \iiint N_1 N_2 \, dz \, d\xi \, d\eta = \rho abt \iint_A N_1 N_2 \, d\xi \, d\eta$$

$$= \rho abt \iint_A (1-\xi^2)(1-\eta)^2(-\xi-\eta-1)(\xi-\eta-1)/16 \, d\xi \, d\eta = \frac{\rho abt}{360}$$

$$\Rightarrow \quad [m] = \frac{\rho abt}{40} \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & 0 & 1/9 \\ & t^2/4 & 0 & \\ & & t^2/4 & \\ \hdashline & & & \\ \text{SYM.} & & & \end{array} \right]_{24*24}$$

3.6 Dynamiikan tehtävän käytännön FEM-sovellutuksia:

Kuvassa (Fig.17.1, Zienkiewicz) on esimerkki ulokelaatan ominaisvärähtelystä. Tuloksista nähdään, että epäkonforminen kolmioelementti on tässä tehtävässä ylivoimainen verrattuna tietyllä tavalla muodostettuihin konformisiin kolmioelementteihin.

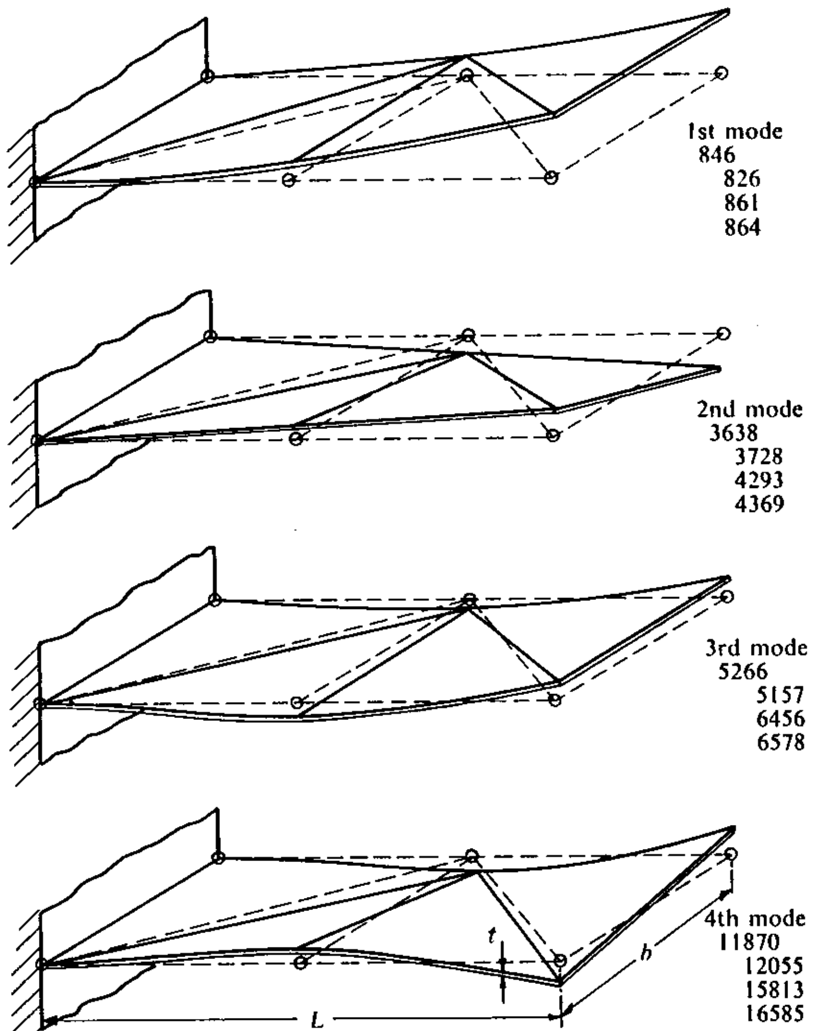


Fig. 17.1 Vibration of a cantilever plate divided into four triangular elements Modal shapes. Data: $E = 30\times10^6$ lb/in^2; $t = 0{\cdot}1$ in; $L = 2$ in; $b = 1$ in; $\nu = 0{\cdot}3$; density $\rho = 0{\cdot}283$ lb/in^3. The numbers listed show frequencies in cycles/sec for (1) Exact solution (ref. 9); (2) 'Non conforming' triangle; (3) Conforming triangle. Corrective function Eq. (10.28); (4) Conforming triangle. Corrective function Eq. (10.29)

Taulukossa 17.1 verrataan tuloksia erilaisilla elementtijaoilla RITZin menetelmällä ja kokeellisesti saatuihin tuloksiin. Tulosten yhteensopivuus on erittäin hyvä.

TABLE 17.1

COMPARISON BETWEEN THEORETICAL AND TEST FREQUENCIES FOR A UNIFORM THICKNESS RECTANGULAR CANTILEVER PLATE[7]

(LENGTH a; WIDTH $a/2$)

Mode	$\omega/\sqrt{D/\rho h a^4}$					
	Results from Barton			Finite Element (triangular non-conforming)		
	Conventional Ritz method	Test	Test Results of Plunkett	2 × 1 mesh 4 elements	4 × 2 mesh 16 elements	2 × 8 mesh on half plate with use of symmetry equivalent to 64 elements
1	3·47	3·42†	3·50	3·39	3·44	3·44 (s)
2	14·93	14·52†	14·50	15·30	14·76	14·77 (a)
3	21·26	20·86	21·70	21·16	21·60	21·50 (s)
4	48·71	46·90	48·10	49·47	48·28	48·19 (a)
5			60·50	67·46	60·56	60·54 (s)
6			92·30		88·84	91·79 (s)
7	94·49	93·99	92·80		92·24	92·78 (a)
8			118·70		117·72	119·34 (s)
9			125·10		118·96	124·23 (s)
10			154·00			153·15 (a)
11			176·00			174·46 (s)
12			196·00			199·61 (s)

† Results have been modified by Barton to correct for the means of testing used by him.
(s) denotes symmetrical mode; (a) antisymmetrical mode.

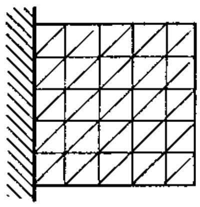
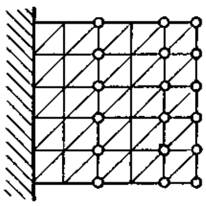


Plate without elimination

Number of degrees of freedom = 90.

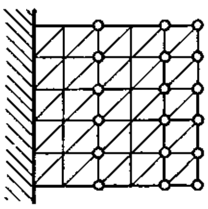
Mode	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3·469
2	8·535
3	21·450
4	27·059



Nodes not ringed are eliminated.

Number of master displacements = 54.

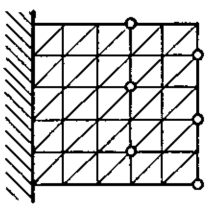
Mode	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3·470
2	8·540
3	21·559
4	27·215



All degrees of freedom eliminated except lateral deflections at ringed nodes.

N.M.D = 18.

Mode	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3·470
2	8·543
3	21·645
4	27·296



All degrees of freedom eliminated except lateral deflections at ringed nodes.

N.M.D = 6.

Mode	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3·473
2	8·604
3	22·690
4	29·490

Fig. 17.2 Use of eigenvalue elimination in vibration of a square cantilever plate

Kuva 17.2 osoittaa isäntä-orja-tekniikkaa hyväksikäyttävän solmuvapausasteiden eliminointitekniikan vaikutuksen tuloksiin. Kun vapausasteiden lukumäärä pudotettiin arvosta 90 arvoon 6, niin vaikutus ominaiskulmataajuuksiin oli erittäin vähäinen.

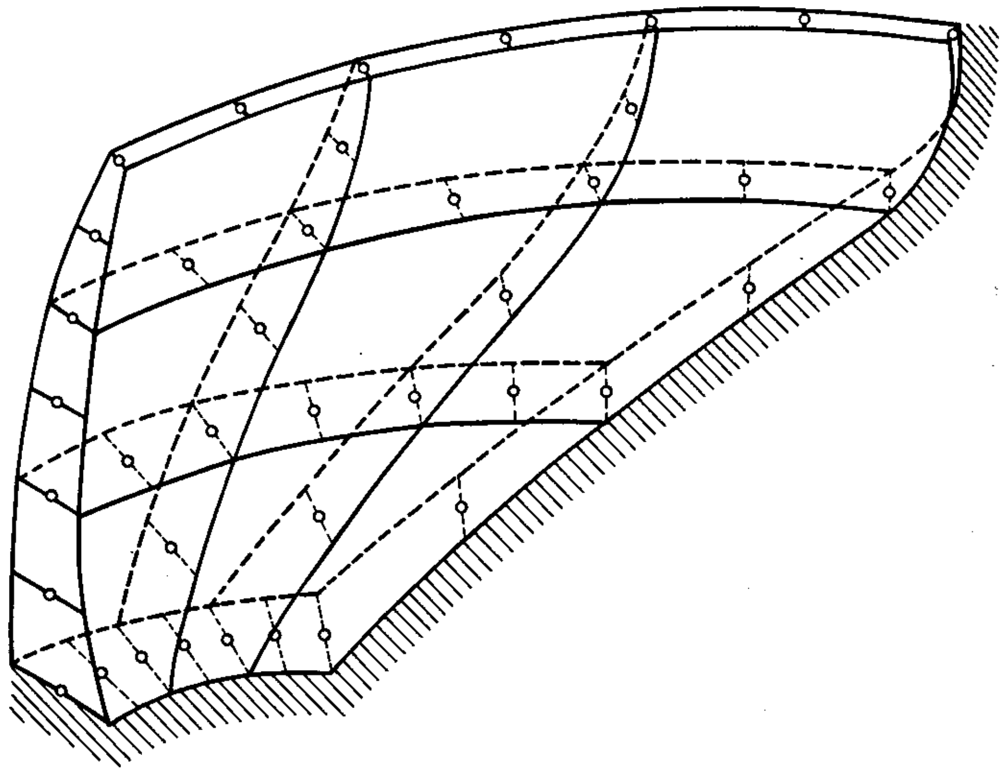


Fig. 17.5 (*a*) A 3 × 3 mesh of parabolic thick shell elements used to solve vibration of an arch dam

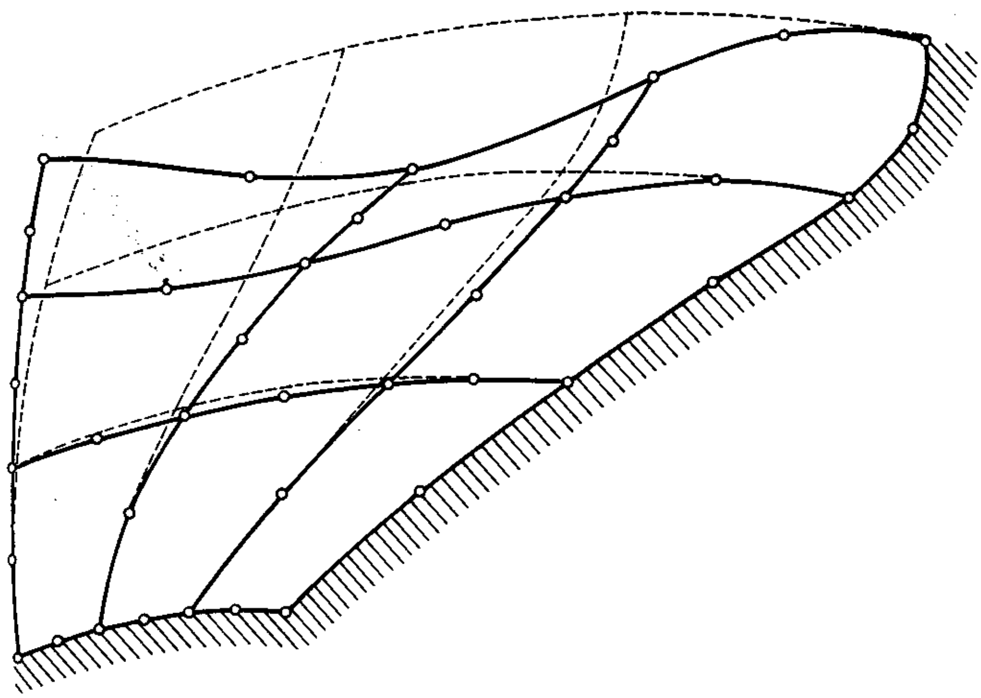


Fig. 17.5(*b*) First mode-shape and frequency = 2·20 c/sec

Kuvassa 17.5 (b) esitetään patorakenteen elementtijako ja ominaisvärähtelytehtävän tulokset alimman ominaisparin osalta.

4 RAKENTEEN OMINAISVÄRÄHTELYT

4.1 Ominaisvärähtelyjen perusyhtälö:

Tarkastellaan seuraavassa ideaalisia rakenteita. Niillä ei ole sisäisiä vaimennusvoimia. Jos ideaalinen rakenne saatetaan liikkeeseen joillakin sopivilla tilapäisvoimilla ja se jätetään värähtelemään vapaasti, se jatkaa värähtelyä ikuisesti. Ideaalisia rakenteita ei käytännössä esiinny. Kuitenkin monien rakenteiden ja materiaalien sisäinen vaimennus on niin pieni, että ne saattavat värähdellä suhteellisen pitkiä aikoja ilman, että amplitudi sanottavasti pienenee.

Vaimentamattoman rakenteen vapaita värähtelyjä sanotaan ominaisvärähtelyiksi. Ominaisvärähtelyssään rakenteen jokainen partikkeli suorittaa harmonista värähdysliikettä staattisen tasapainoaseman ympäri siten, että rakenteen jokainen partikkeli siirtää tasapainoasemansa samanaikaisesti ja saavuttaa ääriasemansa samanaikaisesti. Tästä seuraa, että rakenteen jokaisella partikkelilla on sama värähdysaika T, ja sama kulmataajuus ω. Tähän liikkeeseen liittyviä suureita ω ja T sanotaan ominaiskulmataajuudeksi ja ominaisvärähdysajaksi.
Tarkastelemalla rakennetta sinä hetkenä, jolloin sen kaikki pisteet ovat värähdysliikkeensä ääriasemassa, saadaan kuva sellaisesta muodonmuutoskonfiguraatiosta, joka on tunnusomainen juuri kyseessä oleville ominaisvärähtelyille. Tätä rakenteen äärimuodonmuutoskonfiguraatiota sanotaan kyseessä olevan ominaisvärähtelyn ominaismuodoksi.
Osoittautuu, että samalla ideaalisella rakenteella voi olla ja yleensä onkin useita ominaisvärähdystiloja ja siis useita ominaiskulmataajuksia ja ominaismuotoja. Itse asiassa osoittautuu, että rakenteella on yhtä monta ominaisvärähdystilaa kuin sillä on vapausasteiden lukumäärä. Koska jatkuvan rakenteen siirtymäkoordinaatisto voidaan valita kuinka moniulotteiseksi tahansa, niin sen vapausasteiden lukumäärä ja siis myös ominaisvärähdystilojen lukumäärä on itse asiassa ääretön,

Kun rakenteen siirtymäkoordinaatisto diskretisoidaan, saadaan äärellinen määrä ominaiskulmataajuuksia, jotka ovat todellisten likiarvoja, sitä parempia mitä suurempi niiden lukumäärä on.
Asettamalla alkuehdot sopivasti voidaan rakenne saattaa värähtelemään minkä tahansa mukaan niistä ominaisvärähtelyistä, jotka sillä on.
Ominaisvärähdystilojen ja ominaiskulmataajuuksien tunteminen muodostaa perustan rakenteen dynaamisen käyttäytymisen ymmärtämiselle riippumatta siitä, minkälaisten voimien vaikutuksen alaisena se on. Monissa tehtävissä voidaan liikeyhtälöiden muodostamista ja ratkaisemista olennaisesti helpottaa käyttämällä hyväksi sitä mitä tiedetään rakenteen ominaisvärähtelyistä.

Rakenteen liikeyhtälö on

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P(t)\} \tag{94}$$

Rakenteen ominaisvärähdellessä

* siihen ei vaikuta ulkoisia kuormituksia, joten

$$\{P(t)\} \equiv \{0\} \tag{95}$$

* liike on harmonista värähdysliikettä, jossa sen jokaisella partikkelilla on sama värähdysliikkeen kulmataajuus, joten

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2\{q\} \tag{96}$$

Ottamalla huomioon yhteydet (95) & (96) saadaan ominaisvärähtelyjä hallitsevaksi yhtälöksi

$$-\omega^2[M]\{q\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[K]\{q\} = \omega^2[M]\{q\}} \tag{97}$$

Yhtälö (97) on matematiikasta tuttu ominaisarvotehtävä, jonka ominaisarvot ovat rakenteen ominaiskulmataajuudet.

4.2 Ominaisarvoyhtälöiden erilaisia muotoja:

Merkitään ominaisarvotehtävässä (97) ominaisvektoreita ja ominaisarvoja

$$\{q\} \equiv \{\phi\} \quad , \quad \omega^2 \equiv \lambda$$

jolloin kahden matriisin ominaisarvotehtävä on muodossa

$$\boxed{[K]\{\phi\} = \lambda\,[M]\{\phi\} \quad , \quad \lambda = \omega^2} \tag{98}$$

Jos $\exists\,[K]^{-1} = [a]$, niin merkinnällä

$$[D] = [a][M] \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{99}$$

missä $[D]$ on niin sanottu dynaaminen matriisi, saadaan yhtälöstä (98) standardimuotoinen yhden matriisin ominaisarvotehtävä

$$\boxed{[D]\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}} \tag{100}$$

Jos $\exists\,[M]^{-1}$, niin merkinnällä

$$[D]^{-1} = ([a][M])^{-1} = [M]^{-1}[a]^{-1} = [M]^{-1}[K] \tag{101}$$

saadaan käänteinen yhden matriisin ominaisarvotehtävä

$$\boxed{[D]^{-1}\{\phi\} = \lambda\{\phi\} \quad , \quad \lambda = \omega^2} \tag{102}$$

Monet kirjasto-ohjelmat edellyttävät kahden matriisin ominaisarvotehtävän (98) palauttamista yhden matriisin ominaisarvotehtäväksi (100) tai (102). Suurilla systeemeillä tätä palauttamista ei kannata tehdä, vaan ominaisarvotehtävän ratkaisu suoritetaan kahden matriisin ominaisarvotehtävänä (98).

4.3 Ominaisarvotehtävän peruspiirteitä:

4.3.1 Ominaisarvotehtävän määrittely:

Määritelmä Ominaisarvotehtävän

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \qquad (103)$$

missä $[K]$ ja $[M]$ ovat neliömatriiseja, ratkaisulla tarkoitetaan niitä reaali- (tai kompleksi)lukuja λ_i ja epätriviaaleja vektoreita $\{\phi\}_i$, jotka toteuttavat ominaisarvoyhtälön (103).

Epätriviaalia ratkaisua $(\lambda_i, \{\phi\}_i)$ sanotaan ominaispariksi. λ_i on ominaisarvo ja $\{\phi\}_i$ ominaisvektori.
Ominaisarvoyhtälö (103) on homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä ominaisvektorin $\{\phi\}$ alkioiden ϕ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ suhteen ja λ on parametri. Vaatimuksesta, että yhtälöryhmällä (103) on epätriviaaliratkaisu (ainakin jokin $\phi_i \neq 0$) seuraa

$$\boxed{\det([K] - \lambda [M]) = 0} \qquad (104)$$

Yhtälö (104) on parametrin λ polynomimuotoinen (asteluku n) karakteristinen yhtälö. Sillä on n kappaletta juuria, jotka eivät välttämättä ole erisuuria.
Ominaisarvotehtävän ominaisvektorit ovat vakiokertojaa vaille yksikäsitteiset, sillä jos ominaisarvoyhtälö

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\}$$

kerrotaan luvulla $\alpha \in \mathbb{R}$, niin

$$\alpha [K]\{\phi\} = \alpha\lambda [M]\{\phi\} \Rightarrow [K]\{\alpha\phi\} = \lambda [M]\{\alpha\phi\}$$

joten vektori $\alpha\{\phi\}$ on saman ominaisarvotehtävän ominaisvektori. Tämä antaa mahdollisuuden ominaisvektorin normeeraamiseen. Tästä tarkemmin myöhemmin
Useampikertaisiin ominaisarvoihin λ_i liittyvät ominaisvektorit eivät ole yksikäsitteiset.

$$[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ESIMERKKI:

Määritä oheisen matriisin ominaisparit.

RATKAISU:

Ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ja $\lambda = 3$. Ominaisvektorit ovat (totea)

$$\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mutta havaitaan, että myös vektorit

$$\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kelpaavat ominaisvektoreiksi, sillä

$$(\lambda_1, \{\phi\}_1): \quad [D]\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1\{\phi\}_1 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{\%.}$$

$$(\lambda_2, \{\phi\}_2): \quad [D]\{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2\{\phi\}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{\%.}$$

$$(\lambda_3, \{\phi\}_3): \quad [D]\{\phi\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3\{\phi\}_3 = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{\%.}$$

Siis useampikertaisiin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit eivät ole yksikäsitteiset, mutta ne ovat kuitenkin keskenään erilaiset vektorit.

Kun ominaisarvot λ_i on laskettu karakteristisesta yhtälöstä (104), niin niihin liittyvät ominaisvektorit $\{\phi\}_i$ saataisiin esimerkiksi, siten, että muodostetaan matriisi

$$[B]_i = [K] - \lambda_i [M] \quad \Rightarrow \quad [B]_i \{\phi\}_i = \{0\}$$

Tällöin ominaisvektori $\{\phi\}_i$ on matriisin $[B]_i$ liitto-, eli adjungoidun matriisin mikä tahansa pystyrivi toisin sanoen

$$\{\phi\}_i = \{\mathrm{adj}([K] - \lambda_i [M])\}^{(j)} \tag{105}$$

Tietokonelaskennassa yhteyttä (105) ei kannata missään tapauksessa käyttää, vaan käytetään jäljempänä esitettyjä paljon tehokkaampia menetelmiä!

Tavallisesti ominaisarvot λ_i numeroidaan suuruusjärjestyksessä pienemmästä suurempaan

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$$
$$\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \cdots \quad \{\phi\}_n$$

Kun tehtävänä on tarkastella ominaisvärähtelytehtävää, tiedetään ominaisarvoyhtälön matriiseista $[K]$ ja $[M]$ monia asioita, jotka ovat aina voimassa ja joita voidaan tehokkaasti hyödyntää:

$[K]$ <u>jäykkyysmatriisi</u>:

* symmetrinen $[K]^T = [K]$.
* dimensio n on yhtä suuri kuin rakenteen vapausasteiden lukumäärä.
* puolinauhan leveys b_K
* positiivisesti definiitti $\Leftrightarrow$ Rakenteella ei ole jäykän kpleen liikemahdollisuutta
* positiivisesti semidefiniitti (singulaarinen) $\Leftrightarrow$ Ainakin yksi jäykän kpleen vapausaste, josta seuraa, että $\lambda_1 = 0$.

$[M]$ <u>massamatriisi</u>:

* symmetrinen $[M]^T = [M]$
* dimensio n
* puolinauhan leveys $b_M = b_K$, jos $[M] \equiv [M]_C$
  puolinauhan leveys $b_M = 1$, jos $[M] \equiv [M]_L$
* positiivisesti definiitti, jos $[M] \equiv [M]_C$ tai jos $[M] \equiv [M]_L$, $M_{ii} \neq 0$, $\forall i$
* positiivisesti semidefiniitti (singulaarinen), jos $[M] \equiv [M]_L$ ja ainakin yksi $M_{ii} = 0$. Tällöin $\lambda_n = \infty$.

$\Rightarrow$

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \infty \qquad (106)$$

4.3.2 Ominaisvektoreiden ortogonaalisuus:

Olkoot λ_i ja λ_j ominaisvektoreita, jolloin

$$[K]\{\phi\}_i = \lambda_i [M]\{\phi\}_i \quad | \{\phi\}_j^T \cdot$$

$$\Rightarrow \quad \{\phi\}_j^T [K]\{\phi\}_i = \lambda_i \{\phi\}_j^T [M]\{\phi\}_i \tag{107}$$

Transponoidaan yhtälön (107) molemmat puolet ja muistetaan, että $[K]^T = [K]$ ja $[M]^T = [M]$. Tällöin saadaan

$$\{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j = \lambda_i \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j \tag{108}$$

Toisaalta, koska $\{\phi\}_j$ on ominaisvektori, niin

$$[K]\{\phi\}_j = \lambda_j [M]\{\phi\}_j \tag{109}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (108), jolloin voidaan kirjoittaa

$$\{\phi\}_i^T \lambda_j [M]\{\phi\}_j = \lambda_i \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_j - \lambda_i)\{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j = 0$$

Jos $\lambda_j \neq \lambda_i$, niin $\quad \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j = 0 \quad i \neq j$ (110)

Sijoitetaan (109) uudelleen yhtälöön (108):

$$\{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j = \lambda_i \{\phi\}_i^T \frac{1}{\lambda_j}[K]\{\phi\}_j$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_j - \lambda_i)\{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j = 0$$

Jos $\lambda_j \neq \lambda_i$, niin $\quad \{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j = 0 \quad i \neq j$ (110)'

Kokoamalla tulokset (110) ja (110)', saadaan erisuuriin ominaisarvoihin λ_i ja λ_j liittyvien ominaisvektoreiden ortogonaalisuusehdoksi

$$\boxed{\begin{aligned} \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j &= \mathcal{M}_{ij}\,\delta_{ij} \\ \{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j &= \mathcal{K}_{ij}\,\delta_{ij} \end{aligned}} \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{111}$$

Ortogonaalisuusehto (111) tarjoaa mahdollisuuden ominaisvektorien normeeraukseen:
Normeeratataan ominaisvektorit siten, että $\mathcal{M}_{ii} = 1$, jolloin yhtälöstä (108) seuraa

$$\mathcal{K}_{ij}\,\delta_{ij} = \lambda_i\,\mathcal{M}_{ij}\,\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_{ii} = \lambda_i \;,\; \mathcal{M}_{ii} = 1 \tag{112}$$

Sanotaan, että ominaisvektorit on normeerattu massamatriisin suhteen. Tällöin normeerattu ominaisvektori

$$\{\bar{\phi}\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i}}\,\{\phi\}_i \tag{113}$$

Tällöin ortogonaalisuusehdot (111) menevät muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} \{\bar{\phi}\}_i^T [M] \{\bar{\phi}\}_j &= \delta_{ij} \\ \{\bar{\phi}\}_i^T [K] \{\bar{\phi}\}_j &= \lambda_i\,\delta_{ij} \end{aligned}} \tag{114}$$

Yhteenveto ominaisvektorien normeerausmahdollisuuksista:

1. Normeeraus massamatriisin suhteen toisin sanoen

$$\{\bar{\phi}\}_i^T [M] \{\bar{\phi}\}_i = 1 \tag{115}$$

2. Ensimmäinen ominaisvektorin $\{\phi\}_i$ komponenteista valitaan ykköseksi eli

$$\phi_1^i = 1 \qquad , i = 1, 2, \ldots, n \tag{116}$$

3. Jokin ominaisvektorin $\{\phi\}_i$ komponenteista normeerataan ykköseksi, esimerkiksi suurin alkio:

$$\max_j |\phi_j^i| = 1 \;,\; i = 1, 2, \ldots, n \tag{117}$$

Normeeraustapa 1 lienee tavallisin. Se ei ole vielä yksikäsitteinen normeeraus, sillä ominaisvektorit voi vielä kertoa luvulla -1 ilman, että ehto muuttuisi.

4.3.3 Modaalimatriisi, spektrimatriisi ja pääkoordinaatisto:

Valitaan ominaisvektoreista $\{\phi\}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ p kappaletta $p \leqq n$ ja kirjoitetaan matriisi

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \; \{\phi\}_2 \cdots \{\phi\}_p] \qquad (118)$$

$n \times p$-matriisia $[\Phi]$ sanotaan <u>muotomatriisiksi</u> (modal matrix).

Ominaisarvoista muodostettua lävistäjämatriisia

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \; \lambda_p \end{bmatrix} = \lceil \lambda_1 \; \lambda_2 \ldots \lambda_p \rfloor \qquad (119)$$

sanotaan <u>spektrimatriisiksi</u> (spectral matrix).

Suoritetaan koordinaatiston muunnos niin sanottuun pääkoordinaatistoon $\{\eta\}$ siten, että

$$\boxed{\{q\} = [\Phi]\{\eta\}} \qquad (120)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} [\mathcal{M}] &= [\Phi]^T [M] [\Phi] \\ [\mathcal{K}] &= [\Phi]^T [K] [\Phi] \\ \{\mathcal{F}\} &= [\Phi]^T \{F\} \end{aligned}} \qquad (121)$$

Matriisit $[\mathcal{M}]$ ja $[\mathcal{K}]$ ovat lävistäjämatriiseja, sillä

$$[\mathcal{M}] = [\{\phi\}_1^T \{\phi\}_2^T \cdots \{\phi\}_p^T][M][\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \cdots \{\phi\}_p] = (\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j) = (\mathcal{M}_{ij} \delta_{ij})$$

$$[\mathcal{K}] = [\{\phi\}_1^T \{\phi\}_2^T \cdots \{\phi\}_p^T][K][\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \cdots \{\phi\}_p] = (\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j) = (\mathcal{K}_{ij} \delta_{ij})$$

□

Jos ominaisvektorit on normeerattu massamatriisin suhteen, niin

$$[\mathcal{M}] = [I] \quad \& \quad [\mathcal{K}] = \lceil \Lambda \rfloor \qquad (122)$$

Transformaatiolla pääkoordinaatistoon on se erinomainen motiivi, että $[M]$ ja $[K]$ diagonalisoituvat, jolloin liikeyhtälöt

$$\lceil \mathcal{M} \rfloor \{\ddot{\eta}\} + \lceil \mathcal{K} \rfloor \{\eta\} = \{\mathcal{F}\} \qquad (123)$$

ovat separoituneet irti toisistaan!

4.3.4 Ominaisarvoakselin origon siirto:

Tarkastellaan ominaisarvotehtävän

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \tag{124}$$

asemasta ominaisarvotehtävää

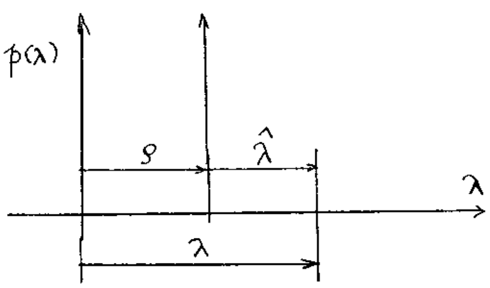
$$[\hat{K}]\{\psi\} = \hat{\lambda} [M]\{\psi\} \tag{124)'}$$

missä $$[\hat{K}] = [K] - \varrho [M] \tag{125}$$

Silloin

$$([K] - \varrho [M])\{\psi\} = \hat{\lambda} [M]\{\psi\}$$

$$\Rightarrow \quad [K]\{\psi\} = (\hat{\lambda} + \varrho) [M]\{\psi\} \tag{126}$$



Siis itseasiassa tarkastellaan ominaisarvotehtävää (126), joka eroaa alkuperäisestä tehtävästä (124) vain siten, että

$$\lambda = \hat{\lambda} + \varrho \tag{127}$$

$$\{\phi\} = \{\psi\} \tag{128}$$

Näin ollen muunnetun ominaisarvotehtävän (124)' ominaisvektorit ovat samat kuin alkuperäisen tehtävän (124). Ominaisarvot $\hat{\lambda} = \lambda - \varrho$, missä ϱ tarkoittaa <u>origon siirtoa</u> (shifting)!

$$[k] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESIMERKKI:

Erään rakenteen massa- ja jäykkyysmatriisi ovat ohessa. Määritä ominaisarvotehtävän ominaisarvot ja ominaisvektorit. Käytä origon siirtoa.

RATKAISU:

Ratkaistaan tehtävä ensin ilman origon siirtoa:

Karakteristinen polynomi on

$$p(\lambda) = \det([K] - \lambda [M]) = 3\lambda^2 - 18\lambda$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 6$$

(jatkuu)

Lasketaan tehtävä uudelleen suorittamalla origon siirto

$\rho = -2 \Rightarrow$

$$[\hat{K}] = [K] - \rho[M] = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p(\hat{\lambda}) = \det([\hat{K}] - \hat{\lambda}[M]) = \hat{\lambda}^2 - 10\hat{\lambda} + 16$$

$$p(\hat{\lambda}) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_1 = 2 \;\&\; \hat{\lambda}_2 = 8$$

$$\Rightarrow \{\Psi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\Psi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \lhd$$

$$\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 + \rho = 2 - 2 = 0 \quad //.$$

$$\lambda_2 = \hat{\lambda}_2 + \rho = 8 - 2 = 6 \quad //. \qquad \lhd$$

Motiiveja ominaisarvoakselin origon siirrolle:

* Iterointialgoritmien konvergenssia voidaan kiihdyttää.
* Monet algoritmit eivät "siedä" ominaisarvoa $\lambda_i = 0$. Siirtämällä origoa pienin ominaisarvo ei enää ole nolla, vaan $\hat{\lambda}_i > 0$, mikäli origoa on siirretty "riittävästi". Ominaisarvon $\lambda_i = 0$ esiintyminen voidaan tutkia etukäteen STURMin jonosäännöllä, joka esitetään hieman jäljempänä.
* Siirtämällä origo pois jo lasketun ominaisarvon yli lähelle seuraavaksi laskettavaa ominaisarvoa saadaan iterointialgoritmi suppenemaan haluttuun ominaisarvoon eikä jo laskettuun. STURMin jonosäännöllä ensin tutkitaan, mihin ominaisarvoakselin origo täytyy siirtää.

4.3.5 STURMin jonosääntöön perustuva ominaisarvojen separointi:

STURMin jonosääntöön (kts. esimerkiksi BATHE J., WILSON L, Numerical Methods in Finite Element Analysis) perustuu seuraava lause:

Lause: Jos kolmiointi

$$[K]-\mu[M]=[L][D][L]^T \tag{129}$$

GAUSSin eliminointia ja tarvittaessa vapausastenumerointia vaihtaen on mahdollista, niin on ominaisarvoyhtälöllä

$$[K]\{\phi\}=\lambda[M]\{\phi\} \tag{130}$$

lukua μ pienempiä ominaisarvoja yhtä monta kuin pivotmatriisissa $[D]$ on negatiivisia pivot-lukuja D_{ii}. Moninkertaiset ominaisarvot otetaan huomioon moninkertaisina. Kääntäen, jos

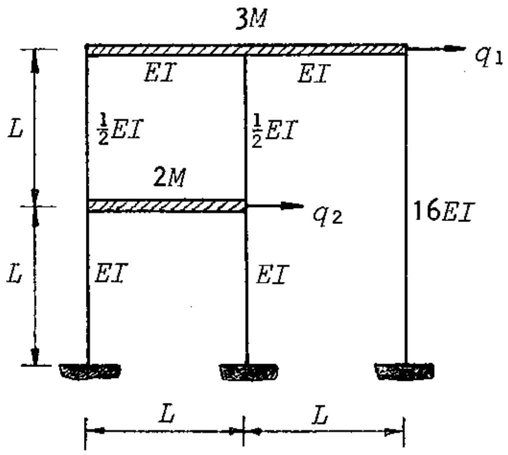
$$\lambda_i<\mu<\lambda_{i+1} \tag{131}$$

niin negatiivisia pivot-lukuja on i kappaletta.

Todistus:

Todistus sivuutetaan (kts. esimerkiksi kirja BATHE J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Eng. Cliffs, 1982).

Edellä olevan lauseen avulla on mahdollista separoida ominaisarvot toisistaan, mutta sen tärkein sovellutus on siinä, että sen avulla voidaan tarkistaa, onko jollakin laskumenetelmällä saatu ominaisarvo juuri se (esimerkiksi pienin λ_1), joka haluttiin.
Käyttämällä origon siirtoa ja edellä olevaa lausetta voidaan origo siirtää lähelle haluttua ominaisarvoa eikä tietämättä haluttujen vielä tuntemattomien ohi.
Kunkin ominaisarvon haarukkaa voidaan edellä olevan lauseen avulla kaventaa miten paljon tahansa esimerkiksi niin sanottua puolitusmenetelmää käyttäen (tämä esitetään jäljempänä).



ESIMERKKI:

Määritä kuvan hallikehän ominaisvärähtelyjen kulmataajuuksien esiintymisalueet. Kehän väli- ja yläpohja on massiivinen verrattuna hoikkiin pilareihin, joten kehän massan voidaan katsoa keskittyneen vaakasuuntaisiin koordinaatteihin q_1 ja q_2.

RATKAISU:

$$[M] = M\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [K^*] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 17{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 32{,}21 \end{bmatrix}, \quad \frac{ML^3}{EI} = 1$$

$$[K^*]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\}$$

estimaatti $\mu_1 = 1$:

$$[K^*] - \mu_1 [M] = \begin{bmatrix} 14{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 30{,}21 \end{bmatrix} \;\; \frac{11{,}87}{14{,}20} \Rightarrow \begin{bmatrix} 14{,}20 & -11{,}87 \\ 0 & 20{,}29 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \lambda_i \quad \forall i$$

estimaatti $\mu_2 = 5$:

$$[K^*] - \mu_2 [M] = \begin{bmatrix} 2{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 22{,}21 \end{bmatrix} \;\; \frac{11{,}87}{2{,}20} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2{,}20 & -11{,}87 \\ 0 & -41{,}83 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 < 5$$

estimaatti $\mu_3 = 20$:

$$[K^*] - \mu_3 [M] = \begin{bmatrix} -42{,}80 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & -7{,}79 \end{bmatrix} \;\; -\frac{11{,}87}{42{,}80} \Rightarrow \begin{bmatrix} -42{,}80 & -11{,}87 \\ 0 & -4{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 5 < \lambda_2 < 20$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \lambda_1 < 5 < \lambda_2 < 20$$

4.3.6 RAYLEIGH-osamäärä:

Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \quad , \lambda = \omega^2$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet vasemmalta matriisilla $\{\phi\}^T$, jolloin saadaan

$$\{\phi\}^T[K]\{\phi\} = \lambda \{\phi\}^T[M]\{\phi\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{\{\phi\}^T[K]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}}} \qquad (132)$$

Yhtälöä (132) kutsutaan <u>Rayleigh-osamääräksi</u>.

Jos yhtälössä (132) käytetään oikeita ominaisvektoreita $\{\phi\}_i$, niin siitä saadaan laskettua oikea ominaisarvo λ_i. Tästä huomiosta ei ole paljon iloa. Tärkeämpää sen sijaan on, että jos yhtälössä (132) käytetään ominaisvektoreille estimaattia $\{\tilde{\phi}\}$, niin yhtälöstä saadaan laskettua ominaisarvon estimaatti $\tilde{\lambda}$. Tämä ominaisarvon estimaatti $\tilde{\lambda}$ on paljon lähempänä oikeata <u>alinta</u> ominaisarvoa λ_1 kuin arvattu ominaisvektoriestimaatti $\{\tilde{\phi}\}$ on "lähellä" oikeata ominaisvektoria $\{\phi\}_1$. Täsmällisemmin sanottuna on voimassa:

<u>Rayleigh-periaate</u>: Ominaisarvo λ_i on *stationaarinen* vastaavan ominaisvektorin $\{\phi\}_i$ läheisyydessä.

<u>Todistus</u>:
Koska ominaisvektorit $\{\phi\}_i$, $i=1,2,\dots,n$ virittävät ominaisavaruuden eli ne kelpaavat kantajärjestelmäksi, niin

$$\{\tilde{\phi}\} = c_1\{\phi\}_1 + c_2\{\phi\}_2 + \cdots + c_n\{\phi\}_n$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda} = \frac{\{\tilde{\phi}\}^T[K]\{\tilde{\phi}\}}{\{\tilde{\phi}\}^T[M]\{\tilde{\phi}\}} = \frac{\Sigma\Sigma\, c_i c_j \{\phi\}_i^T[K]\{\phi\}_j}{\Sigma\Sigma\, c_i c_j \{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_j}$$

Normeerataan ominaisvektorit $\{\phi\}_i$ siten, että

$$\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_j = \delta_{ij} \ \& \ \{\phi\}_i^T[K]\{\phi\}_j = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda} = \frac{\Sigma c_i^2 \lambda_i}{\Sigma c_i^2} = \frac{c_1^2 \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i^2 \lambda_i}{c_1^2 + \sum_{i=2}^{n} c_i^2}$$

Jos $\{\tilde{\phi}\} \approx \{\phi\}_1 \Rightarrow |c_i/c_1| \equiv \varepsilon_i \ll 1$, $i = 2,3,\dots n$, joten

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} (c_i^2/c_1^2)\lambda_i}{1 + \sum_{i=2}^{n} (c_i^2/c_1^2)} = \frac{\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2 \lambda_i}{1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \frac{\sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2 \lambda_i - \lambda_1 \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2}{1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2} = \lambda_1 + \frac{\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\varepsilon_i^2}{1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2}$$

Koska $\lambda_i > \lambda_1$, $\forall i = 2,3,\dots,n$, niin voidaan kirjoittaa

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Siis, jos ominaisvektorin virhe on ensimmäistä kertalukua pieni toisin sanoen

$$\{\tilde{\phi}\} = \{\phi\}_1 + \sum_{i=2}^{n} (c_i/c_1)\{\phi\}_i = \{\phi\}_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \{\phi\}_i = \{\phi\}_1 + \{\mathcal{O}(\varepsilon)\}$$

niin ominaisarvon virhe on vain toista kertalukua oleva suure toisin sanoen

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Koska $\tilde{\lambda} = \lambda_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ja $\mathcal{O}(\varepsilon^2) \geqq 0$, niin

$$\boxed{\lambda_1 \leqq \tilde{\lambda}} \tag{133}$$

<u>Rayleigh-lause</u>: Rayleigh-osamäärä antaa aina <u>yläraja-estimaatin alimmalle ominaisarvolle</u> ja siis myös alimmalle ominaiskulmataajuudelle.

Rayleigh-osamäärä (132) estimoi siis aina alinta ominaisarvoa λ_1. Jos halutaan estimoida ominaisarvoa λ_s $(s \geqq 1)$, niin ominaisvektoriestimaatti $\{\tilde{\phi}\}_s$ on valittava [M]-ortogonaaliseksi kaikkien ominaisarvoa λ_s alempien ominaisparien ominaisvektoreiden kanssa toisin sanoen

$$\boxed{\lambda_s \leqq \tilde{\lambda} \quad \Leftarrow \quad \{\tilde{\phi}\} \perp \{\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \ldots, \{\phi\}_{s-1}\}} \tag{134}$$

Jos halutaan, että $\{\tilde{\phi}\}$ estimoi suurinta (ylintä) ominaisarvoa vastaavaa ominaisvektoria $\{\phi\}_n$, niin

$$\{\tilde{\phi}\} = c_1\{\phi\}_1 + c_2\{\phi\}_2 + \cdots + c_n\{\phi\}_n = \sum_{i=1}^{n-1}(c_i/c_n)\{\phi\}_i + \{\phi\}_n$$

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\} = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \{\phi\}_i + \{\phi\}_n = \{\phi\}_n + \{\mathcal{O}(\varepsilon)\} \quad , \quad \varepsilon_i = \left|\frac{c_i}{c_n}\right| \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2 \lambda_i + \lambda_n}{\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2 + 1} = \lambda_n - \frac{-\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2 \lambda_i + \lambda_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda} = \lambda_n - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)\varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i^2 + 1} = \lambda_n - \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad \mathcal{O}(\varepsilon^2) \geqq 0$$

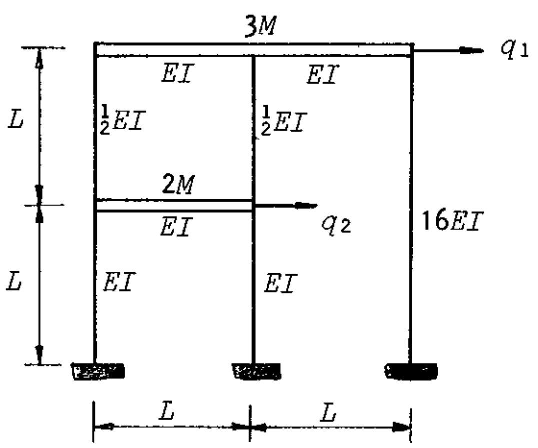
$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n \geqq \tilde{\lambda}} \tag{135}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 \leqq \tilde{\lambda} \leqq \lambda_n} \tag{136}$$

Vielä on voimassa <u>Rayleigh-osamäärän minimilause</u>:

$$\lambda_1 = \min \tilde{\lambda}(\{\tilde{\phi}\}) \tag{137}$$

eli λ_1 on Rayleigh-osamäärän pienin mahdollinen arvo kaikkien n-ulotteisten vektorien $\{\phi\}$ joukosta laskettuna.



ESIMERKKI:

Määritä kuvan hallikehän ominaisvärähtelyjen ominaiskulmataajuuden ω_1 ylärajaestimaatti käyttämällä RAYLEIGH-osamäärää ja ominaismuotovektoriestimaattina

a) $\{\phi\} = \{1 \quad 2\}$

b) $\{\phi\} = \{1 \quad 0{,}2\}$

RATKAISU:

$$[K^*] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 17{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 32{,}21 \end{bmatrix}, \quad [M] = M\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $\{\tilde{\phi}\} = \{1 \quad 2\}$

$$\{\tilde{\phi}\}^T[K^*]\{\tilde{\phi}\} = 98{,}56\ EI/L^3$$

$$\{\tilde{\phi}\}^T[M]\{\tilde{\phi}\} = 11\ M$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{98{,}56}{11}\frac{EI}{ML^3} = 8{,}96\ \frac{EI}{ML^3} \qquad \triangleleft$$

b) $\{\tilde{\phi}\} = \{1 \quad 0{,}2\} \quad \Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\}^T[K^*]\{\tilde{\phi}\} = 13{,}74\ EI/L^3$

$$\{\tilde{\phi}\}^T[M]\{\tilde{\phi}\} = 3{,}08\,M$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{13{,}74}{3{,}08}\frac{EI}{ML^3} = 4{,}46\ \frac{EI}{ML^3} \qquad \triangleleft$$

Tarkka ominaispari olisi $(\lambda_1, \{\phi\}_1) = \left(3{,}8225\,\frac{EI}{ML^3}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}48317 \end{bmatrix}\right)$

a)-kohdan tulos on erittäin kehno. Estimaatti $\{\tilde{\phi}\}$ oli kyllä varsin kaukana oikeasta vektorista $\{\phi\}_1$.

b)-kohdan tulos on kohtalainen, vaikka estimaatti $\{\tilde{\phi}\}$ on varsin heikko.

4.4 Massattomien vapausasteiden huomioonotto:

Jos keskitetty massamatriisi $[M]_L$ sisältää nollia lävistäjäalkioina eli jos esimerkiksi rotaatiohitaudet ovat nollia, niin $[M]_L$ on positiivisesti semidefiniitti.

Merkitään ominaisarvotehtävässä

$$[K]\{\phi\} = \lambda\,[M]_L\{\phi\} \tag{138}$$

$\lambda = \omega^2$. Helposti voidaan päätellä, että massattomiin vapausasteisiin liittyvät kulmataajuudet $\omega_i = \infty$ eli $\lambda = \infty$. Merkitään

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\;, \quad \lambda \to \infty \;\Rightarrow\; \mu \to 0$$

$\Rightarrow$

$$[M]_L\{\phi\} = \mu\,[K]\{\phi\} \tag{139}$$

Väitetään, että ominaisarvoa $\mu_k = 0$ vastaava ominaisvektori

$$\{\phi\}_k = \{\underset{1}{0}\;\;\underset{2}{0}\;\underset{\cdots}{\cdots}\;\underset{k}{1}\;\cdots\;\underset{n-1}{0}\;\;\underset{n}{0}\} \tag{140}$$

Silloin

$$[M]_L\{\phi\}_k = \{0\} \qquad (\mu_k = 0) \tag{141}$$

eli

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{142}$$

Joten $\{\phi\}_k$ yhtälöstä (140) kelpaa. Huomaa, että vektori $\{\phi\}_k = \{0\;0 \cdots 0\}$ ei kelpaa, sillä se on triviaali.

4.5 OMINAISARVOTEHTÄVÄN RATKAISUMENETELMIÄ:

4.5.1 Ratkaisumenetelmien luokittelu:

Tehtävänä on ratkaista ominaisongelman

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \quad , \quad \lambda = \omega^2$$

p kappaletta alimpia ominaispareja

$$(\lambda_1, \{\phi\}_1), (\lambda_2, \{\phi\}_2), \ldots, (\lambda_p, \{\phi\}_p) \quad , \quad p \leq n$$

halutulla tarkkuudella. Ratkaisumenetelmät voidaan ryhmitellä sen perusteella, mihin ominaisongelman perusominaisuuteen ratkaisumenetelmä oleellisesti perustuu. Tässä esityksessä ryhmitellään menetelmät kuuteen ryhmään:

I. POLYNOMI-ITEROINTIMENETELMÄT: $p(\lambda) = \det([K] - \lambda [M]) = 0$
- eksplisiittinen polynomi-iterointi
- implisiittinen polynomi-iterointi

II. STURMIN PUOLITUSMENETELMÄ: $D_{ii} \gtrless 0$, kpl

III. VEKTORI-ITEROINTIMENETELMÄT: $[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\}$
- käänteinen ja myötäinen yhden matriisin vektori-iterointi
- käänteinen ja myötäinen kahden matriisin vektori-iterointi

IV. RAYLEIGH-osamäärän iterointi $\lambda = \{\phi\}^T [K]\{\phi\} / \{\phi\}^T [M]\{\phi\}$
- Rayleigh-osamäärän iterointi
- Rayleigh-Ritzin menetelmä

V. KOORDINAATISTON MUUNNOSMENETELMÄT: $[\Phi]^T [K][\Phi] = [\lambda]$, $[\Phi]^T [M][\Phi] = [I]$
- Jacobin iterointi
- Yleistetty Jacobin iterointi
- Householderin iterointi

VI. YHDISTETYT MENETELMÄT: Suuret ominaisarvotehtävät
- Determinantin hakumenetelmä
- Aliavaruusiterointi

Jos tehtävän dimensio n on suurempi kuin 4, on ratkaisun pakko perustua <u>iterointiin</u>, sillä kyseessä on aina itseasiassa polynomiyhtälön $p(\lambda)=0$ ratkaiseminen.
Jos toinen ominaisparin $(\lambda_i, \{\phi\}_i)$ jäsenistä on saatu ratkaistua iteroimalla, niin toinen voidaan aina saada ilman iterointia:

* Jos ominaisarvo λ_i tunnetaan, niin saadaan $\{\phi\}_i$ ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$([K]-\lambda_i[M])\{\phi\}_i=\{0\}$$

ottaen huomioon normeerausehto

$$\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_i=1$$

* Jos ominaisvektori $\{\phi\}_i$ tunnetaan, niin vastaava ominaisarvo λ_i saadaan RAYLEIGH-osamäärästä,

$$\lambda_i=\frac{\{\phi\}_i^T[K]\{\phi\}_i}{\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_i}$$

Tehokkaan ratkaisumenetelmän kannalta oleellinen kysymys on, kumpi ominaisparin $(\lambda_i, \{\phi\}_i)$ jäsenestä pitäisi ratkaista ensin vai pitäisikö ne laskea samanaikaisesti. Vastaavasti, jos halutaan p kappaletta $(p \leqq n)$ ominaispareja, pitäisikö ne laskea peräkkäin vai kaikki samanaikaisesti.
Valitettavasti mitään yleistä vastausta näihin kysymyksiin ei ole, vaan tehokkain ratkaisumenetelmä riippuu tehtävätyypistä, esimerkiksi ongelman dimensiosta n, jäykkyys- ja massamatriisin singulaarisuudesta ja puolinauhan leveydestä jne.
Tässä esityksessä päähuomio tullaan kiinnittämään <u>vektori-iterointimenetelmiin</u>, sillä ne ovat osoittautuneet tehokkaiksi rakenteiden dynamiikan ongelmissa. Lisäksi vektori-iterointi esiintyy monissa muissa menetelmissä osana ja on siksi tärkeä. Suurissa tehtävissä vektori-iterointi yksinään ei ole tehokas vaan sitä on terästettävä esimerkiksi Rayleigh-osamäärällä.

4.5.2 Polynomi-iterointimenetelmät:

Polynomi-iteroinnin lähtökohtana on ominaisarvotehtävän $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ epätriviaalin ratkaisun ehtoyhtälö

$$p(\lambda) = \det([K] - \lambda[M]) = 0 \tag{143}$$

Eksplisiittinen polynomi-iterointi:
edellyttää, että karakteristinen yhtälö (143) kehitetään eksplisiittiseen asuun

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda^1 + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n \tag{144}$$

Tämän jälkeen yhtälön $p(\lambda)=0$ juuret määritetään standardikirjasto-ohjelmalla. Menetelmää kannattaa käyttää vain, jos n on pieni. Suurilla systeemeillä tietokoneen äärellisestä laskentatarkkuudesta johtuvat virheet kertoimissa a_i saattavat vaikuttaa kohtalokkaasti ominaisarvoille saatuihin likiarvoihin.

Implisiittinen polynomi-iterointi:
Menetelmässä karakteristisen polynomin (143) kertoimia ei lasketa, vaan polynomin arvo lasketaan kolmioimalla matriisi $[K] - \lambda[M]$ siten, että

$$[K] - \lambda[M] = [L][S] \tag{145}$$

missä $[L]$ on alakolmio- ja $[S]$ yläkolmiomatriisi. $[S]$ saadaan GAUSSin eliminoinnilla. Tällöin

$$p(\lambda) = \det([K] - \lambda[M]) = S_{11} \cdot S_{22} \cdots S_{nn} \tag{146}$$

missä S_{ii} ovat pivotlukuja. Jos GAUSSin eliminointi ei vaadi vapausastenumeroinninvaihtoa tai rivi- tai sarakevaihtoa, niin

$$[K] - \lambda[M] = [L]\lceil D \rfloor [L]^T \tag{147}$$

missä $\lceil D \rfloor = \lceil D_{11}\ D_{22}\ \ldots\ D_{nn} \rfloor$ on pivot-matriisi ja tällöin

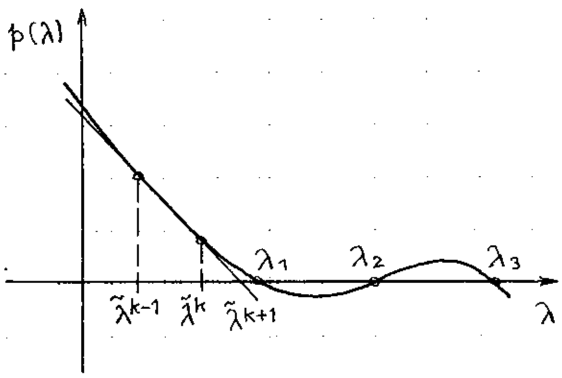
$$p(\lambda) = D_{11} \cdot D_{22} \cdots D_{nn} \tag{148}$$

Karakteristisen yhtälön $p(\lambda)=0$ juurien määritys voi tapahtua esimerkiksi sekanttimenetelmällä. Jos on laskettu (ja aluksi annettu alkuarvaukset) likiarvot $\tilde{\lambda}^{k-1}$, $\tilde{\lambda}^{k}$, niin parannettu likiarvo $\tilde{\lambda}^{k+1}$ saadaan lausekkeella

$$\tilde{\lambda}^{k+1} = \tilde{\lambda}^{k} - \frac{p(\tilde{\lambda}^{k})}{p(\tilde{\lambda}^{k}) - p(\tilde{\lambda}^{k-1})} (\tilde{\lambda}^{k} - \tilde{\lambda}^{k-1}) \tag{149}$$

missä

$$\begin{cases} p(\tilde{\lambda}^{k-1}) = \det([K] - \tilde{\lambda}^{k-1}[M]) \\ p(\tilde{\lambda}^{k}) = \det([K] - \tilde{\lambda}^{k}[M]) \end{cases} \tag{150}$$



Kuva 25 Sekantti-iterointi.

Tietysti voitaisiin sekantti-iteroinnin asemasta käyttää NEWTONin iterointia

$$\tilde{\lambda}^{k+1} = \tilde{\lambda}^{k} - \frac{p(\tilde{\lambda}^{k})}{p'(\tilde{\lambda}^{k})} \tag{151}$$

Jos derivaatta $p'(\tilde{\lambda}^{k})$ korvataan differenssiosamäärällä

$$p'(\tilde{\lambda}^{k}) \approx \frac{p(\tilde{\lambda}^{k}) - p(\tilde{\lambda}^{k-1})}{\tilde{\lambda}^{k} - \tilde{\lambda}^{k-1}} \tag{152}$$

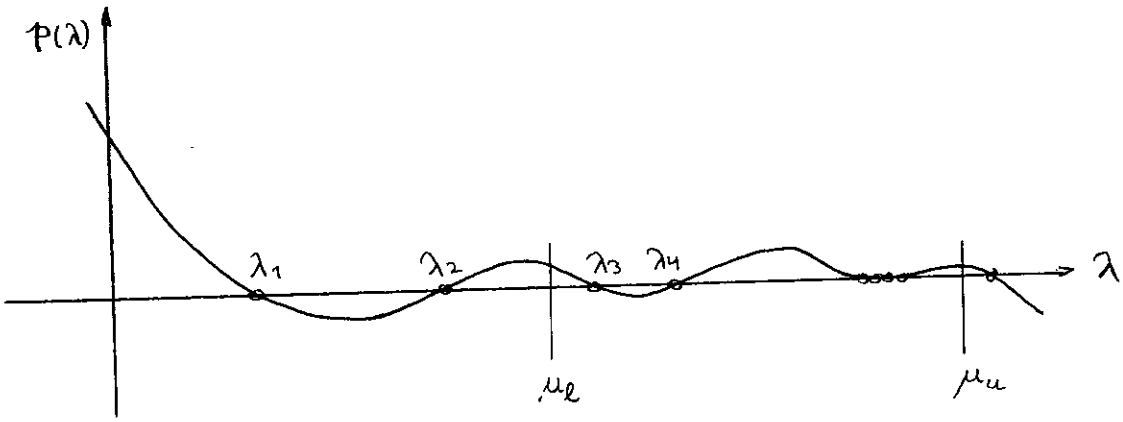
niin NEWTONin iterointi palautui sekantti-iteroinniksi. Sekanttikaava (149) on osoittautunut tässä yhteydessä tehokkaammaksi kuin NEWTONin kaava (151).

Se mihin ominaisarvoon $\tilde{\lambda}^{k}$ konvergoi, riippuu aloitusarvosta $\tilde{\lambda}^{0}$. Jos $\tilde{\lambda}^{k-1}$ ja $\tilde{\lambda}^{k}$ ovat pienempiä kuin λ_1 (kuva 25), niin sekantti-iterointi konvergoi monotonisesti alimpaan ominaisarvoon λ_1. Lopullinen konvergointi on vain lineaarinen. Mielivaltaisilla aloitusarvoilla ei konvergointia voida taata! Menetelmää onkin syytä käyttää esimerkiksi STURMin jonosäännön rinnalla.

Matriisin kolmiointi joudutaan tekemään useaan kertaan. Menetelmä kuluttaa tietokoneaikaa eikä ole erityisen tehokas ja se sopineekin vain pienehköille ongelmille.

4.5.3 STURMin puolitusmenetelmä:

Sivun 47 Sturmin jonosääntöön perustuvaa lausetta voidaan käyttää hyväksi niin sanotussa *puolitusmenetelmässä* (bisection method).
Tehtävänä on määrittää välin $\mu_l \leqq \lambda \leqq \mu_u$ kaikki ominaisarvot:



Kuva26 Karakteristisen funktion kuvaaja.

1. Kolmioidaan $[K]-\mu_l[M]$, jolloin saadaan negatiivisten pivot-lukujen lukumäärä q_l.
2. Kolmioidaan $[K]-\mu_u[M]$, jolloin saadaan negatiivisten pivot-lukujen lukumäärä q_u.
3. Välin $[\mu_l, \mu_u]$ ominaisarvojen lukumäärä on $q_u - q_l$
4. Välin $[\mu_l, \mu_u]$ ominaisarvot separoidaan puolittamalla väli toistuvasti siten, että jokainen välin ominaisarvo on omassa alueessa, jos mahdollista.
5. Välejä edelleen puolittamalla määritetään ominaisarvot halutulla tarkkuudella.

Menetelmän heikkoudet:

* kolmiointi on työläs.
* kolmiointi monta kertaa.
* konvergointi on laiskahkoa.
* useampikertaiset ominaisarvot ja ominaisarvopilvet tuottavat ongelmia.

korjattu 22.4.1986

Ei

4.5.4 Yhden matriisin käänteinen vektori-iterointi:

Käänteinen vektori-iterointi on tärkeä iterointimenetelmä. Tarkastellaan tapausta, jossa ominaistehtävä

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \quad , \quad \lambda = \omega^2$$

ensin palautetaan standardimuotoon yhden matriisin ominaisarvotehtäväksi,

$$[D]\{\phi\} = \lambda \{\phi\} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{153}$$

$$[D] = [K]^{-1}[M] = [a][M] \tag{154}$$

<u>Lause</u>: Standardimuotoisen ominaistehtävän (153) käänteinen vektori-iterointi johtaa alimpaan ominaiskulmataajuuteen ω_1 olipa lähtöestimaatti $\{\tilde{\phi}\}^0$ mikä tahansa, kunhan se ei ole ortogonaalinen massamatriisin suhteen todellisen ominaisvektorin $\{\phi\}_1$ kanssa.

<u>Todistus:</u>

Jos $(\lambda_i, \{\phi\}_i)$ on ominaispari, niin on voimassa

$$[D]\{\phi\}_i = \frac{1}{\omega_i^2}\{\phi\}_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{155}$$

Koska ominaisvektorit $\{\phi\}_i$ virittävät ominaisavaruuden, ne voidaan valita kantajärjestelmäksi. Tällöin lähtöestimaatti $\{\tilde{\phi}\}^0$, joka on tämän avaruuden eräs vektori, voidaan esittää

$$\{\tilde{\phi}\}^0 = C_1\{\phi\}_1 + C_2\{\phi\}_2 + \cdots + C_n\{\phi\}_n \tag{156}$$

Suoritetaan normeeraus alkion $\tilde{\phi}_i^0$ ($\phi_i \neq 0$ voidaan aina valita) suhteen

$$\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \frac{1}{\tilde{\phi}_i^0}\{\tilde{\phi}\}^0 \tag{157}$$

$$\Rightarrow \quad [D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0}[D]\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0}[D]\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0}[D]\{\phi\}_n \tag{158}$$

 (lisäys 22.4.1986

E_i

Ottamalla huomioon perusyhtälö (155) seuraa

$$\{\tilde{\phi}\}^1 = [D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0\omega_1^2}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0\omega_2^2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0\omega_n^2}\{\phi\}_n$$

Normeerauksen

$$\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \frac{1}{\tilde{\phi}_i^1}\{\tilde{\phi}\}^1$$

jälkeen saadaan yhtälö

$$\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0\tilde{\phi}_i^1\omega_1^2}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0\tilde{\phi}_i^1\omega_2^2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0\tilde{\phi}_i^1\omega_n^2}\{\phi\}_n$$

$\Rightarrow$

$$\{\tilde{\phi}\}^2 = [D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0\tilde{\phi}_i^1\omega_1^4}\{\phi\}_1 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0\tilde{\phi}_i^1\omega_n^4}\{\phi\}_n$$

$$\vdots$$

$$\{\tilde{\phi}\}^p = \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p}}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_2^{2p}}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_n^{2p}}\{\phi\}_n$$

Koska $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$, niin heti kun p on "riittävän suuri", on voimassa

$$\frac{1}{\omega_1^{2p}} \gg \frac{1}{\omega_2^{2p}} \gg \cdots \frac{1}{\omega_n^{2p}}$$

joten

$$\{\tilde{\phi}\}^p \approx \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p}}\{\phi\}_1 \qquad (159)$$

$$\Rightarrow \{\underline{\tilde{\phi}}\}^p \approx \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p}}\{\phi\}_1 \qquad (160)$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^{p+1} = [D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^p = \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p+2}}\{\phi\}_1 \qquad (161)$$

Yhtälöistä (160) ja (161) seuraa komponenteille i yhtälöt

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 = \dfrac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p}}\,\phi_{1i} & (162) \\ \tilde{\phi}_i^{p+1} = \dfrac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p}\tilde{\phi}_i^\nu\,\omega_1^{2p+2}}\,\phi_{1i} & (163) \end{array}\right. \Bigg| :$$

Ei

Jakamalla yhtälöt (162) ja (163) keskenään saadaan

$$\tilde{\phi}_i^{p+1} = \frac{1}{\omega_1^2} \qquad (164)$$

Siis iterointi suppeni kohti alinta ominaiskulmataajuutta ω_1, joka tuloksen (164) mukaan saadaan ominaisvektoriestimaatin $\{\tilde{\phi}\}^{p+1}$ komponentin $\tilde{\phi}_i^{p+1}$ avulla. Samalla saatiin myös alinta muotoa estimoiva ominaisvektori $\{\tilde{\phi}\}_1$ (tulos (161)).

Siis

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \tilde{\phi}_i^{p+1} = \frac{1}{\omega_1^2}} \qquad (165)$$

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \{\tilde{\phi}\}^{p+1} = \{\phi\}_1} \qquad (166)$$

Lauseessa edellytettiin, että lähtöarvaus $\{\phi\}^0$ ei saa olla $[M]$-ortogonaalinen todelliselle ominaisvektorille $\{\phi\}_1$ toisin sanoen on oltava

$$\{\tilde{\phi}\}^{0T}[M]\{\phi\}_1 \neq 0 \qquad (163)$$

Vastaoletus: $\{\tilde{\phi}\}^{0T}[M]\{\phi\}_1 = 0$ (164)

$$[D]\{\tilde{\phi}\}^0 = [K]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^0 = \frac{C_1}{\omega_1^2}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\omega_2^2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}\{\phi\}_n \quad | [K]\cdot$$

$$\Rightarrow \quad [M]\{\tilde{\phi}\}^0 = \frac{C_1}{\omega_1^2}[K]\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\omega_2^2}[K]\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}[K]\{\phi\}_n \quad | \text{transp.}$$

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\}^{0T}[M] = \frac{C_1}{\omega_1^2}\{\phi\}_1^T[K] + \frac{C_2}{\omega_2^2}\{\phi\}_2^T[K] + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}\{\phi\}_n^T[K] \quad | \cdot\{\phi\}_1$$

Ei

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\{\tilde{\phi}\}^{0T}[M]\{\phi\}_1}_{\substack{=0\\ \text{vastaoletuksen}\\ \text{mukaan!}}} = \frac{C_1}{\omega_1^2}\underbrace{\{\phi\}_1^T[K]\{\phi\}_1}_{\neq 0} + \frac{C_2}{\omega_2^2}\underbrace{\{\phi\}_2^T[K]\{\phi\}_1}_{=0} + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}\underbrace{\{\phi\}_n^T[K]\{\phi\}_1}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{C_1}{\omega_1^2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$\lightning$ RR sillä jos $C_1 = 0$, niin alin ominaispari $(\frac{1}{\omega_1^2}, \{\phi\}_1)$ on pyyhkiytynyt laskennasta pois ja iterointi tapahtuu kohti toista ominaisparia $(\frac{1}{\omega_2^2}, \{\phi\}_2)$! $\square$

Kun alin ominaispari $(\frac{1}{\omega_1^2}, \{\phi\}_1)$ on laskettu se voidaan pyyhkiä dynaamisesta matriisista $[D]$ seuraavasti:

<u>Lause</u>: Kun iteroidaan toista ominaisparia $(\frac{1}{\omega_2^2}, \{\phi\}_2)$, niin dynaamisen matriisin $[D]$ asemasta on käytettävä pyyhittyä dynaamista matriisia

$$\boxed{[D]^{(2)} = [D] - \frac{1}{\omega_1^2}\{\underline{\phi}\}_1\{\underline{\phi}\}_1^T[M]} \tag{165}$$

Yhtälössä (165) ominaisvektori $\{\phi\}_1$ on normeerattava siten, että $\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1 = 1$.

<u>Todistus</u>:

Olkoon toisen ominaisparin laskemisen lähtöarvaus $\{\tilde{\phi}\}^0$.

$$\{\tilde{\phi}\}^0 = C_1\{\phi\}_1 + C_2\{\phi\}_2 + \cdots + C_n\{\phi\}_n \qquad | [D]^{(2)}\cdot$$

$\Rightarrow$

$$[D]^{(2)}\{\tilde{\phi}\}^0 = C_1[D]^{(2)}\{\phi\}_1 + C_2[D]^{(2)}\{\phi\}_2 + \cdots + C_n[D]^{(2)}\{\phi\}_n$$

$\Rightarrow$

$$[D]^{(2)}\{\tilde{\phi}\}^0 = C_1[D]\{\phi\}_1 + C_2[D]\{\phi\}_2 + \cdots + C_n[D]\{\phi\}_n - \frac{1}{\omega_1^2}C_1\{\phi\}_1\overbrace{\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1}^{=1}$$
$$- \frac{1}{\omega_2^2}C_2\{\phi\}_1\underbrace{\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_2}_{=0} - \cdots - \frac{1}{\omega_n^2}C_n\{\phi\}_1\underbrace{\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_n}_{=0}$$
$$= \cancel{\frac{C_1}{\omega_1^2}\{\phi\}_1} + \frac{C_2}{\omega_2^2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}\{\phi\}_n - \cancel{\frac{1}{\omega_1^2}C_1\{\phi\}_1}$$

$\Rightarrow$

$$[D]^{(2)}\{\tilde{\phi}\}^0 = \frac{C_2}{\omega_2^2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2}\{\phi\}_n \tag{166}$$

Siis alin ominaispari $(\frac{1}{\omega_1^2}, \{\phi\}_1)$ on pyyhkiytynyt pois !

$\square$

Ei

Sivun 61 lause voidaan yleistää:

<u>Lause</u>: Jos on laskettu k alinta ominaisparia, niin ominaisparia $\left(\frac{1}{\omega_{k+1}^2}, \{\phi\}_{k+1}\right)$ laskettaessa käytetään pyyhittyä dynaamista matriisia

$$\boxed{[D]^{(k+1)} = [D] - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\omega_\nu^2} \{\phi\}_\nu \{\phi\}_\nu^T [M]} \tag{167}$$

Tällöin ominaisvektorit normeerataan siten, että $\{\phi\}_\nu^T [M] \{\phi\}_\nu = 1$.

Lauseke (167) on siitä mukava, että se on erittäin helppo ohjelmoida. Heikkoutena siinä on se, että lasketut ominaisparit $\left(\frac{1}{\omega_\nu^2}, \{\phi\}_\nu\right)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$ ovat likiarvoja ja näin virhe kasaantuu dynaamiseen matriisiin $[D]^{(k)}$. Tästä seuraa kohtalokasta epätarkkuutta vähänkin suuremmilla systeemeillä. Lauseketta (167) kannattanee käyttää, jos ei lasketa kuin muutama alin (korkeintaan 10) ominaispari.

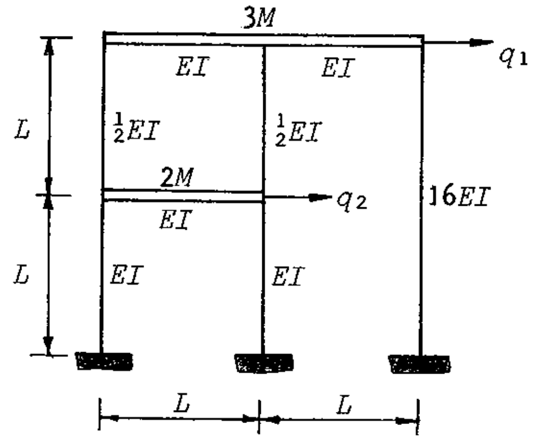
Toinen jo laskettujen ominaisparien pyyhkimistekniikka on niin sanotun <u>pyyhkijämatriisin</u> käyttö, josta on jäljempänä esimerkki.

Kaikkein suositeltavin tapa jo laskettujen ominaisparien eliminoinnille laskennasta on <u>origon siirron</u> käyttäminen. Tässä yhteydessä on myös syytä käyttää Sturmin jonosääntöä sen tarkistamiseen, että origoa ei siirrettäisi liikaa. Origoa kannattaisi siirrellä myös kesken vektori-iterointia, sillä se parantaa konvergointinopeutta!

Origon siirtotekniikkaan vektori-iteroinnin yhteydessä palataan tarkemmin, kun käsitellään käänteistä kahden matriisin ominaisarvotehtävän vektori-iterointia.

<u>Myötäinen standardimuotoisen</u> tehtävän $[D]^{-1}\{\phi\} = \lambda \{\phi\}$, $\lambda = \omega^2$ vektori-iterointi johtaa ylimpiin ominaiskulmataajuuksiin, jotka eivät yleensä kiinnosta. Käytännön rakenteissa ylemmät ominaistaajuudet harvoin "heräävät", joten niiden laskeminen tulee vain harvoin kysymykseen.

E_i



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan hallikehän ominaisvärähtelyjä. Määritä rakenteen ominaiskulmataajuudet yhden matriisin käänteisellä vektori-iteroinnilla. Määritä ylemmät taajuudet myös pyyhkijämatriisitekniikkaa hyväksikäyttäen.

RATKAISU:

$$[K^*] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 17{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 32{,}21 \end{bmatrix}, \quad [M] = M\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{merk. } \frac{EI}{ML^3} = 1$$

$$[D] = [a][M] = [K^*]^{-1}[M] = \begin{bmatrix} 0{,}23391 & 0{,}05746 \\ 0{,}08619 & 0{,}08328 \end{bmatrix}$$

Huomaa: Ei kannata arvata aloitusvektoria $\{\tilde{\phi}\}^0$ täysin "pimeästi", vaan kannattaa käyttää aikaisemmin STURMin jonosäännöllä laskettua tulosta: $\lambda_1 < 5$.

Arvataan $\tilde{\lambda}_1 = 4$ ja lasketaan $\{\tilde{\phi}\}^0 = \{\tilde{\phi}_1 \; \tilde{\phi}_2\}$ siten, että

$$([K^*] - \tilde{\lambda}_1[M])\{\tilde{\phi}\}^0 = \{0\}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 5{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 24{,}21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5{,}20\,\tilde{\phi}_1 - 11{,}87\,\tilde{\phi}_2 = 0 \\ -11{,}87\,\tilde{\phi}_1 + 24{,}21\,\tilde{\phi}_2 = 0 \end{cases}$$

Käytetään 1. yhtälöä ja valitaan $\tilde{\phi}_1 = 1 \Rightarrow \tilde{\phi}_2 = -5{,}20 \cdot 1/(-11{,}87)$
$\Rightarrow \tilde{\phi}_2 = 0{,}438$. Huomaa: 2. yhtälö ei tarkalleen toteudu!

Siis valitaan: $\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}438 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$

$$[D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}25908 \\ 0{,}12267 \end{bmatrix} = 0{,}25908\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4735 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_1\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1$$

$$[D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}26122 \\ 0{,}12563 \end{bmatrix} = 0{,}26122\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4811 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_1\{\underline{\tilde{\phi}}\}^2$$

$$[D]\{\underline{\tilde{\phi}}\}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}26156 \\ 0{,}12626 \end{bmatrix} = 0{,}26156\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4827 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_1\{\underline{\tilde{\phi}}\}^3$$

(jatkuu)

Ei

$$[D]\{\tilde{\underline{\phi}}\}^3 = \begin{bmatrix} 0{,}26165 \\ 0{,}12639 \end{bmatrix} = 0{,}26165 \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_1 \{\tilde{\underline{\phi}}\}^4$$

Tyydytään saatuun tulokseen, jolloin

$$\lambda_1 \approx 0{,}26165 \quad \& \quad \{\underline{\phi}\}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1{,}955\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \triangleleft$$

<u>Toinen ominaispari</u> $(\lambda_2, \{\phi\}_2)$:

Normeeraus: $\{\bar{\phi}\}_1^T [M] \{\bar{\phi}\}_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix} = 3{,}4667$$

$$\Rightarrow \quad \{\bar{\phi}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3{,}4667}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5371 \\ 0{,}2595 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [D]^{(2)} = [D] - \lambda_1 \{\bar{\phi}\}_1 \{\bar{\phi}\}_1^T [M] = \begin{bmatrix} 0{,}00751 & -0{,}01546 \\ -0{,}02319 & 0{,}04805 \end{bmatrix}$$

Valitaan aloitus: $\{\tilde{\underline{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad [D]^{(2)}\{\tilde{\underline{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}02297 \\ -0{,}07124 \end{bmatrix} = 0{,}02297 \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}1014 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_2 \{\tilde{\underline{\phi}}\}^1$$

$$[D]^{(2)}\{\tilde{\underline{\phi}}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}05546 \\ -0{,}17221 \end{bmatrix} = 0{,}05546 \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}105 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_2 \{\tilde{\underline{\phi}}\}^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_2 \approx 0{,}05546 \quad \& \quad \{\underline{\phi}\}_2 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}105 \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 4{,}246\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \triangleleft$$

(jatkuu)

2. tapa:

Eliminoidaan laskennasta jo saatu ominaispari $(\lambda_1, \{\phi\}_1)$ niin sanotun pyyhkijämatriisin avulla seuraavasti: Estimaatin $\{\tilde{\phi}\}^0$ pitää olla [M]-ortogonaalinen lasketulle ominaisvektorille $\{\phi\}_1$ eli

$$\{\underline{\phi}\}_1^T [M] \{\tilde{\phi}\}^0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3\tilde{\phi}_1 + 0{,}9662\tilde{\phi}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\phi}_1 = -0{,}32207\tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}32207 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

Merkitään:

$$[S]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}32207 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pyyhkijämatriisi}$$

$$[D]^{(2)} = [D][S]^{(2)}, \quad \text{yleisesti } [D]^{(k)} = [D][S]^{(k)}$$

$$\Rightarrow [D]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}23391 & 0{,}05746 \\ 0{,}08619 & 0{,}08328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0{,}32207 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}01787 \\ 0 & 0{,}05552 \end{bmatrix}$$

Valitaan lähtöarvaus: $\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [D]^{(2)}\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}01787 \\ -0{,}05552 \end{bmatrix} = 0{,}01787 \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}107 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_2 \{\underline{\tilde{\phi}}\}^1$$

$$[D]^{(2)}\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}05552 \\ -0{,}17251 \end{bmatrix} = 0{,}05552 \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}107 \end{bmatrix} = \tilde{\lambda}_2 \{\underline{\tilde{\phi}}\}^2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 \approx 0{,}05552 \quad \& \quad \{\underline{\phi}\}_2 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -3{,}107 \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 4{,}244\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \triangleleft$$

Pyyhkijämatriisitekniikkaa on vaikea automatisoida (ohjelmoida), ja lisäksi siinäkin käytetään hyväksi jo laskettuja ominaispareja, joten siinäkin virhe kumuloituu nopeasti. Näistä syistä pyyhkijämatriisitekniikka ei ole saanut laajempaa suosiota.

 korjattu 22.4.1986

4.5.5 Kahden matriisin käänteinen vektori-iterointi:

Ominaistehtävän palauttaminen standardimuotoiseksi yhden matriisin ominaisarvotehtäväksi ei ole välttämätöntä eikä suurilla systeemeillä suotavaakaan.
Käänteinen kahden matriisin ominaisarvotehtävän vektori-iterointi on rakenteiden dynamiikan tehtävän eräs tärkeimmistä menetelmistä. Se esiintyy myös monien menetelmien osana. Se edellyttää, että jäykkyysmatriisi on positiivisesti definiitti, joten jos systeemiin liittyy jäykän kpleen liikkeitä, on ennen tämän menetelmän käyttöä sovellettava origon siirtoa (*shifting*) negatiiviseen suuntaan. Massamatriisi saa olla singulaarinen, joten voidaan käyttää keskitettyä massamatriisia, jonka lävistäjällä on nollatermejä. Käänteisellä vektori-iteroinnilla lasketaan yleensä alimman ominaisparin $(\lambda_1, \{\phi\}_1)$ likiarvot. Käyttäen origon siirtoa tai ortogonalisointiehtoa voidaan määrittää muitakin ominaispareja.

Kahden matriisin käänteisen vektori-iteroinnin lähtökohtana on ominaisyhtälö

$$[K]\{\phi\}_i = \lambda_i [M]\{\phi\}_i \quad , \lambda_i = \omega_i^2 \tag{167}$$

<u>*Lause*</u>: Ominaisarvotehtävän (167) käänteinen vektori-iterointi johtaa alimpaan ominaispariin ja alimpaan ominaiskulmataajuuteen olipa aloitusvektori $\{\tilde{\phi}\}^0$ mikä muu tahansa kuin $[M]$-ortogonaalinen todelliselle ominaisvektorille $\{\phi\}_1$.

<u>*Todistus*</u>:
Koska ominaisvektori $\{\phi\}_i$ on vakiokertojaa vaille yksikäsitteinen, voidaan merkitä

$$\{\psi\}_i = \lambda_i \{\phi\}_i \tag{168}$$

jolloin yhtälö (167) menee muotoon

$$[K]\{\phi\}_i = [M]\{\psi\}_i \tag{169}$$

Valitaan lähtöestimaatti $\{\tilde{\phi}\}^0$ ja kirjoitetaan se ominaisvektoreiden virittämässä kannassa

$$\{\tilde{\phi}\}^0 = C_1\{\phi\}_1 + C_2\{\phi\}_2 + \cdots + C_n\{\phi\}_n \tag{170}$$

Normeerataan estimaatti $\{\tilde{\phi}\}^0$ alkion i suhteen

$$\{\underline{\tilde{\phi}}\}^0 = \frac{1}{\tilde{\phi}_i^0}\{\tilde{\phi}\}^0 \tag{171}$$

ja merkitään $\{\tilde{\psi}\}^0 = \{\underline{\tilde{\phi}}\}^0$ ja sijoitetaan se yhtälöön (169) :

$$[K]\{\tilde{\phi}\}^1 = [M]\{\tilde{\psi}\}^0 \tag{172}$$

missä $\{\tilde{\phi}\}^1$ on toistaiseksi tuntematon vektori, joka toteuttaa yhtälön (172). Yhtälöstä (172) ja (170) seuraa

$$[K]\{\tilde{\phi}\}^1 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0}[M]\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0}[M]\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0}[M]\{\phi\}_n$$

Yhtälön (167) perusteella

$$[K]\{\tilde{\phi}\}^1 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_1}[K]\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_2}[K]\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_n}[K]\{\phi\}_n \quad \Big| \cdot [K]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\}^1 = \frac{C_1}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_1}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_2}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\tilde{\phi}_i^0\lambda_n}\{\phi\}_n$$

Normeerataan

$$\{\underline{\tilde{\phi}}\}^1 = \frac{1}{\tilde{\phi}_i^1}\{\tilde{\phi}\}^1$$

ja merkitään $\{\tilde{\psi}\}^1 = \{\underline{\tilde{\phi}}\}^1$. Menettelemällä kuten edellä saadaan

$$\vdots$$

$$\{\tilde{\phi}\}^p = \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\lambda_1^p}\{\phi\}_1 + \frac{C_2}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\lambda_2^p}\{\phi\}_2 + \cdots + \frac{C_n}{\prod_{\nu=1}^{p-1}\tilde{\phi}_i^\nu\,\lambda_n^p}\{\phi\}_n$$

Koska $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, niin heti, kun p on "riittävän suuri", saadaan

$$\frac{1}{\lambda_1^p} \gg \frac{1}{\lambda_2^p} \gg \cdots \gg \frac{1}{\lambda_n^p} \tag{172}$$

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\}^p \approx \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p-1} \tilde{\phi}_i^\nu \lambda_1^p} \{\phi\}_1 \tag{173}$$

$$\Rightarrow \quad \{\underline{\tilde{\phi}}\}^p = \frac{1}{\tilde{\phi}_i^p} \{\tilde{\phi}\}^p = \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p} \tilde{\phi}_i^\nu \lambda_1^p} \{\phi\}_1 \tag{174}$$

$$\Rightarrow \quad \{\tilde{\phi}\}^{p+1} \approx \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p} \tilde{\phi}_i^\nu \lambda_1^{p+1}} \{\phi\}_1 \tag{175}$$

Yhtälöistä (174) & (175) seuraa komponentille i yhtälöt:

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p} \tilde{\phi}_i^\nu \lambda_1^p} \phi_{1i} \\ \tilde{\phi}_i^{p+1} &= \frac{C_1}{\prod_{\nu=1}^{p} \tilde{\phi}_i^\nu \lambda_1^{p+1}} \phi_{1i} \end{aligned} \right| :$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\phi}_i^{p+1} = \frac{1}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{p\to\infty} \tilde{\phi}_i^{p+1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\omega_1^2}} \tag{176}$$

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \{\tilde{\phi}\}^{p+1} = \{\phi\}_1} \tag{177}$$

□

Kuten aikaisemmin, voidaan osoittaa, että, jos $\{\tilde{\phi}\}^0$ on $[M]$-ortogonaalinen todellisen ominaisvektorin $\{\phi\}_1$ kanssa eli $\{\phi\}_1^T[M]\{\tilde{\phi}\}^0 = 0$, niin konvergointi tapahtuu kohti toista ominaisparia $(\lambda_2, \{\phi\}_2)$.

Käänteisen vektori-iteroinnin konvergenssia voidaan kiihdyttää suuresti käyttämällä jokaisen iterointikierroksen lopuksi RAYLEIGH-osamäärää seuraavasti: Kun iterointikierroksella saadaan $\tilde{\lambda}^k$ ja $\{\tilde{\phi}\}^k$, niin lasketaan RAYLEIGH-osamäärällä parannettu $\tilde{\tilde{\lambda}}^k$

$$\tilde{\tilde{\lambda}}^k = \frac{\{\tilde{\phi}\}^{k^T} [K] \{\tilde{\phi}\}^k}{\{\tilde{\phi}\}^{k^T} [M] \{\tilde{\phi}\}^k} \tag{174}$$

Ominaisvektoriestimaatti kannattaa vielä normeerata siten, että $\{\tilde{\phi}\}^{k^T}[M]\{\tilde{\phi}\}^k = 1$.

Tietokonelaskentaa varten edellä esitetty kahden matriisin käänteinen vektori-iterointi voidaan järjestää seuraavasti:

1. Valitaan alkuarvaus $\{\tilde{\phi}\}^{0} = \{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1\}$
2. Lasketaan $\{\tilde{y}\}^{0} = [M]\{\tilde{\phi}\}^{0}$

Muodostetaan jokaisella $k = 1,2,3,\dots$ seuraava laskenta:

1. $[K]\{\tilde{v}\}^{k+1} = \{\tilde{y}\}^{k} \Rightarrow \{\tilde{v}\}^{k+1} = [K]^{-1}\{\tilde{y}\}^{k}$
2. $\{\tilde{w}\}^{k+1} = [M]\{\tilde{v}\}^{k+1}$
3. $\rho(\{\tilde{v}\}_{k+1}) = \{\tilde{v}\}^{T}_{k+1}\{\tilde{y}\}_{k} / \{\tilde{v}\}^{T}_{k+1}\{\tilde{w}\}_{k+1}$ (RAYLEIGH-osamäärä)
4. $\{\tilde{y}\}_{k+1} = \{\tilde{w}\}_{k+1} / \sqrt{\{\tilde{v}\}^{T}_{k+1}\{\tilde{w}\}_{k+1}}$ (normeeraus)
5. jos $|\rho(\{\tilde{v}\}_{k+1}) - \rho(\{\tilde{v}\}_{k})| / \rho(\{\tilde{v}\}_{k+1}) > TOL$ niin palaa kohtaan 1, muuten
6. tulosta $\rho(\{\tilde{v}\}_{k+1})$ ja $\{\tilde{v}\}_{k+1}$

Jos käänteisessä vektori-iteroinnissa käytetään RAYLEIGH-osamäärää konvergointikriteerissä (kuten edellä esitettiin), niin iterointi pysäytettäessä ominaisarvo λ_1 saadaan $2s$ merkitsevällä numerolla ja $\{\phi\}_1$ on saatu s merkitsevällä numerolla. Keskeytyskriteerinä on tällöin pidetty $(\tilde{\lambda}_1^{k+1} \equiv \rho(\{\tilde{\phi}\}^{k+1}))$

$$\frac{|\tilde{\lambda}_1^{k+1} - \tilde{\lambda}_1^{k}|}{\tilde{\lambda}_1^{k+1}} \leqq 10^{-2s} \qquad (175)$$

Voidaan osoittaa (BATHE & WILSON, tai BATHE), että edellä esitetty käänteinen vektori-iterointi konvergoi RAYLEIGH-osamäärää käytettäessä <u>lineaarisesti ylhäältä</u> päin kohden ominaisarvoa λ_1 <u>konvergointinopeuden ollessa neliöllinen</u>. Konvergointinopeus on siis hyvä.

Konvergointinopeutta voidaan vielä tästäkin parantaa suorittamalla <u>origon siirto</u>!

Origon siirtoa käytetään hyväksi myös silloin, kun halutaan pyyhkiä laskennasta jo saatu (tai saadut) ominaispari.

Origon siirrolla päästään käsittelemään alkuperäisen ominaisongelman $[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$ asemasta ominaisongelmaa

$$[\hat{K}]\{\phi\} = \hat{\lambda}[M]\{\phi\} \qquad (176)$$

missä

$$[\hat{K}] = [K] - \mu[M]. \qquad (177)$$

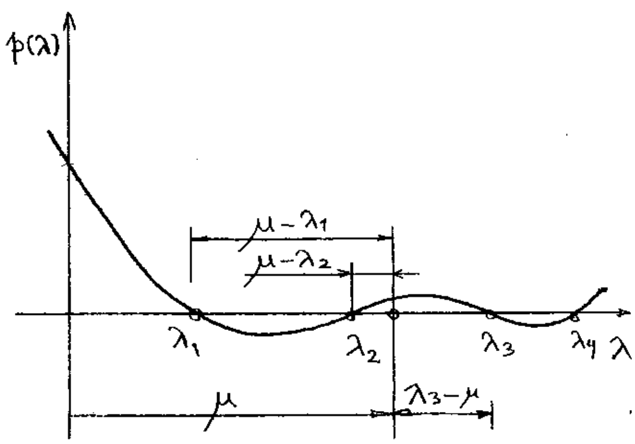
Ominaisarvotehtävällä (176) on samat ominaisvektorit kuin alkuperäisellä tehtävällä ja

$$\lambda_i = \hat{\lambda}_i + \mu \qquad (178)$$

Luku μ tarkoittaa ominaisarvoavaruuden origon siirtoa (vrt. kuva sivulla 45).
Voidaan osoittaa (BATHE), että käänteisessä vektori-iteroinnissa $\rho(\{\tilde{\phi}\}^{k+1})$ konvergoi lukuun $\lambda_j - \mu$, missä λ_j on lähinnä arvoa μ oleva ~~ratapuolinen~~ ominaisarvo. Lineaarisen konvergoinnin nopeus on suurempi luvuista

$$\left|\frac{\lambda_j-\mu}{\lambda_{j-1}-\mu}\right|^p \quad \text{tai} \quad \left|\frac{\lambda_j-\mu}{\lambda_{j+1}+\mu}\right|^p \qquad (179)$$

missä $p = 2$. Iterointivektori konvergoi vastaavasti ominaisvektoriin $\{\phi\}_j$ lineaarisesti nopeudella (179), missä $p = 1$.

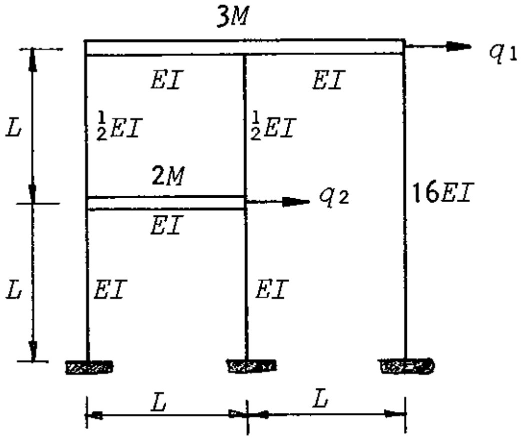


Kuva 27 Origon siirto kohtaan μ.

Kuvassa 27 on esitetty ominaisarvoavaruuden origon siirto μ ominaisarvon λ_2 viereen sen yläpuolelle. Kuvan esittämässä tapauksessa lineaarinen konvergointi ominaisvektoriin $\{\phi\}_2$ tapahtuu nopeudella

$$r = \frac{\mu - \lambda_2}{\mu - \lambda_1}$$

RAYLEIGH-osamäärä konvergoi arvoon $\hat{\lambda} = \lambda_2 - \mu$ lineaarisesti nopeudella r^2.
Käänteisessä vektori-iteroinnissa voidaan siis origon siirron μ avulla konvergointi järjestää mihin tahansa ominaispariin $(\lambda_j, \{\phi\}_j)$ ja miten suurella nopeudella tahansa, kunhan vain osataan valita sopiva siirto μ.



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan hallikehän ominaisvärähtelyjä. Määritä käänteisellä kahden matriisin vektori-iteroinnilla kehän ominaiskulmataajuudet ja ominaisvärähdysmuodot. Käytä origon siirtoa ylempien ominaisparien määrittämisessä.

RATKAISU:

$$[M] = M\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [K^*] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 17{,}20 & -11{,}87 \\ -11{,}87 & 32{,}21 \end{bmatrix}, \quad \frac{EI}{ML^3} = 1$$

Kahden matriisin käänteisen vektori-iteroinnin laskentakaava:

$$[K^*]\{\tilde{\phi}\}^{k+1} = [M]\{\tilde{\phi}\}^k$$

Valitaan, kuten ennen $\{\tilde{\phi}\}^0 = \{1 \quad 0{,}438\}$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^1 = [K^*]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}07797 & 0{,}02873 \\ 0{,}02873 & 0{,}04164 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}438 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}25908 \\ 0{,}1227 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4736 \end{bmatrix} \quad \text{(normeerattu)}$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^2 = [K^*]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}26112 \\ 0{,}12563 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4811 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^3 = [K^*]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}26156 \\ 0{,}12626 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4827 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^4 = [K^*]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^3 = \begin{bmatrix} 0{,}26165 \\ 0{,}12639 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix}$$

Valitaan $\{\tilde{\phi}\}^4 \approx \{\phi\}_1$ ja lasketaan $\tilde{\lambda}_1$ RAYLEIGH-osamäärällä

$$\lambda_1 = \frac{\{\phi\}_1^T[K^*]\{\phi\}_1}{\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1} = \frac{13{,}260}{3{,}4667} = 3{,}825$$

$$\omega_1^2 = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \approx 1{,}956\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}, \quad \{\phi\}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4831 \end{bmatrix}$$

Suoritetaan origon siirto μ. Jos siirretään $\mu = 5$ konvergointi tapahtuu kohti jo laskettua ominaisparia $(\lambda_1, \{\phi\}_1)$ (totea). Jos siirretään $\mu = 13$ konvergointi tapahtuu kyllä kohti toista ominaisparia $(\lambda_2, \{\phi\}_2)$, mutta konvergointi on laiska (totea).

(jatkoa)

Siirretään origo kohtaan $\mu = 20$. Tällöin

$$[\hat{K}^*] = [K^*] - \mu[M] = \begin{bmatrix} -42,80 & -11,87 \\ -11,87 & -7,79 \end{bmatrix} \Rightarrow [\hat{K}^*]^{-1} = \begin{bmatrix} -0,04047 & 0,06166 \\ 0,06166 & -0,2223 \end{bmatrix}$$

Valitaan aloitus: $\{\tilde{\phi}\}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$

$$\{\tilde{\phi}\}^1 = [\hat{K}^*]^{-1}[M]\{\tilde{\phi}\}^0 = [$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,0291 \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{\phi}\}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,0946 \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{\phi}\}^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,1028 \end{bmatrix}$$

$$\{\tilde{\phi}\}^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,1038 \end{bmatrix}$$

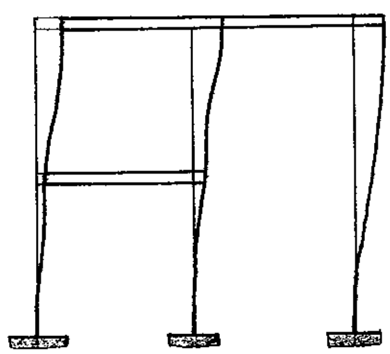
Valitaan $\{\phi\}_2 \approx \{\tilde{\phi}\}^5$ ja lasketaan $\hat{\lambda}_2$ RAYLEIGH-osamäärällä

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\{\phi\}_2^T [\hat{K}^*] \{\phi\}_2}{\{\phi\}_2^T [M] \{\phi\}_2} = \frac{-44,161}{22,267} = -1,9833$$

$$\lambda_2 = \hat{\lambda}_2 + \mu = 18,02$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 \Rightarrow \quad \omega_2 \approx 4,245\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \& \quad \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,104 \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

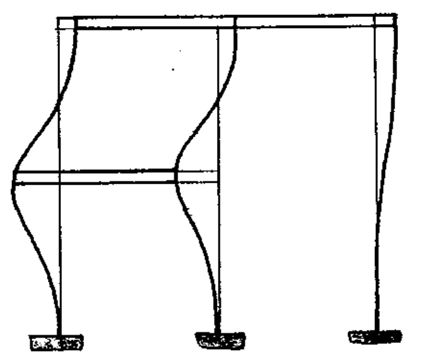
Piirretään rakenteen ominaismuodot:



1. ominaisvärähdysmuoto

$$\omega_1 = 1,956\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4831 \end{bmatrix}$$



2. ominaisvärähdysmuoto

$$\omega_2 = 4,245\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3,104 \end{bmatrix}$$

4.5.6 Myötäinen vektori-iterointi:

Myötäinen vektori-iterointi (forward iteration) on käänteisen vektori-iteroinnin (backward iteration) liittomenetelmä. Sen avulla saadaan ominaisongelman

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\} \quad , \lambda = \omega^2$$

ylimmän ominaisparin $(\lambda_n, \{\phi\}_n)$ likiarvot. Edellytyksenä on, että massamatriisi $[M]$ on positiivisesti definiitti eli jos käytetään keskitettyjä massamatriiseja, mikään M_{ii} ei saa olla nolla. Jos näin on, voidaan asia korjata origon siirrolla.
Myötäisen vektori-iteroinnin perusyhtälönä on

$$[M]\{\phi\} = \frac{1}{\lambda}[K]\{\phi\} \quad , \lambda = \omega^2 \tag{180}$$

Verrattuna käänteiseen iterointiin $[M]$ ja $[K]$ ovat vaihtaneet paikkaa ja λ on korvautunut luvulla $1/\lambda$. Tästä johtuu, että $\rho(\{\tilde{\phi}\}^k)$ konvergoi luvun $1/\lambda$ pienintä arvoa kohden eli lukua $1/\lambda_n$ kohden ja vektori $\{\tilde{\phi}\}^k$ vastaavasti ominaisvektoria $\{\phi\}_n$ kohden.
Käänteinen vektori-iterointi voidaan saada konvergoimaan mihin ominaispariin tahansa ja miten nopeasti tahansa valitsemalla origon siirto (shift) μ sopivasti. Näin ei ole myötäisen vektori-iteroinnin laita! Origon siirrosta riippuen se konvergoi joko ylimpään $(\lambda_n, \{\phi\}_n)$ tai alimpaan $(\lambda_1, \{\phi\}_1)$ ominaispariin eikä lineaarisen konvergoinnin nopeutta voi rajattomasti parantaa. Tästä johtuu, että <u>käänteinen vektori-iterointi on täysin syrjäyttänyt myötäisen</u> niissä sovellutuksissa, joissa vektori-iterointia käytetään.

4.5.7 RAYLEIGH-osamääräiterointi:

Jos käänteiseen vektori-iteraatioon liitetään <u>RAYLEIGHin osamäärään perustuva origon siirto $\mu = \rho(\{\tilde{\phi}\}^k)$ jokaisella iterointikierroksella</u>, saadaan menetelmä, jota sanotaan <u>RAYLEIGHin osamääräiteroinniksi</u>.

Tietokonelaskenta voidaan järjestää seuraavasti:

1. Valitaan aloitusvektori $\{\tilde{\phi}\}^0$
2. Lasketaan $\{\tilde{y}\}^0 = [M]\{\tilde{\phi}\}^0$
3. Lasketaan $\{\tilde{\phi}\}^1$ käänteisellä vektori-iteroinnilla siten, että $\{\tilde{\phi}\}^1 = [K]^{-1}\{\tilde{y}\}^0$
4. Asetetaan $\rho(\tilde{\lambda}^0) = 0$
   Lasketaan jokaisella iterointikierroksella $k=1,2,\ldots$
   1. $[\hat{K}] = [K] - \rho(\tilde{\lambda}^k)[M]$
   2. $[\hat{K}]\{\tilde{v}\}^{k+1} = \{\tilde{y}\}^k \Rightarrow \{\tilde{v}\}^{k+1} = [\hat{K}]^{-1}\{\tilde{y}\}^k$
   3. $\{\tilde{w}\}^{k+1} = [M]\{\tilde{v}\}^{k+1}$
   4. $\rho(\tilde{\lambda}^k) = \{\tilde{v}\}^T_{k+1}\{\tilde{y}\}^k / \{\tilde{v}\}^T_{k+1}\{\tilde{w}\}^{k+1} + \rho(\tilde{\lambda}^{k-1})$
   5. $\{\tilde{y}\}^{k+1} = \{\tilde{w}\}^{k+1} / \sqrt{\{\tilde{v}\}^T_{k+1}\{\tilde{w}\}_{k+1}}$
   6. Jos $|\rho(\tilde{\lambda}^k) - \rho(\tilde{\lambda}^{k-1})| / \rho(\tilde{\lambda}^k) > TOL$ palaa kohtaan 1
   7. Tulosta $\rho(\tilde{\lambda}^k)$, $\{\tilde{v}\}^{k+1}$

Etukäteen ei varmuudella tiedetä, mihin ominaispariin iterointi konvergoi. Se riippuu aloitusvektorista $\{\tilde{\phi}\}^0$ ja origon siirron aloitusarvosta μ. Jos $\{\tilde{\phi}\}^0$ on lähellä ominaisvektoria $\{\phi\}_k$ ja μ on riittävän lähellä vastaavaa ominaisarvoa λ_k, iterointi konvergoi kuutiollisella nopeudella ominaispariin $(\lambda_k, \{\phi\}_k)$. Jos "läheisyys" ei ole riittävä, tapahtuu konvergointi johonkin muuhun ominaispariin, mutta lopulta konvergointi on aina kuutiollinen! Konvergointinopeus on siis erinomainen.

Koska RAYLEIGHin osamääräiterointi voi periaatteessa konvergoida mihin ominaispariin tahansa, on siihen liitettävä jokin toinen menetelmä, joka takaa halutun ominaisparin. Eräs mahdollisuus on, jos halutaan alinta ominaisparia $(\lambda_1, \{\phi\}_1)$, käyttää ensin muutama iterointikierros käänteistä vektori-iterointia, niin että on saatu kohtalainen likiarvo tälle ominaisparille ja jatkaa sitten erittäin tehokkaalla RAYLEIGHin osamääräiteroinnilla. Lopuksi voidaan vielä suorittaa varmistus STURMin jonosäännöllä.

4.6 Suuret ominaisarvotehtävät:

4.6.1 Yleistä:

Edellä esiteltiin joitakin rakenteen dynamiikan ominaisvärähtelytehtävään liittyvän ominaisongelman ratkaisumenetelmiä. Valitettavasti yksikään niistä ei yksinään ole tehokas suuren ongelman ratkaisumenetelmä. Niistä yhdistämällä saadaan suuren ominaisongelman ratkaisumenetelmiä, joista tässä käsitellään seuraavat kaksi:

* determinantin hakumenetelmä (determinant search technique)
* aliavaruusiterointi (subspace iteration)

Useimmiten FEM-laskenta ei tarvitse ominaisongelman täydellistä ratkaisua, vaan alimmat ominaisparit riittävät. Niinpä ominaisongelmaa voidaankin pitää suurena, jos on huomattavasti halvempaa ratkaista vain ne ominaisparit, jotka todella tarvitaan kuin suorittaa täydellinen ratkaisu.
Sekä determinantin haku että aliavaruusiterointi ratkaisevat p kappaletta alimpia ominaispareja. Origon siirron avulla voidaan menetelmää soveltaa myös korkeampiin ominaispareihin.
Determinantin hakumenetelmä sopii parhaiten kapeanauhaisen systeemin keskusmuistiratkaisuun, mutta aliavaruusiterointi on tehokkaampi leveänauhaisen ongelman käsittelyssä. Kumpikin menetelmä on käytössä muun muassa SAP-ohjelmissa, EASE-ohjelmassa ja ADINA-ohjelmassa.

4.6.2 Determinantin hakumenetelmä:

Determinantin hakumenetelmä käyttää

* implisiittistä polynomi-iterointia (sekantti-iterointia),
* STURMin jonosääntöä,
* käänteistä vektori-iterointia ja
* GRAM-SCHMIDT ortogonalisointiprosessia.

Ensimmäisenä tavoitteena on löytää mahdollisimman taloudellisesti riittävän tarkka origon siirto μ ominaisarvon λ_1 lähelle. Tähän käytetään kiihdytettyä sekantti-iterointia.

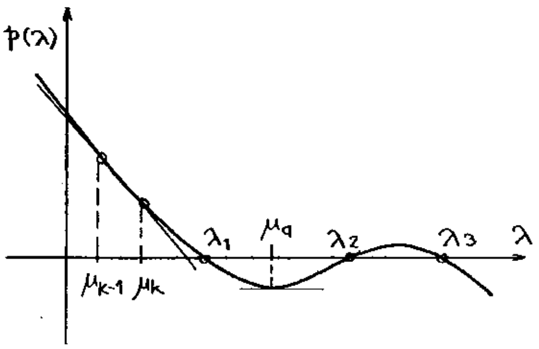
Kiihdytetyn sekantti-iteroinnin laskentakaava on

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \eta \cdot \frac{p(\mu_k)}{p(\mu_k) - p(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1}) \qquad (181)$$

Iterointi aloitetaan kahdella alalikiarvolla $\mu_1 < \mu_2 < \lambda_1$, joista $\mu_1 = 0$ ja μ_2 saadaan käänteisellä vektori-iteraatiolla käyttäen arvoa $\lambda = 0$. Jos $\{\tilde{\phi}\}_k$ on iterointivektori, joka on saatu k-1 iterointikierroksen jälkeen, käytetään arvoa

$$\mu_2 = (1 - 0{,}01) \frac{\{\tilde{\phi}\}_k^T [K] \{\tilde{\phi}\}_k}{\{\tilde{\phi}\}_k^T [M] \{\tilde{\phi}\}_k} \qquad (182)$$

Jos STURMin jonosäännön avulla todetaan, että $\mu_2 > \lambda_1$, jaetaan μ_2 luvulla $1+\gamma$, missä γ on negatiivisten pivot-lukujen lukumäärä. Jakoa jatketaan kunnes $\mu_2 < \lambda_1$.



Kuva 27 Karakteristinen polynomi $p(\lambda)$.

Iteroinnin kiihdytyskertoimeksi otetaan aluksi $\eta = 2$, sillä tiedetään, että tällöin saatu $\mu_{k+1} \leqq \mu_a$, missä μ_a vastaa polynomin $p(\lambda)$ alinta stationaarisyyskohtaa. Täten iterointi voi astua korkeintaan yhden juuren yli, kun $\eta = 2$. Tämä nähdään polynomin $p(\lambda)$ merkin muuttumisesta.

Kiihdytyskerroin η vielä kaksinkertaistetaan jokaisen sellaisen iteroinnin jälkeen, jolloin kaksi ensimmäistä merkitsevää numeroa säilytti arvonsa. STURMin avulla selvitetään, milloin iterointi ohittaa etsityn ominaisarvon λ_1. Tämä saattaa tapahtua, jos λ_1 on moninkertainen tai se kuuluu ominaisarvopilveen. Algoritmi ei voi hypätä kauaksi etsitystä juuresta.
Heti, kun algoritmi on ohittanut yhden tai useampia ominaisarvoja, siirrytään käänteiseen vektori-iterointiin, johon liittyy GRAM-SCHMIDT-ortogonalisointiprosessi aikaisemmin laskettujen ominaisvektorien suhteen, joita otetaan huomioon enintään kuusi. Ominaispilven tapauksessa voidaan saada ominaisarvo, joka on suurempi kuin μ_{k+1}. Tämä ei ole epäkohta, sillä pilvi on selvitettävä joka tapauksessa. STURMin jonosäännöllä hoidetaan, että kaikki halutut ominaisparit löytyvät joka tapauksessa.

Käänteinen vektori-iterointi ja GRAM-SCHMIDT-ortogonalisointi otetaan käyttöön myös, jos iteroinnin (181) antamilla kahdella peräkkäisellä arvolla on vähintään 6 yhteistä ensimmäistä merkitsevää numeroa.

Menetelmän tehokkuuden arvioimiseen antavat BATHE & WILSON seuraavat taulukot:

TABLE 12.1 SUMMARY OF DETERMINANT SEARCH SOLUTION

Operation	Calculation	Number of Operations: $m = m_K = m_M$	$m = m_K,\ m_M = 0$	$m = m_K = m_M,\quad m = m_K,\ m_M = 0$
Secant iteration	$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mu_k \mathbf{M}$	$n(m+1)$	n	
	$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	
	$p(\mu_k) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$	n	n	Using symmetry of matrices
Inverse iteration	$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y}_k$	$n(2m+1)$	$n(2m+1)$	
	$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$	$n(2m+1)$	n	
	$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \doteq \dfrac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{y}_k}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1}}$	$2n$	$2n$	$2n(m+1) + 9n \quad n(m+1) + 10n$
	$\mathbf{y}_{k+1} = \dfrac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \sum_{j=1}^{6} \alpha_{i-j}\bar{\boldsymbol{\phi}}_{i-j}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1})^{1/2}}$ where $\bar{\boldsymbol{\phi}}_j = \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_j,\ \alpha_j = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\boldsymbol{\phi}}_j$	$13n$	$13n$	(Algorithm has also been implemented as out-of core solver[7])
Error estimates	$\dfrac{\lVert \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l+1)}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} \rVert_2}{\lVert \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} \rVert_2}$	$2nm + 4n$	$5nm + 2n$	
Total for p lowest eigenvalues and associated eigenvectors assuming six secant and six inverse iterations per eigenpair		$(3nm^2 + 41nm + 118n)p$	$(2nm^2 + 26nm + 116n)p$	

TABLE 12.2 SOLUTION TIMES USING DETERMINANT SEARCH ALGORITHM

System	System Order	Maximum Half Bandwidth m_K	Mass Matrix	Number of Eigenpairs	Computer Used	Central Processor Seconds
Plane Frame	297	29	Diagonal	3	CDC 6400	40
Dam	226	68	Banded	7	CDC 6600	71
Building	340	31	Diagonal	7	CDC 6600	20
Piping System	566	11	Diagonal	7	CDC 6600	11
Arch Dam	417	23	Diagonal	30	CDC 6600	98

4.6.3 Aliavaruusiterointi:

Aliavaruusiteroinnin osamenetelminä ovat:

* RAYLEIGH-RITZin menetelmä
* Yleistetty JACOBIn menetelmä
* Sturmin jonosääntö

Menetelmän tavoitteena on määrittää suuren ominaistehtävän p alinta ominaisparia halutulla tarkkuudella. Menetelmän oleellisena pääpiirteenä on se, että siinä aluksi valitaan q kpletta toisistaan lineaarisesti riippumatonta n-ulotteista vektoria ja muodostetaan niistä $n*q$-aloitusmatriisi $[X]_1$ panemalla vektorit sen sarakkeiksi. Aloitusvektorit virittävät q-ulotteisen aliavaruuden $\mathbb{E}_1$. Aliavaruudesta $\mathbb{E}_1$ muodostetaan Rayleigh-Ritzin menetelmällä iteroiden uusia aliavaruuksia $\mathbb{E}_k$, $k=2,3,\ldots$ siten, että raja-arvona saadaan $\mathbb{E}_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_k$, joka sisältää ominaisongelman

$$[K]\{\phi\} = \lambda [M]\{\phi\}$$

q alinta ominaisvektoria. Jos aloitusvektorit jo virittävät aliavaruuden $\mathbb{E}_\infty$, avaruusiteroinnissa on vain yksi kierros. Aloitusvektorien ei tarvitse olla ominaisvektorien likiarvoja, vaan niille riittää kovasti, jos ne ovat aliavaruuden $\mathbb{E}_\infty$ vektoreita tai edes sellaisten likiarvoja. Tämä tekee menetelmästä tehokkaan.

Aliavaruudesta $\mathbb{E}_k$ iteroidaan aliavaruus $\mathbb{E}_{k+1}$ seuraavasti:

$$[K][\tilde{X}]_{k+1} = [M][X]_k \quad \Rightarrow \quad [\tilde{X}]_{k+1} = [K]^{-1}[M][X]_k \tag{183}$$

Matriisit $[K]$ ja $[M]$ projisioidaan kongruenssimuunnoksen avulla avaruuteen $\mathbb{E}_{k+1}$

$$\begin{aligned} [K]_{k+1} &= [\tilde{X}]_{k+1}^T [K][\tilde{X}]_{k+1} \\ [M]_{k+1} &= [\tilde{X}]_{k+1}^T [M][\tilde{X}]_{k+1} \end{aligned} \tag{184}$$

Tämän jälkeen ratkaistaan yleistetyllä JACOBIn menetelmällä aliavaruuden $\mathbb{E}_{k+1}$ ominaisongelman

$$[K]_{k+1}[Q]_{k+1} = [M]_{k+1}[Q]_{k+1}\lceil\lambda\rfloor_{k+1} \tag{185}$$

modaalimatriisi $[Q]_{k+1}$ ja spektrimatriisi $\lceil\lambda\rfloor_{k+1}$.

Tarkennetun aliavaruuden kanta on nyt

$$[X]_{k+1} = [\tilde{X}]_{k+1}\,[Q]_{k+1} \tag{186}$$

Tästä jatketaan takaisin kaavaan (183).
Voidaan osoittaa, että mikäli $[X]_1$ ei ole ortogonaalinen minkään halutun ominaisvektorin suhteen, niin

$$\lim_{k\to\infty} \lceil\Lambda\rfloor_{k+1} = \lceil\Lambda\rfloor \quad \& \quad \lim_{k\to\infty} [X]_{k+1} = [\Phi] \tag{187}$$

ESIMERKKI:
Määritä oheisen tehtävän kaksi alinta ominaisparia käyttämällä aliavaruusiterointia.

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

RATKAISU:

Valitaan 2-ulotteinen aliavaruus E_2 ja valitaan aloitusmatriisi

$$[X]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow [\tilde{X}]_2 = [K]^{-1}[M][X]_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/4 & 2/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$[K]_2 = [\tilde{X}]_2^T [K][\tilde{X}]_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[M]_2 = [\tilde{X}]_2^T [M][\tilde{X}]_2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

(185) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}[Q]_2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}[Q]_2\lceil\Lambda\rfloor_2$$

Tästä ratkaistaan yleistetyllä JACOBin menetelmällä

$$\lceil\Lambda\rfloor_2 = \begin{vmatrix} 2 & \\ & 4 \end{vmatrix} \quad \& \quad [Q]_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

(186) $\Rightarrow$

$$[X]_2 = [\tilde{X}]_2[Q]_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2 \\ 1/\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [\tilde{X}]_3 = [K]^{-1}[M][X]_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Siis $[X]_2$ sisälsi jo tarkat ominaisvektorit $\{\phi\}_1$ ja $\{\phi\}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \quad \& \quad \begin{aligned} \{\phi\}_1 &= \{1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2}\} \\ \{\phi\}_2 &= \{-1 \;\; 0 \;\; 1\} \end{aligned}$$

Jos laskettavien ominaisparien lukumäärä on p, valitaan yleensä konvergoinnin nopeuttamiseksi $q > p$. BATHE suosittelee kokemukseen perustuen

$$q = \min(2p,\ p+8) \tag{188}$$

Moninkertaiset ominaisarvot eivät hidasta konvergointia, mikäli $\lambda_{q+1} > \lambda_p$. Oheinen taulukko kertonee jotakin menetelmän tehokkuudesta.

TABLE 12.3 Summary of Subspace Iteration Solution

Operation	Calculation	Number of Operations: $m = m_K = m_M$	Number of Operations: $m = m_K,\ m_M = 0$	Required Storage
Factorization of K	$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	
Subspace iteration	$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{Y}_k$	$nq(2m+1)$	$nq(2m+1)$	Algorithm is effectively implemented as out-of-core solver
	$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{Y}_k$	$\frac{1}{2}nq(q+1)$	$\frac{1}{2}nq(q+1)$	
	$\bar{\mathbf{Y}}_{k+1} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{X}}_{k+1}$	$nq(2m+1)$	nq	
	$\mathbf{M}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{Y}}_{k+1}$	$\frac{1}{2}nq(q+1)$	$\frac{1}{2}nq(q+1)$	
	$\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{\Omega}_{k+1}^2$	$O(q^3)$ neglected		
	$\mathbf{Y}_{k+1} = \bar{\mathbf{Y}}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}$	nq^2	nq^2	
Sturm sequence check	$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$	$n(m+1)$	n	
	$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nm$	
Error estimates	$\dfrac{\lVert \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l+1)}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} \rVert_2}{\lVert \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} \rVert_2}$	$2nm + 4n$	$5nm + 2n$	
Total for solution of p lowest eigenvalues and associated eigenvectors, assuming that ten iterations are required and $q = \min\{2p, p+8\}$		$nm^2 + nm(4+2p) + 4np + 20nq(2m + q + \frac{3}{2})$	$nm^2 + nm(3+5p) + 2np + 20nq(m + q + \frac{3}{2})$	

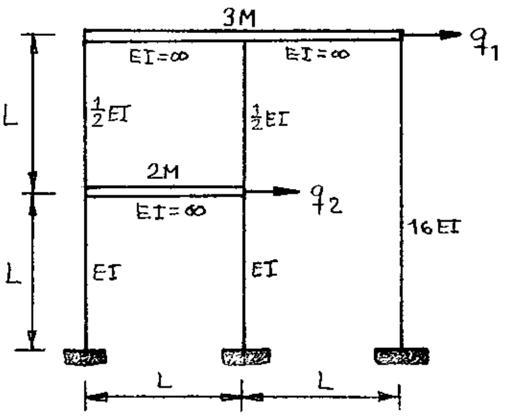
TABLE 12.4 Solution Times Using the Subspace Iteration Method

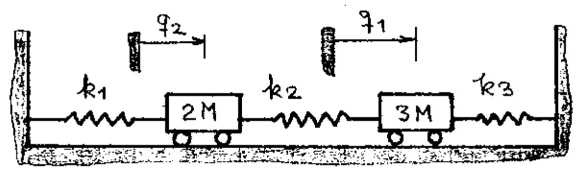
System	System Order	Maximum Half Bandwidth m_K	Mass Matrix	Number of Eigenpairs	Computer Used	Central Processor Seconds
3-Dimensional Building Frame	468	155	Diagonal	4	CDC 6400	160
Piping System	566	11	Diagonal	28	CDC 6600	142
Reactor Building with Foundation	1174	137	Diagonal	45	CDC 6600	890
Dam	2916	491	Diagonal	4	CDC 7600	495
Windtunnel	5952	215	Diagonal	10	CDC 7600	1000

4.7 OMINAISVÄRÄHTELYSOVELLUTUKSIA:

4.7.1 Kehärakenteen jousi-massa-analogia:

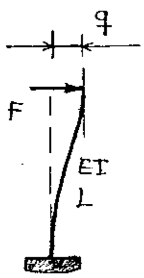
Aikaisemmin, erityisesti käsilaskennan aikana, rakenteen värähtelydynamiikan tehtävä pelkistettiin niin sanotuksi jousi-massa-analogiaksi:





Rakennuksen jousi-massa-analogia muodostetaan siten, että ensin massa diskretisoidaan ylä- ja välipohjiin. Siirtymäkoordinaateiksi valitaan näiden ylä- ja välipohjien translaatiosiirtymät. Ajatellaan, että ylä- ja välipohjat ovat hyvin taivutusjäykkiä, niin että rotaatiot kehän nurkissa eivät pääse tapahtumaan.

Tällöin värähtelevä rakennus voidaan pelkistää kuvan "ekvivalenttiseksi" jousi-massasysteemiksi. Jousi-massa-systeemin liikeyhtälöt muodostetaan NEWTONin yhtälöillä:



$$F = kq$$

$$k = 12\,\frac{EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow$$

$$k_1 = 2\cdot k = 24\,\frac{EI}{L^3} \equiv K$$

$$k_2 = 2\cdot 12\cdot\frac{\frac{1}{2}EI}{L^3} = \frac{1}{2}K$$

$$k_3 = 12\cdot\frac{16EI}{(2L)^3} = K$$

$$\to\ 3M\ddot{q}_1 = k_2(q_2-q_1) - k_3 q_1$$

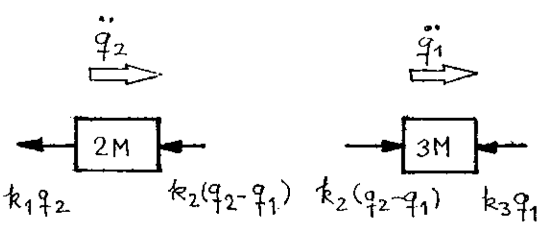
$$\to\ 2M\ddot{q}_2 = -k_1 q_2 - k_2(q_2-q_1)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3M\ddot{q}_1 + (k_2+k_3)q_1 - k_2 q_2 \\ 2M\ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_1+k_2)q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2+k_3 & -k_2 \\ -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K/2 & -K/2 \\ -K/2 & 3K/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rakenteen ominaisvärähtelyn tulokseksi saadaan

$$\omega_1 = 3{,}04\sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \quad \& \quad \omega_2 = 4{,}55\sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

Tuloksia voidaan nyt verrata aikaisemmin jäykkyysjakautuman kannalta tarkalla kehäteorialla saatuihin tuloksiin, jolloin vaakapalkkien taivutusjäykkyydeksi otettiin EI :

	jousi-massa-analogia	tarkka jäykkyysjakauma
$\omega_1/\sqrt{EI/ML^3}$	3,04	1,956
$\omega_2/\sqrt{EI/ML^3}$	4,55	4,245

Jousi-massa-analogia pitää systeemiä jäykempänä kuin systeemin todellinen jäykkyysjakautuma edellyttäisi.

Tarkastellaan vielä HURTY & RUBINSTEINin esittelemää 19-kerroksisen rakennuksen ominaisvärähtelylaskelmaa, jossa jousi-massa-analogian (tapaus a) tuloksia verrataan tuloksiin, joissa jäykkyysominaisuudet on otettu huomioon tarkemmin.
Tulosten mukaan jousi-massa-analogia antaa varsin kehnoja tuloksia ja siitä onkin syytä (uopua nykyään FEM-aikakaudella!

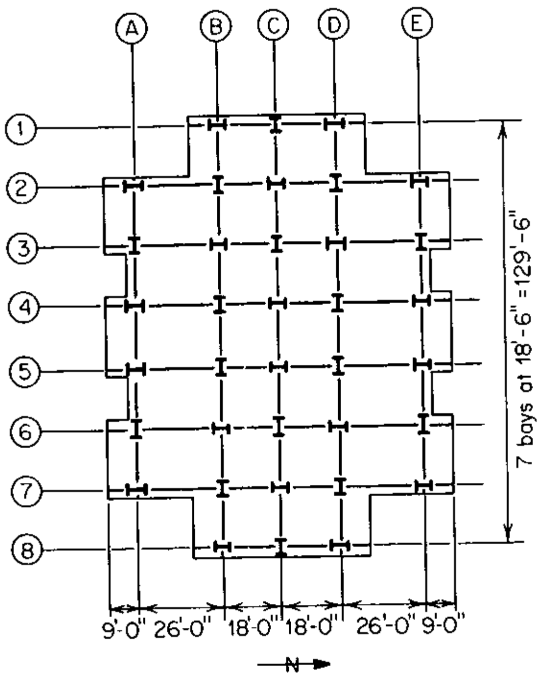


Figure 12.2 Floor plan of a multi-story framed structure.

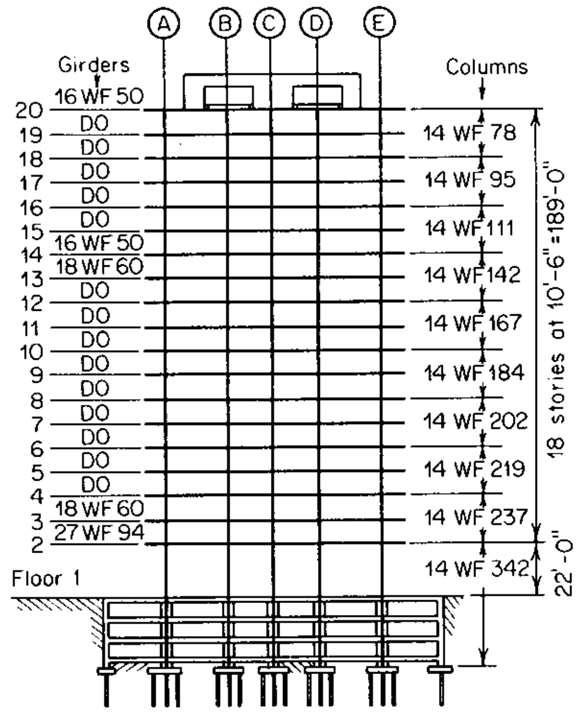


Figure 12.3 Schematic elevation showing column and girder sections of a multi-story framed structure.

$$[m] = m_{\text{typical floor}} \begin{bmatrix} 1.5 & & & & & \\ & 1 & & & \text{elements not shown are zero} & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1.5 \end{bmatrix}$$

Case a. No joint rotation takes place.
Case b. All joints within a floor (for all frames) undergo an equal rotation.
Case c. All joints of a given type frame within a floor undergo an equal rotation.
Case d. No restriction is placed on joint rotation.

TABLE 12.1 FREQUENCIES AND FREQUENCY RATIOS FOR THE STRUCTURE OF FIGS. 12.2 AND 12.3

Mode Number	Frequencies (Radians per Second)				Frequency Ratios		
	ω_a Case *a*	ω_b Case *b*	ω_c Case *c*	ω_d Case *d*	$\frac{\omega_a}{\omega_d}$	$\frac{\omega_b}{\omega_d}$	$\frac{\omega_c}{\omega_d}$
1	3.85	1.93	1.93	1.84	2.09	1.05	1.05
2	9.90	5.29	5.27	5.00	1.98	1.06	1.05
3	16.73	9.07	9.06	8.55	1.96	1.06	1.06
4	23.70	12.83	12.80	12.10	1.96	1.06	1.06
5	30.85	16.82	16.76	15.91	1.94	1.06	1.05
6	38.15	21.33	21.30	20.28	1.88	1.05	1.05
7	45.15	26.00	25.99	24.86	1.82	1.05	1.05
8	51.70	31.50	31.48	30.25	1.71	1.04	1.04
9	56.90	37.38	37.30	35.93	1.58	1.04	1.04
10	63.75	43.50	43.35	42.00	1.52	1.03	1.03

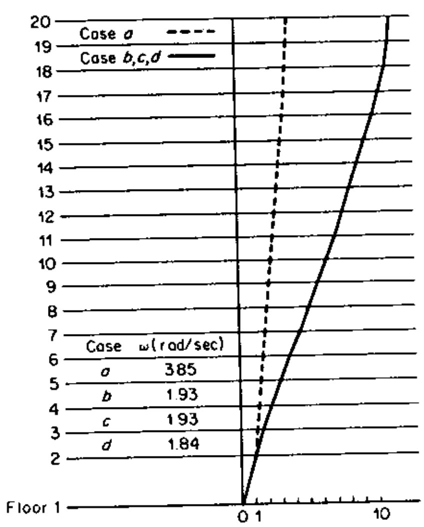


Figure 12.4 First mode shapes for the structure of Figs. 12.2, 12.3.

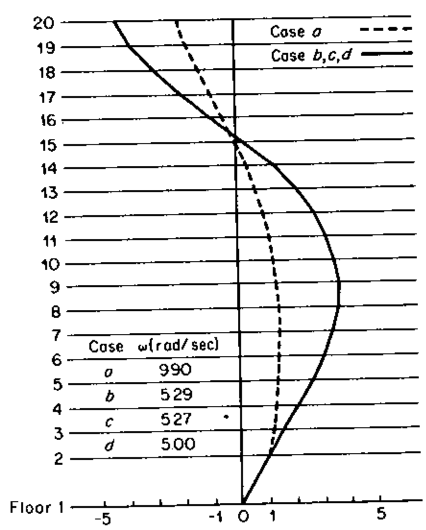


Figure 12.5 Second mode shapes for the structure of Figs. 12.2, 12.3.

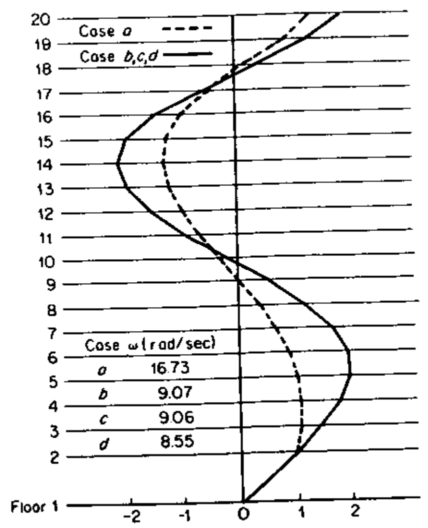
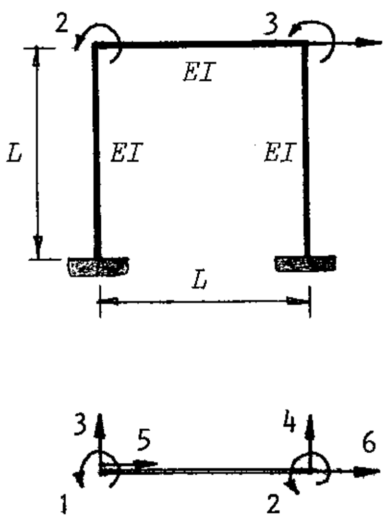


Figure 12.6 Third shapes for the structure of Figs. 12.2, 12.3.

6.7.2 HINTON-SURANA-massamatriisin käyttö:

Kuten sivulla 35 oli esillä, staattiseen siirtymämalliin perustuva konsistentti massamatriisi $[M]_C$ ei antanut aivan hyviä tuloksia. Toisaalta keskitetyn matriisin $[M]_L$ käytölle olisi suuri houkutus yksinkertaisuuden takia.
HINTON (v. 1976) ja SURANA (v. 1978) esittävät ohjeen, jolla molempien matriisien hyvät puolet saataisiin yhdistettyä. Tarkastellaan esimerkin puitteissa tätä asiaa:



ESIMERKKI:
Määritä kuvan kehän ominaiskulmataajuudet käyttämällä *HINTON-SURANA*-massamatriisia. Vertaa tuloksia keskitetyllä ja konsistentilla massamatriisilla saatuihin tuloksiin sekä tarkkoihin tuloksiin.

RATKAISU:
Konsistentin massamatriisin lävistäjätermit ovat

$$\lceil m \rfloor_C = \frac{\rho A L}{420} \lceil 4L^2 \; 4L^2 \; 156 \; 156 \; 140 \; 140 \rfloor$$

$$\lceil m \rfloor_L = \rho A L \lceil 0 \; 0 \; 1/2 \; 1/2 \; 1/2 \; 1/2 \rfloor$$

Hinton-Surana massamatriisin $\lceil m \rfloor_{HS}$ konstruointi:

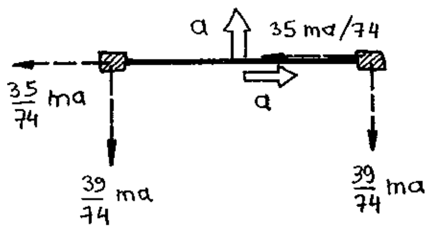
1. Lasketaan keskitetyn massamatriisin jälki: $m_L = 4 \cdot \frac{1}{2} \rho A L = 2 \rho A L$
2. Lasketaan konsistentin massamatriisin translaatiovapausasteisiin liittyvät lävistäjätermit yhteen:
$$m_T = 2 \cdot \left(\frac{156+140}{420} \right) = \frac{148}{105} \Rightarrow \mu = \frac{m_L}{m_T} = \frac{2 \cdot 105}{148} = \frac{105}{74}$$
3. Muunnetaan konsistentin massamatriisin kaikki lävistäjätermit kertomalla ne suhteella μ.
4. Muodostetaan näin saaduista lävistäjäalkioista lävistäjämatriisi $\lceil m \rfloor_{HS}$:

$$\lceil m \rfloor_{HS} = \frac{\rho A L}{420} \lceil 4L^2\mu \; 4L^2\mu \; 156\mu \; 156\mu \; 140\mu \; 140\mu \rfloor$$

$\Rightarrow$

$$\lceil m \rfloor_{HS} = \frac{\rho A L}{74} \lceil L^2 \; L^2 \; 39 \; 39 \; 35 \; 35 \rfloor$$

(jatkuu)



HINTON–SURANA-massamatriisin käytöllä pystytään antamaan palkin jäykän kpleen translaatiokiihtyvyyteen liittyvän hitausvoiman vain keskimäärin oikein, sillä

$$\uparrow \quad H_1 = 2 \cdot \frac{39}{74} ma = \frac{78}{74} ma > ma$$

$$\rightarrow \quad H_2 = 2 \cdot \frac{35}{74} ma = \frac{70}{74} ma < ma$$

Koko rakenteen HINTON–SURANA-massamatriisiksi seuraa

$$[M] = \frac{\rho A L}{74} \begin{bmatrix} 2\cdot 39 + 2\cdot 35 & 0 & 0 \\ & 2\cdot L^2 & 0 \\ \text{SYM.} & & 2\cdot L^2 \end{bmatrix} , \quad [K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -6L & -6L \\ & 8L^2 & 2L^2 \\ \text{SYM.} & & 8L^2 \end{bmatrix}$$

Käytetään kahden matriisin vektori-iterointia ja terästetään laskentaa RAYLEIGH-osamäärällä. Siirretään origo muuttamalla alkukierroksella RAYLEIGH-osamäärän antaman tuloksen kohdalle.

$$[K]\{\tilde{\phi}\}^{k+1} = [M]\{\tilde{\phi}\}^k \quad \& \quad \tilde{\lambda}^k = \frac{\{\tilde{\phi}\}^T [K] \{\tilde{\phi}\}}{\{\tilde{\phi}\}^T [M] \{\tilde{\phi}\}} , \quad \lambda = \omega^2$$

$EI/\rho A L^4 = 1$

Aloitusvektori: $\{\tilde{\phi}\}^0 = \{1 \quad 1/L \quad 1/L\}$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}703435 \\ 0{,}43778/L \\ 0{,}43778/L \end{bmatrix} , \quad \tilde{\lambda}^1 = 8{,}3179 \Rightarrow \mu = \tilde{\lambda}^1 , \quad [\hat{K}] = [K] - \mu [M]$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^2 = \begin{bmatrix} -0{,}70353 \\ -0{,}43179/L \\ -0{,}43179/L \end{bmatrix} , \quad \tilde{\lambda}^2 = 8{,}3172 \Rightarrow \mu = \tilde{\lambda}^2 , \quad [\hat{K}] = [K] - \mu [M]$$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^3 = \begin{bmatrix} 0{,}70353 \\ 0{,}43183/L \\ 0{,}43183/L \end{bmatrix} , \quad \tilde{\lambda}^3 = 8{,}3172$$

$$\Rightarrow \omega_1 \approx 2{,}8840 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} , \quad \{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}61381/L \\ 0{,}61381/L \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

Siirretään origo kohtaan $\mu = 2000$ ja käytetään aloitusvektoria $\{\tilde{\phi}\}^0 = \{0 \quad 1 \quad -1\}$:

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}30116/L \\ 4{,}30116/L \end{bmatrix} , \quad \tilde{\lambda}^1 = 222 \Rightarrow \mu = \tilde{\lambda}^1 , \quad [\hat{K}] = [K] - \mu [M]$$

(jatkuu)

(jatkoa)

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}30116/L \\ 4{,}30116/L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\lambda}^2 = 222$$

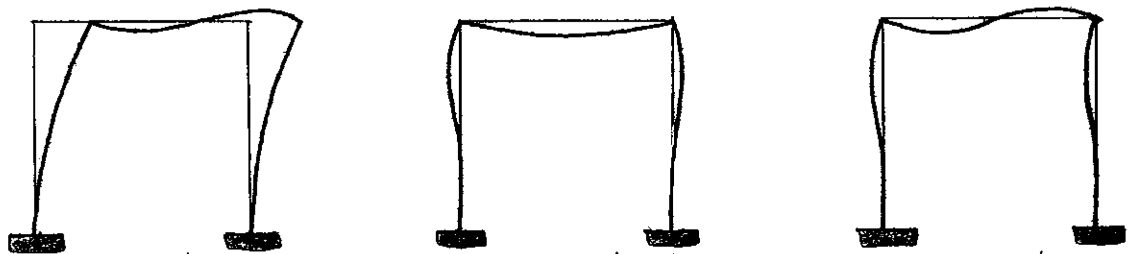
$$\Rightarrow \omega_2 \approx 14{,}900 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}, \quad \{\phi\}_2 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

Siirretään origo kohtaan $\mu = 400$ ja käytetään aloitusvektoria $\{\tilde{\phi}\}^0 = \{1 \quad 1 \quad 1\}$

$$\Rightarrow \{\tilde{\phi}\}^1 = \begin{bmatrix} -0{,}46697 \\ -3{,}22984/L \\ -3{,}22984/L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\lambda}^1 = 177{,}67, \text{ jne} \ldots \quad \tilde{\lambda}^4 = 373{,}68$$

$$\{\tilde{\phi}\}^4 = \{0{,}079922 \quad -4{,}27943/L \quad -4{,}27943/L\}$$

$$\Rightarrow \omega_3 \approx 19{,}331 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}, \quad \{\phi\}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -60{,}280/L \\ -60{,}280/L \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$



	HINTON-SURANA-massamatriisi	Konsistentti massamatriisi	Keskitetty massamatriisi	Tarkka ratkaisu
$\omega_1/\sqrt{EI/\rho AL^4}$	2,884	3,2104	2,8983	3,2045
$\omega_2/\sqrt{EI/\rho AL^4}$	14,900	15,1358	∞	12,645
$\omega_3/\sqrt{EI/\rho AL^4}$	19,331	32,682	∞	20,621

Konsistentin ja keskitetyn massamatriisin tapaukset lasketaan harjoitustehtävänä ja tarkka ratkaisu myöhemmin. Taulukon tulokset osoittavat, että keskitetty massamatriisi ja HINTON-SURANA-massamatriisi häviävät kirkkaasti konsistentille massamatriisille alinta ominaiskulmataajuutta laskettaessa, mutta ylempiä ominaiskulmataajuuksia laskettaessa HINTON-SURANA-massamatriisi on paras!

6.7.3 *RAYLEIGH*-osamäärä ja *RAYLEIGH-RITZ*in menetelmä:

Määritellään konservatiivisen mekaanisen systeemin __Hamiltonin funktio__

$$\mathcal{H} = T + V \tag{189}$$

missä T on liike-energia ja V potentiaalienergia. Vapaasti värähtelevän systeemin potentiaalienergia on kimmoenergiaa U. Hamiltonin funktio esittää siis mekaanisen systeemin energiatasetta.
Koska konservatiivisen systeemin mekaaninen energia säilyy, niin

$$\delta\mathcal{H} = \delta T + \delta V = 0 \tag{190}$$

Vapaasti värähtelevän systeemin ääriasemassa systeemin

$$T = 0 \quad \& \quad U = U_{max} \tag{191}$$

Kun systeemi ohittaa tasapainoasemansa (ja potentiaalienergian nollataso on valittu sopivasti), niin

$$T = T_{max} \quad \& \quad U = 0 \tag{192}$$

Soveltamalla yhtälöä (189) saadaan

$$0 + U_{max} = T_{max} + 0 \quad \Rightarrow \quad U_{max} = T_{max} \tag{193}$$

Harmonisessa värähdysliikkeessä systeemin siirtymät ovat muotoa

$$\begin{aligned} & q(t) = \hat{q}\,\sin(\omega t + \psi) \\ \Rightarrow \quad & \dot{q}(t) = \hat{q}\,\omega\,\cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \tag{194}$$

Koska liike-energia T on verrannollinen nopeuden neliöön, niin harmonisessa värähdysliikkeessä se on verrannollinen värähdysliikkeen taajuuden neliöön ω^2, joten

$$T_{max} = \mathcal{A}\,\omega^2 \tag{195}$$

missä $\mathcal{A}$ on systeemin massajakautumasta ja värähtelymuodosta riippuva verrannollisuuskerroin. Myös U_{max} riippuu jäykkyysjakautumasta ja värähtelymuodosta. Siis

$$T_{max} = \mathcal{A}\omega^2 = U_{max} \tag{196}$$

josta seuraa

$$\boxed{\omega^2 = \frac{U_{max}}{\mathcal{A}}} \tag{197}$$

Tulos (197) on eräs muoto RAYLEIGH-osamäärästä. Se esittää yhteyden systeemin värähtelytaajuuden ω ja värähtelymuotojen välillä. RAYLEIGHin periaate tekee osamäärän (197) hyvin käyttökelpoiseksi, sillä sen mukaan värähtelytaajuus ω^2 on stationaarinen vastaavan värähtelymuodon läheisyydessä.

Tarkastellaan palkin vapaita värähtelyjä. Merkitään palkin kimmoviivaa

$$w(x,t) = q(t)\,N(x) \tag{198}$$

$$\begin{cases} q(t) = \hat{q}\sin(\omega t+\varphi) \\ \dot{q}(t) = \hat{q}\,\omega\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

Ääriasemassa

$$\dot{q}(t_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega t_1+\varphi) = 0 \\ \sin(\omega t_1+\varphi) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\, w''^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\hat{q}\int_0^L EI\, N''^2\,dx \tag{199}$$

Kun systeemi ohittaa tasapainoasemansa, niin

$$q(t_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t_0+\varphi) = 0 \\ \cos(\omega t_0+\varphi) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L m\,\dot{w}^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\hat{q}\,\omega^2\int_0^L m\,N^2\,dx \tag{200}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\hat{q}\int_0^L m N^2\,dx \tag{201}$$

Palkin Rayleigh-osamääräksi seuraa

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x)\,N''^2(x)\,dx}{\int_0^L m(x)\,N^2(x)\,dx}} \tag{202}$$

Edellä on kimmoenergia U lausekkeessa otettu huomioon vain taivutusenergia.

Jos otetaan useampia kinemaattisesti luvallisia muotofunktioita $N_i(x)$, niin

$$w(x,t) = N_1(x)\,q_1(t) + \dots + N_p(x)\,q_p(t) = \sum_{i=1}^{p} N_i(x)\,q_i(t) \tag{203}$$

tai matriisimuodossa

$$w(x,t) = [N]\{q\} \quad \Rightarrow \quad \dot{w}(x,t) = [N]\{\dot{q}\} \tag{204}$$

$$\begin{cases} q_i(t) = \hat{q}_i \sin(\omega t + \psi) \\ \dot{q}_i(t) = \hat{q}_i\, \omega \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \tag{205}$$

$\Rightarrow$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\, w''^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L EI\, w''^T w''\, dx$$

$\Rightarrow$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\{\hat{q}\}^T \int_0^L [N_{,xx}]^T EI\, [N_{,xx}]\, dx\, \{\hat{q}\} \tag{206}$$

$$[K] \equiv \int_0^L [N_{,xx}]^T EI(x)\, [N_{,xx}]\, dx \tag{207}$$

$\Rightarrow$

$$U_{max} = \frac{1}{2}\{\hat{q}\}^T [K]\{\hat{q}\} \tag{208}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L m\, \dot{w}^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L m\, \dot{w}^T \dot{w}\, dx$$

$\Rightarrow$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \{\hat{q}\}^T \int_0^L [N]^T m\, [N]\, dx\, \{\hat{q}\} \tag{209}$$

$$[M] \equiv \int_0^L [N]^T m(x)\, [N]\, dx \tag{210}$$

$\Rightarrow$

$$T_{max} = \frac{1}{2}\{\hat{q}\}^T [M]\{\hat{q}\}\, \omega^2 \equiv \mathcal{A}\, \omega^2 \tag{211}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\{\hat{q}\}^T [K]\{\hat{q}\}}{\{\hat{q}\}^T [M]\{\hat{q}\}}} \tag{212}$$

Näin päädyttiin aikaisemmasta tuttuun RAYLEIGH-osamäärään! Amplitudit $\{\hat{q}\}$ vastaavat ominaisvärähtelyn ominaisvektorin $\{\phi\}$ komponentteja toisin sanoen $\{\hat{q}\} \equiv \{\phi\}$.
Se, että käytettiin useita muotofunktioita, merkitsee, että tämä menetelmä on <u>RAYLEIGH-RITZin menetelmä</u>. Tästä meillä oli esimerkki kehärakenteelle sivulla 26.

<u>Yleisesti</u>: RAYLEIGH-RITZin menetelmä

Valitaan estimointi

$$\{\tilde{\phi}\} = [N]\{C\} \tag{1}$$

missä $[N]$ on interpolaatiomatriisi ja $\{C\}$ yleistettyjen koordinaattien vektori. Silloin

$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\{C\} \equiv [B]\{C\} \tag{2}$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \tag{3}$$

ja jäykkyys- ja massamatriisi ovat

$$[K] = \iiint_V [B]^T[E][B]\, dV \tag{4}$$

$$[M] = \iiint_V [N]^T \rho [N]\, dV \tag{5}$$

Koska RAYLEIGH-osamäärä

$$\omega^2 = \frac{\{C\}^T[K]\{C\}}{\{C\}^T[M]\{C\}} \tag{6}$$

on <u>stationaarinen</u>, niin

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial\{C\}} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\{C\}^T[M]\{C\}[K]\{C\} - \{C\}^T[K]\{C\}[M]\{C\}}{(\{C\}^T[M]\{C\})^2} = \{0\} \tag{7}$$

yhtälön (6) mukaan

$$\{C\}^T[K]\{C\} = \omega^2\{C\}^T[M]\{C\} \tag{8}$$

joten

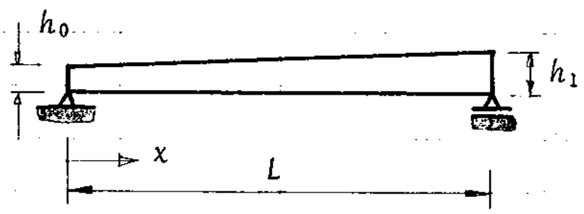
$$\frac{\{C\}^T[M]\{C\}[K]\{C\} - \omega^2\{C\}^T[M]\{C\}[M]\{C\}}{(\{C\}^T[M]\{C\})^2} = \{0\} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{\{C\}^T[M]\{C\}}([K]\{C\} - \omega^2[M]\{C\})}{(\{C\}^T[M]\{C\})^{\cancel{2}}} = \{0\} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad [K]\{C\} - \omega^2[M]\{C\} = \{0\} \tag{11}$$

mikä on <u>kahden matriisin ominaisarvoyhtälö</u>!

ESIMERKKI:



Tarkastellaan kuvan homogeenista palkkia, jonka korkeus muuttuu lineaarisesti. Palkin poikkileikkaus on suorakaide, jonka leveys on vakio b ja tiheys ρ. Määritä *Rayleigh-osamäärällä* ylärajaestimaatti palkin alimmalle ominaiskulmataajuudelle valitsemalla muotofunktioestimaatiksi tasapaksun palkin omasta painovoimasta johtuva staattinen taipumaviiva. $h_1 = 1{,}5\,h_0$

RATKAISU:

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L}x = h_0\left[1 + \left(\frac{h_1 - h_0}{h_0}\right)\frac{x}{L}\right]$$

Annettu: $h_1 = 1{,}50\,h_0 \Rightarrow h(x) = h_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)$

$$\Rightarrow \quad m(x) = \rho A = \rho b h = \rho b h_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)$$

$$EI(x) = \frac{1}{12}Ebh^3 = \frac{Ebh_0^3}{12}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)^3$$

Tasapaksun palkin omasta painovoimasta johtuva staattinen taipumaviiva on

$$\phi_1(x) = \frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \int_0^L m(x)\,\phi_1^2(x)\,dx = \rho b h_0 \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad m_{11} = \frac{31}{105}\rho b h_0 L$$

$$k_{11} = \int_0^L EI(x)\,\phi_{1,xx}^2(x)\,dx \,, \qquad \phi_{1,x} = \frac{1}{L} - 6\frac{x^2}{L^3} + 4\frac{x^3}{L^4}$$

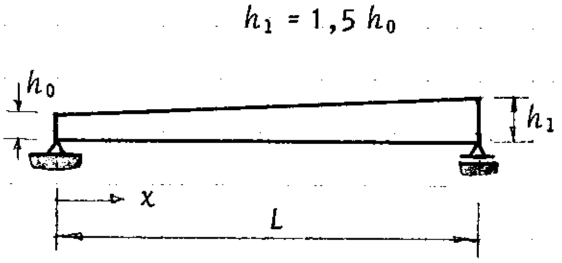
$$\phi_{1,xx} = -12\frac{x}{L^3} + 12\frac{x^2}{L^4}$$

$$\Rightarrow \quad k_{11} = 12\,Ebh_0^3 \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)^3\left(-\frac{x}{L^3} + \frac{x^2}{L^4}\right)^2 dx = \frac{89}{112}Ebh_0^2/L^2$$

Rayleigh-osamäärä:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^L EI(x)\,\phi_{1,xx}^2\,dx}{\int_0^L m(x)\,\phi_1^2\,dx} = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{89\,Ebh_0^2/112\,L^2}{31\rho b h_0 L/504} = \frac{89\cdot 63}{31\cdot 14}\,\frac{Eh_0}{\rho L^3}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 \leqq \tilde{\omega}_1 \approx 3{,}594\sqrt{\frac{Eh_0}{\rho L^3}}$$



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan homogeenista palkkia, jonka korkeus muuttuu lineaarisesti. Palkin poikkileikkaus on suorakaide, jonka leveys on b ja tiheys ρ. Määritä *Rayleigh-osamäärällä* palkin alimman ominaiskulmataajuuden ylärajaestimaatti valitsemalla muotoestimaatiksi $\phi_1 = \sin(\pi x/L)$

RATKAISU:

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L}x = h_0\left[1 + \left(\frac{h_1-h_0}{h_0}\right)\frac{x}{L}\right]$$

Annettu: $h_1 = 1{,}50\,h_0 \Rightarrow h(x) = h_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)$

$$\Rightarrow m(x) = \rho A = \rho b h = \rho b h_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)$$

$$EI(x) = \frac{1}{12}Ebh^3 = \frac{Ebh_0^3}{12}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\phi_1(x) = \sin(\pi x/L) \quad , \quad m_{11} = \int_0^L m(x)\,\phi_1^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow m_{11} = \rho b h_0 \int_0^L \left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)\sin^2\frac{\pi x}{L}\,dx = \rho b h_0\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{4}\right) = \frac{5}{8}\rho b h_0 L$$

$$\phi_{1,xx} = -\frac{\pi^2}{L^2}\sin(\pi x/L) \quad , \quad k_{11} = \int_0^L EI(x)\,\phi_{1,xx}^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow k_{11} = \frac{Ebh_0^3}{12}\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L \left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{L}\right)^3\sin^2(\pi x/L)\,dx$$

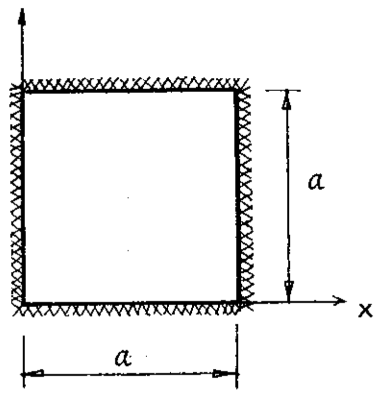
$$= \frac{Ebh_0^3}{12}\frac{\pi^4}{L^4}\left(\frac{L}{2} + \frac{3}{2}\frac{L}{4} + \frac{3}{4}\cdot 0{,}14134L + \frac{1}{8}\cdot 0{,}010876L\right) = 8{,}0522\,\frac{Ebh_0^3}{L^3}$$

Rayleigh-osamäärä:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\int_0^L EI(x)\,\phi_{1,xx}^2\,dx}{\int_0^L m(x)\,\phi_1^2\,dx} = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{8{,}0522\,Ebh_0^3/L^3}{5/8\cdot\rho b h_0 L} \approx 12{,}884\,\frac{Eh_0^2}{\rho L^4}$$

$$\Rightarrow \omega_1 \leq \tilde{\omega}_1 \approx 3{,}589\sqrt{\frac{Eh_0^2}{\rho L^4}}$$ ◄

Jos valitaan kaksi muotofunktioestimaattia $\phi_1 = \sin(\pi x/L)$ ja $\phi_2 = \sin(2\pi x/L)$, niin tulos paranisi arvoon $3{,}516\sqrt{Eh_0^2/\rho L^4}$



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan tasapaksua ja homogeenista neliölaattaa, jonka paksuus on h ja $\nu = 0$. Laatta on jäykästi tuettu kaikilta reunoiltaan. Määritä laatan alimmalle ominaiskulmataajuudelle ylärajaestimaatti käyttäen *Rayleigh-osamäärää* ja muotoestimaattina kinemaattiset reunaehdot täyttävää funktiota

$$N(x,y) = x^2(a-x)^2y^2(a-y)^2$$

RATKAISU:

Kinemaattiset reunaehdot $N(0,y) = N(a,y) = N(x,0) = N(x,a) = 0$ ja $N_{,x}(0,y) = N_{,x}(a,y) = N_{,y}(x,0) = N_{,y}(x,a) = 0$ toteutuvat.

$$m_{11} = \iint_A \rho h\, N_1^2(x,y)\, dA \,, \quad k_{11} \overset{\nu=0}{=} \iint_A D[(N_{1,xx}+N_{1,yy})^2-(2N_{1,xx}N_{1,yy}-2N_{1,xy}^2)]\,dA$$

$\Rightarrow$

$$m_{11} = \rho h \int_0^a x^4(a-x)^4 \int_0^a y^4(a-y)^4\, dx\,dy = \rho h \left(\int_0^a x^4(a-x)^4\, dx\right)^2 = \rho h \left(\frac{a^9}{630}\right)^2$$

$$N_{1,x} = 2x(a-x)(a-2x)y^2(a-y)^2$$

$$N_{1,xx} = 2(a^2-6ax+6x^2)\,y^2(a-y)^2$$

$$N_{1,yy} = 2x^2(a-x)^2(a^2-6ay+6y^2)$$

$$N_{1,xy} = 4xy(a-x)(a-2x)(a-y)(a-2y)$$

$\Rightarrow$

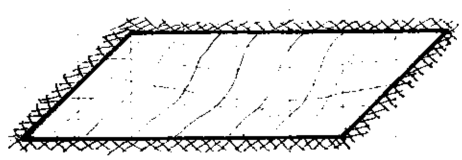
$$k_{11} = D\int_0^a\int_0^a [N_{1,xx}^2 + N_{1,yy}^2 + 2N_{1,xy}^2]\,dx\,dy$$

$$= D\left[\frac{2}{1575}a^{14} + \frac{2}{1575}a^{14} + \frac{8}{11025}a^{14}\right] = \frac{36}{11025}Da^{14}$$

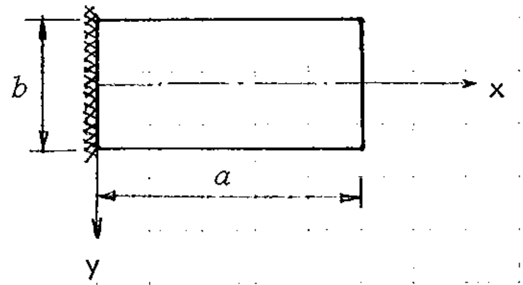
Rayleigh-osamäärä:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{36\,Da^{14}/105^2}{\rho h a^{18}/630^2} = 36^2\frac{D}{\rho h a^4}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1 \approx 36\sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}$$



Ottamalla useita muotoestimaatteja, voidaan ylärajaa tarkentaa. Osoittautuu (Warburton), että saatu tulos on noin 0,06 % liian suuri!



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan tasapaksua ja homogeenistą ulokelaattaa. Määritä sen taivutusvärähtelyjen kaksi alinta ominaiskulmataajuutta *RAYLEIGH-RITZ*in menetelmällä käyttäen muotofunktioestimaatteina funktioita

$$\phi_1(x,y) = x^2 \quad , \quad \phi_2(x,y) = x^3$$

RATKAISU:

Kimmoenergian U lauseke on

$$U = \frac{1}{2}\iint_A D((w_{,xx}+w_{,yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{,xx}w_{,yy}-w_{,xy}^2))\,dA$$

$$w(x,y) = \sum_i C_i\phi_i(x,y) = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 = C_1x^2 + C_2x^3$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\iint_A D\,w_{,xx}^2\,dA = \frac{D}{2}\iint_A (C_1^2\phi_1''^2 + 2C_1C_2\phi_1''\phi_2'' + C_2^2\phi_2''^2)\,dA$$

$$\phi_1'' = 2 \quad , \quad \phi_2'' = 6x$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{Db}{2}\int_{x=0}^{a}(4C_1^2 + 24C_1C_2x + 36x^2)\,dx = \frac{Db}{2}(4aC_1^2 + 12a^2C_1C_2 + 12a^3C_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\iint_A \rho h\dot{w}^2\,dA \quad , \quad w(x,y,t) = w(x,y)e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{w} = i\omega w e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\rho hb}{2}\int_{x=0}^{a} -\omega^2(C_1^2\phi_1^2 + 2C_1C_2\phi_1\phi_2 + C_2^2\phi_2^2)\,dx$$

$$= -\frac{\rho hb\omega^2}{2}\int_{x=0}^{a}(C_1^2x^4 + 2C_1C_2x^5 + C_2^2x^6)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad T = -\frac{\rho bh\omega^2}{2}\left(\frac{a^5}{5}C_1^2 + \frac{a^6}{3}C_1C_2 + \frac{a^7}{7}C_2^2\right)$$

Hamiltonin funktio $\mathcal{H} = T+V$. Ritzin yhtälöt saadaan, kun

$$\delta\mathcal{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta T + \delta V = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\rho bh\omega^2}{2}\left[\left(\frac{a^5}{5}\cdot 2C_1 + \frac{a^6}{3}C_2\right)\delta C_1 + \left(\frac{a^7}{7}\cdot 2C_2 + \frac{a^6}{3}C_1\right)\delta C_2\right] +$$

$$+ \frac{Db}{2}\left[(4a\cdot 2C_1 + 12a^2C_2)\delta C_1 + (12a^2C_1 + 12a^3\cdot 2C_2)\delta C_2\right] = 0$$

merk. $\lambda = \frac{D}{\rho h\omega^2}$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(-\frac{2a^4}{5} + 8\lambda\right)C_1 + \left(-\frac{1}{3}a^5 + 12a\lambda\right)C_2\right]\delta C_1 + \left[\left(-\frac{a^5}{3} + 12a\lambda\right)C_1 + \left(-\frac{2}{7}a^6 + 24a^2\lambda\right)C_2\right]\delta C_2 = 0$$

(jatkuu)

Yhtälö toteutuu mielivaltaisilla δc_1, δc_2

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{2a^4}{5}+8\lambda\right)c_1 + \left(-\frac{1}{3}a^5+12a\lambda\right)c_2 = 0 \\ \left(-\frac{1}{3}a^5+12a\lambda\right)c_1 + \left(-\frac{2}{7}a^6+24a^2\lambda\right)c_2 = 0 \end{cases}$$

Vaaditaan epätriviaaliratkaisu:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{5}a^4+8\lambda & -\frac{1}{3}a^5+12a\lambda \\ -\frac{1}{3}a^5+12a\lambda & -\frac{2}{7}a^6+24a^2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 48\lambda^2 - \frac{136}{35}a^4\lambda + \frac{1}{9\cdot 35}a^8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 0{,}0809524\, a^4\lambda + 0{,}0000661376\, a^8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} 0{,}080127\ a^4 \\ 0{,}0008254\ a^4 \end{cases} \quad , \ \lambda = \frac{D}{\rho h\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 \approx 3{,}5327\sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}$$

$$\omega_2 \approx 34{,}81\sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}}$$

Liessa (Samuel K. Clark, Dynamics of Continuous Elements, Prentice-Hall, Inc., N.J., 1972, sivu 176) on saanut käyttämällä useampia muotofunktioestimaatteja tulokset:

$a/b = 1/2$ $\qquad \omega_1 = 3{,}508\sqrt{D/\rho h a^4}$

$a/b = 2$ $\qquad \omega_1 = 3{,}472\sqrt{D/\rho h a^4}$

$a/b = 5$ $\qquad \omega_1 = 3{,}450\sqrt{D/\rho h a^4}$

5 VAIMENNUS

5.1 Vaimennuksen lajit:

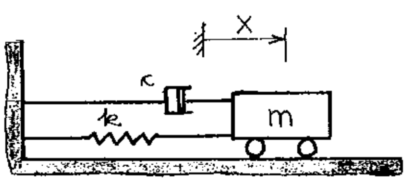
Värähtelevän systeemin vaimennus aiheuttaa systeemin mekaanisen energian "kulumista" (dissipoitumista), josta syystä värähtelyn amplitudi vaimenee ja värähtely lopulta häviää. Vaimennusvoimien fysikaalinen ja matemaattinen kuvaaminen ei ole alkuunkaan niin yksinkertaista kuin kimmovoimien tai hitausvoimien. Vaimennusvoimat voivat johtua värähtelevästä systeemistä itsestään ja vielä systeemin ympäristöstä. Vaimennus jaetaan tavallisesti:

* viskoosi vaimennus
* rakenteellinen vaimennus
* Coulombinen vaimennus
* Negatiivinen vaimennus

Viskoosin vaimennuksen vaimennusvoima on verrannollinen värähtelevän systeemin partikkelien nopeuteen. Verrannollisuus voi olla lineaarista tai epälineaarista. Lineaarinen viskoosi vaimennusvoima

$$F_{Dj} = c_j \dot{u}_j \quad , \; j = 1,2,\dots,n \qquad (213)$$

missä c_j on vaimennusvakio. Suurilla nopeuksilla ilmanvastus on esimerkki epälineaarisesta vaimennuksesta, usein ilmanvastuksen oletetaan olevan verrannollinen liikkuvan kpleen nopeuden neliöön. Lineaarinen viskoosi vaimennus pienentää vapaan värähtelyn amplitudia eksponentiaalisesti ajan funktiona.



Tarkastellaan kertauksena 1-vapausasteen systeemin (kuva 28) vaimennettuja värähtelyjä. Systeemin liikeyhtälö on

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (214)$$

Muunnetaan liikeyhtälö standardimuotoon merkinnöin

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega \quad , \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_k} \qquad (215)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0} \qquad (216)$$

Riippuen siitä, onko suhteellinen vaimennuskerroin ξ pienempi, yhtäsuuri, vai suurempi kuin yksi, värähtely vaimenee

* alikriittisesti $\xi < 1$
* kriittisesti $\xi = 1$
* ylikriittisesti $\xi > 1$

Rakenteellinen vaimennus johtuu rakenteen materiaalipartikkelien sisäisestä kitkasta tai rakenteen liitososien kitkasta. Vaimennusvoima on funktio rakenteen muodonmuutoksista ja siirtymistä. Kimmoisen systeemin rakenteellinen vaimennusvoima on kokemuksen mukaan verrannollinen rakenteen kimmovoimiin F_{Ej} ja on vastakkainen rakenteen materiaalipartikkelin nopeudelle $\dot{u}_j$. Matemaattisesti nämä huomiot voidaan esittää seuraavasti:

$$F_{Dj} = ig F_{Ej} = ig(-k_j u_j) = -ig k_j u_j \tag{217}$$

missä g on vakio ja $i = \sqrt{-1}$. Helposti nähdään, että F_{Dj} on vastakkainen nopeudelle $\dot{u}_j$, sillä harmonisessa värähdysliikkeessä

$$u_j = \hat{u}_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_j = i\omega \hat{u}_j e^{i\omega t} = i\omega u_j \tag{218}$$

$$\Rightarrow \quad F_{Dj} = -ig k_j u_j = -ig k_j \frac{\dot{u}_j}{i\omega} = -\frac{g k_j}{\omega} \dot{u}_j \qquad \square$$

Coulombinen vaimennus eli kuivien pintojen kitka johtuu kappaleiden liikkeestä toisiinsa nähden, jos näiden kappaleiden välinen kitkaliitos luistaa. Kitkavoimaa pidetään likimain vakiona ja sen suuruus on

$$F_D = \mu N \tag{219}$$

missä μ on kitkakerroin ja N kpleiden liitoksen normaalivoima. Coulombinen kitkavoima pienentää värähtelyn amplitudia lineaarisesti ajan mukana.

Negatiivinen vaimennus johtuu siitä, että ulkoinen kuormitus syöttää systeemiin enemmän energiaa kuin vaimennus pystyy sitä "kuluttamaan". Negatiivinen vaimennus kasvattaa värähtelyn amplitudia eksponentiaalisesti ajan mukana.

5.2 Lineaarinen viskoosi vaimennus:

5.2.1 Suhteellinen vaimennus:

Viskoosin vaimennuksen matriisi yritetään tavallisesti kytkeä suoraan mittaustuloksiin. Tämä tapahtuu monellakin eri tavalla riippuen siitä, mitä ratkaisumenetelmää käytetään perusyhtälön

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q(t)\} \tag{220}$$

ratkaisemiseen.

Vaimennus voidaan ottaa aina vain likimääräisesti huomioon. Niinpä sen vaikutus pyritään ottamaan huomioon siten, että sen karakteristiset piirteet säilyvät, mutta että samalla sen mukaan ottaminen ei mutkistaisi matemaattista käsittelyä.

Normaalimuotomenetelmässä (vrt. myöhemmin) käytetään usein niin sanottua suhteellista vaimennusta (proportional damping), jolloin

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = 2\omega_i \zeta_i \delta_{ij} \tag{221}$$

missä $\{\phi\}_i$ ja $\{\phi\}_j$ ovat ominaiskulmataajuuksia ω_i ja ω_j vastaavat ominaisvektorit, ζ_i on ominaismuodon i suhteellinen vaimennuskerroin ja KRONECKERin delta δ_{ij} tekee matriisin (221) lävistäjämuotoon.

Liikeyhtälöt pääkoordinaatistossa ovat tällöin

$$\{\ddot{\eta}\} + 2\lceil \omega\zeta \rfloor \{\dot{\eta}\} + \lceil \Lambda \rfloor \{\eta\} = \lceil \mathcal{M} \rfloor^{-1} \{\mathcal{F}(t)\} \tag{222}$$

missä

$$\lceil \omega\zeta \rfloor = \lceil \omega_1\zeta_1 \;\; \omega_2\zeta_2 \;\; \cdots \;\; \omega_n\zeta_n \rfloor \tag{223}$$

$$\lceil \Lambda \rfloor = \lceil \omega_1^2 \;\; \omega_2^2 \;\; \cdots \;\; \omega_n^2 \rfloor \tag{224}$$

Suhteellista vaimennusta käyttämällä saatiin se matemaattinen etu, että liikeyhtälöt pääkoordinaatistossa (222) ovat edelleen separoituneet toinen toisistaan. Lisäksi liittämällä mittaustulokset ζ_i kunkin ominaismuodon vaimenemiseen saadaan mitattavalle suureelle järkevä fysikaalinen sisältö.

5.2.2 RAYLEIGH-vaimennus:

Välittömän integroinnin menetelmissä käytetään viskoosina vaimennusmallina usein niin sanottua <u>RAYLEIGHin vaimennusta</u>, jolloin oletetaan, että

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \tag{225}$$

missä α ja β ovat tiettyjä vaimennuskertoimia. Ne voidaan laskea, jos tunnetaan suhteellisen vaimennuksen kertoimet ζ_i kahdella eri ominaiskulmataajuudella ω_i. Menetelmä on likimääräinen, sillä suhteellisen vaimennuksen ja RAYLEIGHin vaimennuksen vaimennusmallit ovat täysin erilaiset.

<u>ESIMERKKI:</u>
Tarkastellaan usean vapausasteen systeemiä, jonka alimmat ominaiskulmataajuudet ovat $\omega_1 = 2$ ja $\omega_2 = 3$. Kahteen alimpaan muotoon liittyvät suhteelliset vaimennuskertoimet ovat $\zeta_1 = 0{,}02$ ja $\zeta_2 = 0{,}10$. Määritä RAYLEIGH-vaimennuksen kertoimet α ja β.
<u>RATKAISU:</u>

$\omega_1 = 2$, $\zeta_1 = 0{,}02$
$\omega_2 = 3$, $\zeta_2 = 0{,}10$

RAYLEIGHin vaimennus $[C] = \alpha [M] + \beta [K]$ (1)

Suhteellinen vaimennus $\{\phi\}_i^T (\alpha [M] + \beta [K]) \{\phi\}_i = 2 \zeta_i \omega_i$ (2)

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta \omega_i^2 = 2 \zeta_i \omega_i \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cdot 2^2 = 2 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \\ \alpha + \beta \cdot 3^2 = 2 \cdot 0{,}10 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -0{,}336 \\ \beta = 0{,}104 \end{cases} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad [C] = -0{,}336 [M] + 0{,}104 [K] \tag{5}$$

Yhtälön (3) perusteella voidaan nyt määrittää muut suhteellisen vaimennuksen kertoimet, kun ominaiskulmataajuudet ω_i tunnetaan:

$$\zeta_i = \frac{-0{,}336 + 0{,}104\, \omega_i^2}{2 \omega_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Sivuilla 98 ja 99 on malliksi erään suuren tietokoneohjelman ANSYS manuaalista vaimennusta koskeva osa.

98

69

chielman ANSYS manuaalista

31 DAMPING CHARACTERISTICS

Damping may be imposed upon the dynamic structural response by several methods: form mass damping, uniform structural damping, material dependent structural ping, and damping elements. "Numerical damping" induced by the numerical (1) egration procedure used in the Transient Dynamic analyses is discussed in Section 4. Multiple damping specifications on the same element are additive. For the ear Transient Dynamic (KAN=5) analysis, KAY(1) must equal zero, and for the structure (KAN=7) analysis, KAY(6) must equal three if any form of damping is sent.

31.1 Uniform Mass and Structural Damping

The viscous damping matrix [C] may be given by:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

re [M] is the mass matrix and [K] is the stiffness matrix. In this form, which is o known as Rayleigh damping (Refs. 13 and 14), α and β are constants to be ermined from two given damping ratios that correspond to two unequal frequencies of ration. For the Nonlinear Transient Dynamic (KAN=4) analysis, damping matrices are med at the element level and assembled into the structure triangularized matrix. the reduced analyses (Linear Transient (KAN=5), Harmonic Response (KAN=6), and structure (KAN=7)), damping matrices are formed at the element level and assembled o a reduced overall damping matrix. Much of the experimental data on damping perties consists of ratios, ξ_i, of actual damping to critical damping for a ticular mode of vibration, i. If a natural frequency, ω_i, and a modal damping io, ξ_i, are selected, α and β should satisfy the following relation:

$$\xi_i = \alpha/2\omega_i + \beta\omega_i/2$$

values of α and β are input (as decimal numbers) for ALPHAD and BETAD, pectively. Typical damping ratios (ξ) range from 1% to 3% for suspension-bridge e structures, 3%-4% in steel-frame type structures, and up to 7% in concrete uctures. !

For the extreme case of rigid body damping, such as a structure immersed in a cous fluid, $\beta=0$ and $\alpha=2\xi_i\omega_i$. Since only a single value is permitted for HAD, the user may want to select the most dominant natural frequency for the putation of α. Higher frequencies will be damped less and lower frequencies will damped more as shown in Figure 2.31.1. For the more usual case of only structural ping, $\alpha=0$ and $\beta=2\xi_i/\omega_i$ (or $\beta=\xi_i/\pi f_i$, where $\omega_i=2\pi f_i$).

in, since only a single value of BETAD is permitted, the user must select the most inant natural frequency for the computation of β. Higher frequencies will be ped more and lower frequencies will be damped less.

Figure 2.31.1 also shows that while both damping terms are strong functions of quency, their sum is nearly constant over the frequency range where the terms ersect. For a given damping ratio (ξ) and a frequency range (f_1 to f_2), equations can be solved simultaneously for the values of α and β.

31.2 Material Dependent Structural Damping

The damping coefficient β may be applied as a material dependent property instead

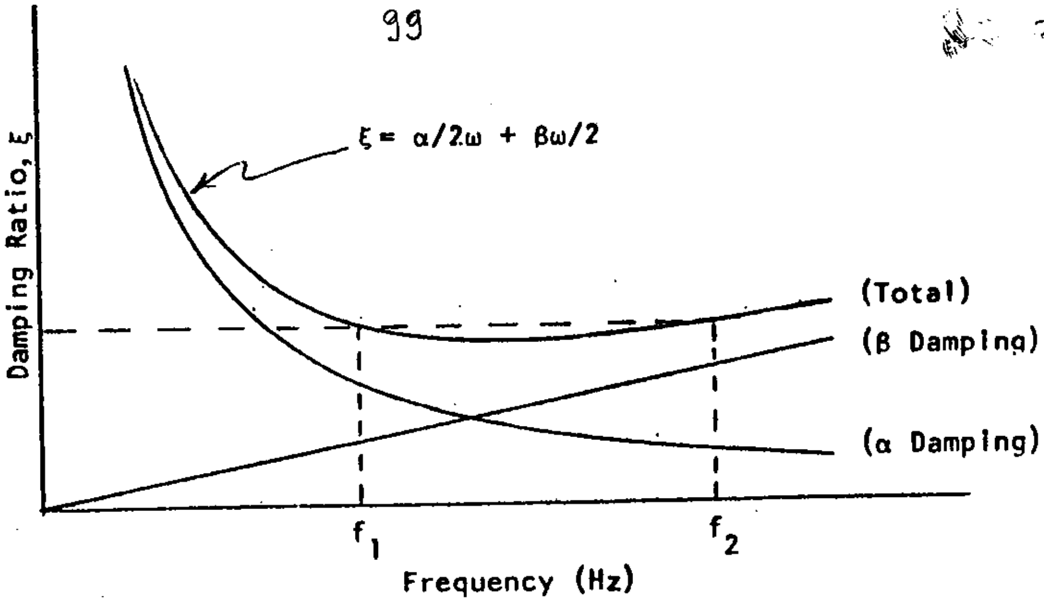


Figure 2.31.1 Mixed Damping

of uniformly to the structure. This requires entering the coefficient as the mat property DAMP. This property is available as an option for all structural elemen and is not shown in the material property list for individual elements.

2.31.3 Damping Elements

The most versatile method of introducing damping into a structural system is defining elements having damping characteristics. These elements include STIF14 (Spring-Damper), STIF27 (Damping Matrix), STIF40 (Combination Element), and STIF5 (Superelement).

5.3 Rakenteellinen vaimennus:

Rakenteellinen vaimennus otetaan liikeyhtälöitä muodostettaessa huomioon seuraavasti:

$$\{Q_D\} = +ig\{Q_E\} = -ig[K]\{q\} \qquad (226)$$

jolloin on oletettu, että kaikkien vaimennusvoimakomponenttien verrannollisuuskerroin g on sama vakio. Liikeyhtälöstä

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q_{ek}\} \quad , \quad \{Q_{ek}\} = \{Q_D\} + \{Q\} \qquad (227)$$

seuraa

$$\boxed{[M]\{\ddot{q}\} + (1+ig)[K]\{q\} = \{Q\}} \qquad (228)$$

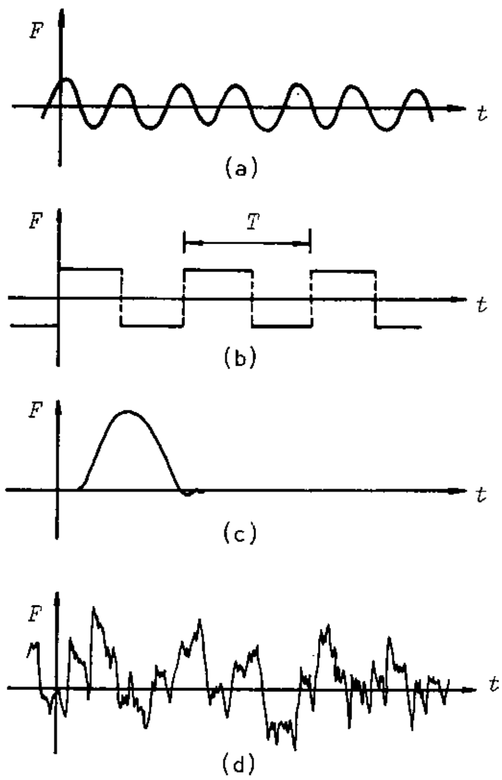
Rakenteellisen vaimennuksen kertoimia g ei tunneta kovin hyvin. Yleensä voidaan käyttää arvoja $g = 0 \dots 0{,}10$.

6 RAKENTEIDEN DYNAAMINEN VASTE

6.1 Kuormituksen eli herätteen lajit:

Värähtelyanalyysissä herätteet (dynaamiset kuormitukset) luokitellaan usein seuraavasti:

* DETERMINISTISET HERÄTTEET:
  1. Jaksolliset herätteet
     - harmoninen heräte (kuva 28 a)
     - epäharmoninen heräte (kuva 28 b)
  2. Jaksoton heräte (kuva 28 c)
* EPÄDETERMINISTISET HERÄTTEET (kuva 28 d)



<u>Kuva 28</u> Herätteen lajit.

Deterministisen herätteen funktiolaki $F: t \rightarrow F(t)$ tunnetaan täsmällisesti jokaisena tarkasteltavan aikavälin hetkenä, kun taas epädeterministisen herätteen luonne on <u>stokastinen</u>. Epädeterministisen herätteen ja sen aiheuttaman vasteen ominaisuuksia pyritään kuvaamaan <u>todennäköisyyslaskennan</u> keinoin. Kuvassa 28 d on erään epädeterministisen herätteen havaintotulos (record of random time funktion).

Epädeterministisen herätteen alaisia systeemeitä ovat esimerkiksi turbulenttisten virtausten rasittamat lentokoneet, avaruusalukset ja kantosiipialukset sekä maanjäristyksen, liikennetärinän ja tuulikuormitusten alaiset sillat ja rakennukset.

Tässä esityksessä rajoitutaan <u>determinististiin herätteisiin</u>.

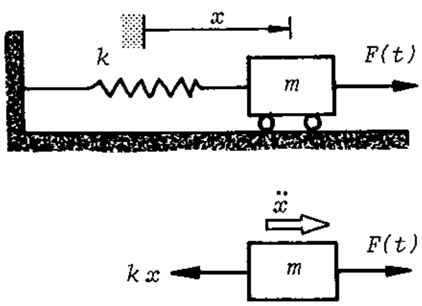
6.2 Yhden vapausasteen systeemin pakkovärähtelyt: (kertausta)

6.2.1 Harmonisen herätteen vaste:

Värähtelyä, jonka aiheuttaa ja jota ylläpitää jaksollinen voima, <u>pakkovoima</u>, kutsutaan <u>pakkovärähtelyksi</u>. Värähtelymekaniikassa systeemin liikkeen aiheuttamaa voimaa sanotaan <u>herätteeksi</u> (excitation) ja systeemin siirtymää <u>siirtymävasteeksi</u> $x(t)$. Systeemin vaste (response) voi olla myös <u>nopeusvaste</u> $\dot{x}(t)$ tai <u>kiihtyvyysvaste</u> $\ddot{x}(t)$.
Jaksollisten herätteiden tärkeän erityistapauksen muodostaa <u>harmoninen</u> heräte

$$F(t) = \hat{F} \sin(\Omega t + \varphi_F) \tag{229}$$

missä $\hat{F}$ on herätteen amplitudi, Ω sen kulmataajuus ja φ_F sen vaihekulma. Jos herätteessä on vain yksi harmoninen komponentti, niin tavallisesti valitaan aikaorigo siten, että $\varphi_F = 0$.



<u>Kuva 29</u> Vaimentamaton värähtelijä.

<u>Vaimentamaton värähtelijä</u>:
Tarkastellaan kuvan 29 vaimentamatonta värähtelijää, jonka liikeyhtälö on

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \tag{230}$$

Merkitsemällä

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad x_{st} = \frac{\hat{F}}{k} \tag{231}$$

saadaan liikeyhtälöksi

$$\ddot{x} + \omega^2 x = x_{st}\, \omega^2 \sin \Omega t \tag{232}$$

ω on systeemin ominaiskulmataajuus ja x_{st} systeemin vaste, jos voima vaikuttaisi staattisesti. Differentiaaliyhtälön (232) ratkaisu koostuu homogeenisen yhtälön yleisestä ratkaisusta ja täydellisen yhtälön jostakin yksityisratkaisusta. Tulokseksi seuraa

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{x_{st}}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t \tag{233}$$

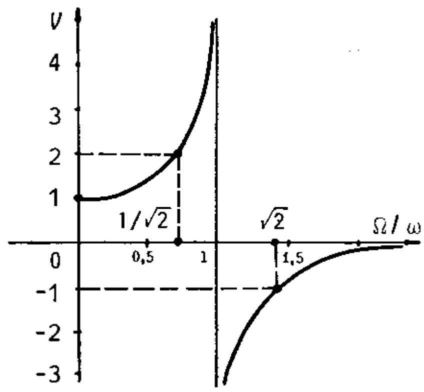
missä integroimisvakiot C_1 ja C_2 riippuvat alkuehdoista.

Todellisissa värähtelijöissä on kuitenkin mukana aina vaimennusta, joka (kuten myöhemmin todetaan) varsin nopeasti poistaa ominaisvärähtelyn (homogeenisen yhtälön ratkaisun) ja jäljelle jää vain yhtälön (232) yksityisratkaisu, joka edustaa systeemin pakkovärähtelyä,

$$x(t) = \frac{x_{st}}{1-(\Omega/\omega)^2} \sin \Omega t \tag{234}$$

Pysyvien värähtelyjen vaste (steady state response) (234) kirjoitetaan tavallisesti niin sanotun vahvistuskertoimen V avulla muotoon

$$\boxed{x(t) = V x_{st} \sin \Omega t \qquad V = \frac{1}{1-(\Omega/\omega)^2}} \tag{235}$$

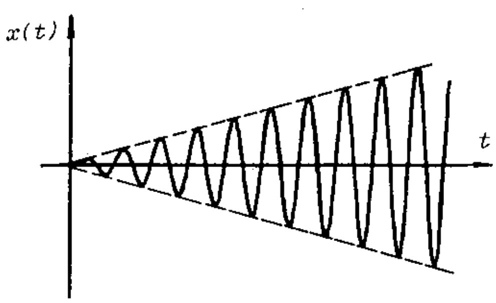


Kuva 30 Vaimentamattoman systeemin vahvistuskerroin V.

Kuvassa 30 on esitetty vahvistuskertoimen V kuvaaja. Sillä on pystysuora asymptootti kohdassa $\Omega/\omega = 1$ eli kohdassa $\Omega = \omega$, jolla arvolla vahvistuskerroin ja myös vaste $x(t)$ tulevat äärettömiksi. On kuitenkin huomattava, että ratkaisu (234) ei ole voimassa tässä niin sanotussa resonanssitapauksessa.

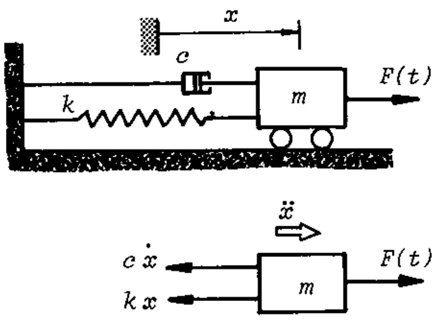
Resonanssivärähtelyn tapauksessa täydellisen yhtälön yksityisratkaisuksi eli resonanssivasteeksi seuraa

$$x(t) = -\frac{1}{2} x_{st}\, \omega t \cos \omega t \tag{236}$$



Kuva 31 Systeemin vaste resonanssivärähtelyssä.

Tuloksen mukaan resonanssissa systeemin vaste kasvaa rajatta ajan mukana. Jos resonanssivärähtelyt pääsevät syntymään, eli jos herätteen kulmataajuus on sama kuin systeemin ominaiskulmataajuus, systeemi saattaa värähtelyn jatkuessa vaurioitua. Resonanssi-ilmiö on rakenteiden kestämisen kannalta vaarallinen !



Kuva 32 Vaimennettu värähtelijä.

Vaimennettu värähtelijä:

Kuvassa 32 on esitetty viskoosisti vaimennettu värähtelijä, jonka liikeyhtälö on

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \hat{F}\sin\Omega t \qquad (237)$$

Oletetaan, että vaimennus on alikriittinen ja käytetään merkintöjä

$$\zeta = \frac{c}{c_k}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega \qquad (238)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = x_{st}\,\omega^2\sin\Omega t \qquad (239)$$

Yhtälön (239) ratkaisu on

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}(C_1\sin\omega_d t + C_2\cos\omega_d t) + x_t(t) \qquad (240)$$

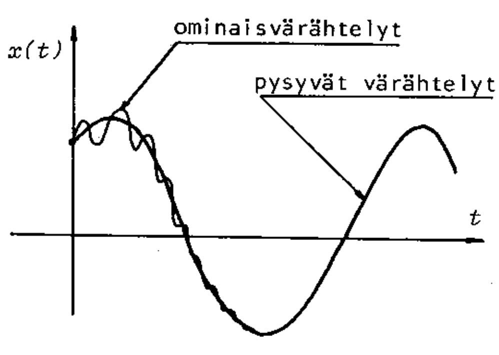
missä integroimisvakiot C_1 ja C_2 riippuvat alkuehdoista ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisuksi kelpaa

$$x_t = \hat{A}\sin(\Omega t + \varphi) \qquad (241)$$

missä

$$\hat{A} = \frac{x_{st}}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}} \qquad (242)$$

$$\varphi = \arctan\left[\frac{-2\zeta\Omega/\omega}{1-(\Omega/\omega)^2}\right] \qquad (243)$$



Kuva 33 Vaimenevan pakkovärähtelyn vaste.

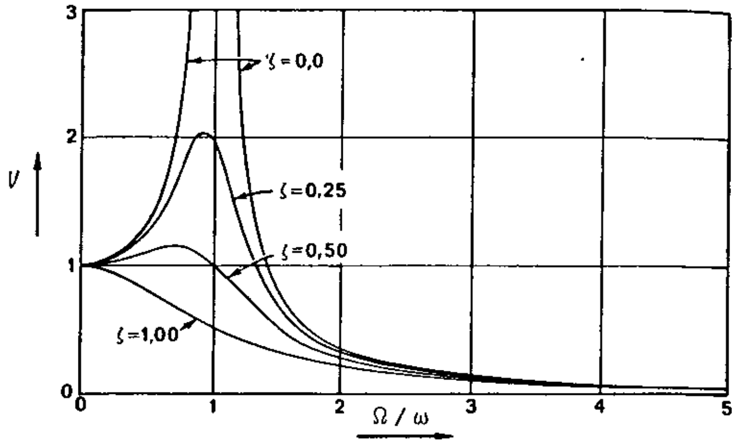
Ratkaisuyhtälön (240) alkuosuus edustaa ominaisvärähtelyjä, jotka ajan mukana varsin nopeasti vaimenevat pois ja jäljelle jäävät pysyvät värähtelyt kuvan 33 mukaisesti.

Käyttämällä vahvistuskerrointa

$$V = \frac{1}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}} \qquad (244)$$

voidaan pysyvien värähtelyjen vaste kirjoittaa muotoon

$$\boxed{x(t) = V x_{st}\sin(\Omega t + \varphi)} \qquad (245)$$



Kuva 34 Vahvistuskertoimen kuvaaja.

Vahvistuskertoimen V kuvaaja on esitetty kuvassa 34, kun $\zeta \in [0,1]$. Derivoimalla lauseke (244) kulmataajuuden Ω suhteen voidaan todeta, että vahvistuskertoimen ääriarvo ei ole kohdassa $\Omega = \omega$, vaan kohdalla

$$\Omega = \omega\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad (246)$$

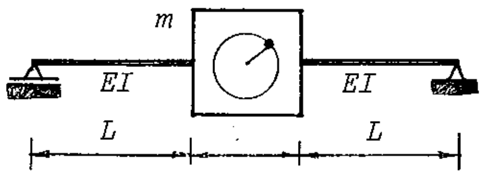
$$\Rightarrow \quad V_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (247)$$

Tavallisesti kuitenkin sanotaan, että vaimenevankin värähtelyn resonanssi on kohdalla $\Omega = \omega$, jolloin resonanssivahvistus

$$V_{res} = \frac{1}{2\zeta} \qquad (248)$$

on hiukan pienempi kuin maksimivahvistus.

Erityisen tärkeätä on huomata, että vahvistuskerroin V lähestyy nollaa, kun Ω/ω kasvaa. Tämä merkitsee sitä, että jos pakkovoiman FOURIER-sarjassa ei ole kovin korkeita termejä voimakkailla amplitudeilla mukana, niin tarvitaan siirtymävasteen likiarvon laskemiseen vain muutama alin ominaismuoto!

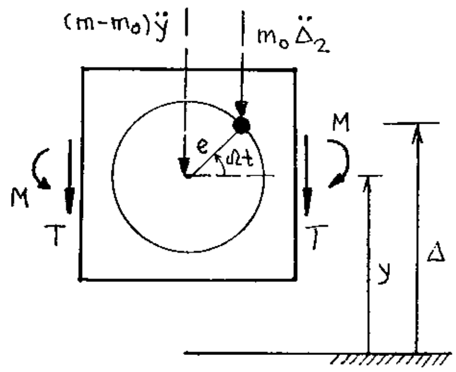


ESIMERKKI:

Kuvan koneen kokonaismassa on m ja siinä pyörivän roottorin m_0. Roottori pyörii vakiokulmanopeudella Ω ja sen epäkeskisyys on e. Konetta kannattavien palkkien massaa ei oteta huomioon. Määritä palkin keskipisteen siirtymävaste sekä palkin maksimitaivutusmomentti ja tukireaktiot, kun a) vaimennusta ei ole b) systeemin liikkeeseen sisältyy viskoosi vaimennus, jonka mitattu suhteellisen vaimennuksen kerroin $\zeta = 0,05$.

$m = 1000$ kg, $m_0 = 200$ kg, $L = 2$ m, $e = 0,01$ m

$6EI/L^3 = 500$ kN/m, $\Omega = 20$ 1/s.



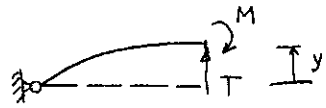
RATKAISU:

$$\Delta = y + e\sin\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{\Delta} = \ddot{y} - e\Omega^2\sin\Omega t$$

(jatkuu)

a) Hitausvoima-ajattelutavalla saadaan



$$\uparrow \quad -m_o\ddot{\Delta}-(m-m_o)\ddot{y}-2T=0$$

$$\Rightarrow \quad -m_o(\ddot{y}-e\Omega^2\sin\Omega t)-m\ddot{y}+m_o\ddot{y}-2T=0 \qquad T=3\frac{EI}{L^3}y\,,\quad M=3\frac{EI}{L^2}y$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{y}+6\frac{EI}{L^3}y=m_oe\Omega^2\sin\Omega t$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y}+\omega^2y=e\left(\frac{m_o}{m}\right)\Omega^2\sin\Omega t \qquad ,\ \omega=\sqrt{6\frac{EI}{mL^3}}\approx 22{,}36\ \frac{1}{s}$$

Täydellisen yhtälön yksityisratkaisuksi saadaan

$$y_T(t)=\frac{(m_o/m)(\Omega/\omega)^2}{1-(\Omega/\omega)^2}e\sin\Omega t\equiv Ve\sin\Omega t$$

$$y(t)\approx y_T(t)=Ve\sin\Omega t=0{,}80024\cdot 0{,}010\sin\Omega t$$

$\Rightarrow \quad y_{max}=0{,}0080$ m mitattuna staattisesta tasapainoasemasta.

$$mg=2\cdot 3\frac{EI}{L^3}y_{st} \quad\Rightarrow\quad y_{st}=\frac{mg}{6\frac{EI}{L^3}}=0{,}0196\ \text{m}$$

$$T_{st}=\tfrac{1}{2}mg=4{,}91\ \text{kN}$$

$$M_{st}=3\frac{EI}{L^3}\cdot Ly_{st}=\tfrac{1}{2}\left(6\frac{EI}{L^3}\right)Ly_{st}=9{,}81\ \text{kNm}$$

$$T_{dyn}=3\frac{EI}{L^3}y_{dyn}=\tfrac{1}{2}\left(6\frac{EI}{L^3}\right)y_{max}=1{,}96\ \text{kN}$$

$$M_{dyn}=3\frac{EI}{L^3}Ly_{max}=3{,}92\ \text{kNm}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} T=T_{st}+T_{dyn}=4{,}91+1{,}96=6{,}87\ \text{kN} \\ M=M_{st}+M_{dyn}=9{,}81+3{,}92=13{,}73\ \text{kNm}\end{cases}$$

b) Liikeyhtälö on nyt $\quad \ddot{y}+2\zeta\omega\dot{y}+\omega^2y=e\left(\frac{m_o}{m}\right)\Omega^2\sin\Omega t$

$$\Rightarrow \quad V=\frac{(m_o/m)(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega)^2]^2+(2\zeta\Omega/\omega)^2}}=0{,}73049 \quad\Rightarrow\quad y_{max}=Ve=0{,}0073\text{m}$$

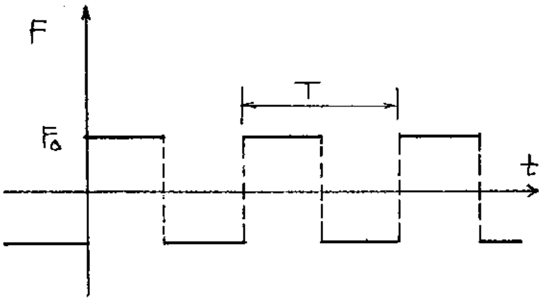
$$T_{dyn}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(6\frac{EI}{L^3}\right)y_{max}=1{,}789\ \text{kN}$$

$$M_{dyn}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(6\frac{EI}{L^3}\right)Ly_{max}=3{,}578\ \text{kNm}$$

$\Rightarrow$

$$T=4{,}91+1{,}79=6{,}70\ \text{kN}$$
$$M=9{,}81+3{,}58=13{,}39\ \text{kN}$$

6.2.2 Epäharmonisen jaksollisen herätteen vaste:



Kuva 35 Jaksollinen heräte.

Tarkastellaan voimaherätettä, joka on mielivaltainen jaksollinen funktio

$$F(t) = F_0\, f(t) \qquad (249)$$

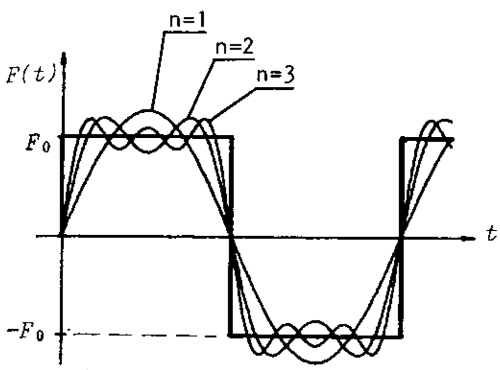
missä $f(t)$ on jatkuva tai epäjatkuva siten, että sillä on jaksovälillä vain äärellinen määrä äärellisiä hyppäyksiä. Se voidaan näillä edellytyksillä aina kehittää FOURIER-sarjaksi

$$F(t) = F_0\left[\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu\Omega t + b_\nu \sin\nu\Omega t)\right] \qquad (250)$$

Herätteen peruskulmataajuus on $\Omega = 2\pi/T$, missä T on funktion f perusjakso. Kertoimet a_ν ja b_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ saadaan kaavoista

$$a_\nu = \frac{\Omega}{\pi}\int_{-T/2}^{-T/2} f(t)\cos\nu\Omega t\,dt \quad \& \quad b_\nu = \frac{\Omega}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\nu\Omega t\,dt \qquad (251)$$

Sarjakehitelmän (250) termejä $F_0 a_\nu \cos\nu\Omega t$ ja $F_0 b_\nu \sin\nu\Omega t$ sanotaan herätteen harmonisiksi komponenteiksi.



n on F-sarjasta otettujen nollasta poikkeavien termien lukumäärä

Kuva 36 Suorakulmioaallon esittäminen.

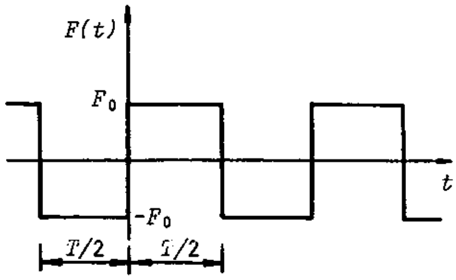
Kuvassa 36 on esitetty suorakulmioaallon FOURIER-sarjan alkupään termejä. Herätteen kuhunkin harmoniseen komponenttiin liittyy oma vahvistuskertoimensa V_ν, joka vaimentamattomalle systeemille olisi

$$V_\nu = \frac{1}{1-(\nu\Omega/\omega)^2} \qquad (252)$$

Vastaavat vasteen harmoniset komponentit ovat $V_\nu a_\nu x_{st} \cos\nu\Omega t$ ja $V_\nu b_\nu x_{st} \sin\nu\Omega t$. Yhteenlaskuperiaatetta soveltamalla saadaan

$$\boxed{X(t) = x_{st}\left[\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu(a_\nu \cos\nu\Omega t + b_\nu \sin\nu\Omega t)\right]} \qquad (253)$$

Kaava (253) on tietenkin voimassa vain sillä ehdolla, että mikään herätteen harmonisista komponenteista ei resonoi kyseessä olevan systeemin kanssa. Jos jokin $\nu\Omega = \omega$, niin tätä vastaava vastekomponentti vahvistuu suoraan verrannollisena aikaan.



ESIMERKKI:

Vaimentamattoman yhden vapausasteen värähtelijän jaksollinen epäharmoninen heräte $F(t)$ on oheisen kuvan mukainen. Esitä kuormitusfunktio FOURIER-sarjana ja määritä vasteen $x(t)$ lauseke FOURIER-sarjana.

RATKAISU:

Koska heräte $F(t) = F_0\, f(t)$ on antimetrinen, niin

$$a_\nu = 0 \quad \& \quad b_\nu = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \nu\Omega t \, dt = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\nu} \qquad \nu = 1, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_\nu \frac{1}{\nu} \sin \nu\Omega t \qquad \nu = 1, 3, 5, \ldots$$

Funktion $F(t)$ kuvaajan muutamia alkupään termejä on esitetty kuvassa 36. Vaimentamattoman värähtelijän vahvistuskertoimet

$$V_\nu = \frac{1}{1-(\nu\Omega/\omega)^2}$$

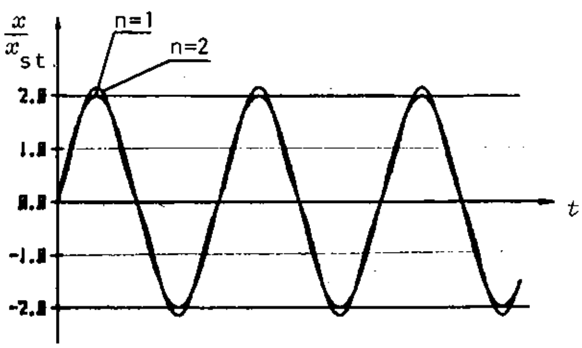
$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{4}{\pi} x_{st} \sum_\nu \frac{\sin \nu\Omega t}{\nu[1-(\nu\Omega/\omega)^2]} \quad , \nu = 1, 3, 5, \ldots$$

eli

$$x(t) = \frac{4}{\pi} x_{st} \left[\frac{\sin \Omega t}{1-(\Omega/\omega)^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3\Omega t}{1-(3\Omega/\omega)^2} + \frac{1}{5} \frac{\sin 5\Omega t}{1-(5\Omega/\omega)^2} + \cdots \right]$$

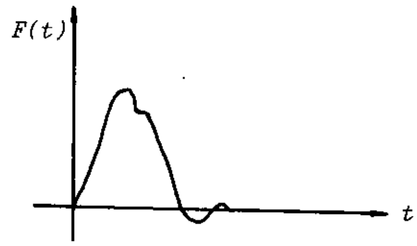
Numeroarvoilla $\Omega/\omega = 0{,}60$ & $\omega = 6{,}0$ 1/s.

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{4}{\pi} x_{st} (1{,}563 \sin 3{,}6t - 0{,}1488 \sin 10{,}8t - 0{,}0250 \sin 18{,}0t +$$
$$- 0{,}0086 \sin 25{,}2t - 0{,}0039 \sin 32{,}4t - 0{,}0021 \sin 39{,}6t - \cdots$$



Kuvassa on esitetty vaste käyttämällä muutamia FOURIER-sarjan termejä. FOURIER-sarjasta on otettava mukaan aika monta termiä. Kun $\Omega/\omega = 0{,}60$, niin mikään herätteen komponenteista ei resonoi systeemin kanssa.

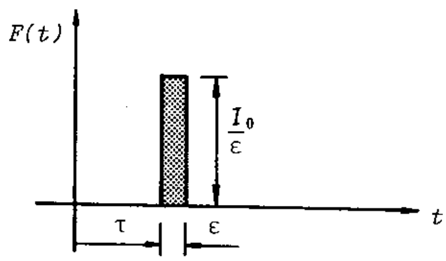
6.2.3 Jaksottoman mielivaltaisen herätteen vaste:



Kuva 37 . Jaksoton heräte

Kun mekaaniseen systeemiin vaikuttaa jaksoton heräte $F(t)$ (kuva 37), niin systeemin vastetta sanotaan transient-vasteeksi (transient response). Jos heräte on pulssimainen, systeemi ei herää pysyviin värähtelyihin, vaan jää pulssin jälkeen ominaisvärähtelyyn, jonka amplitudi riippuu herätteestä.

Tärkeä jaksoton heräte on impulsiivinen voima, jota voidaan kuvata kuvan 38 hyvin kapealla ja korkealla suorakulmiolla. Kun suorakulmion leveys $\varepsilon \to 0$, niin voiman suuruus I_0/ε kasvaa rajatta kuitenkin niin, että voiman impulssi pysyy arvossa I_0.



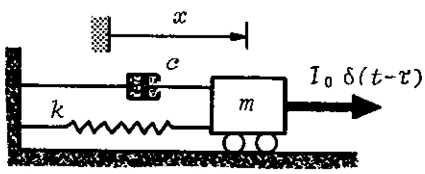
Kuva 38 Impulsiivisen voiman kuvaaja.

Analyyttisesti impulsiivista voimaa hetkellä $t=\tau$ voidaan esittää Diracin δ-funktiolla $\delta(t-\tau)$. Sen ominaisuuksien

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{kun } t \neq \tau \\ \infty & \text{kun } t = \tau \end{cases} \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1 \qquad (254)$$

perusteella voidaan impulssiheräte kirjoittaa muotoon

$$\boxed{F(t) = I_0\,\delta(t-\tau)} \qquad (255)$$



Kuva 39 Impulssikuormitus hetkellä $t=\tau$.

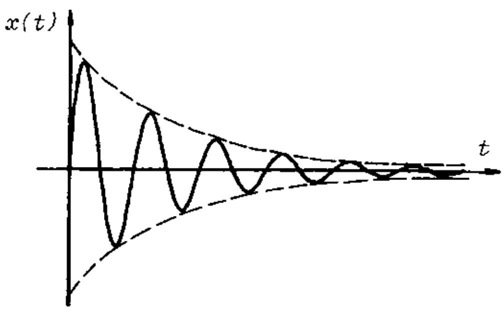
Tarkastellaan kuvan 39 vaimennettua systeemiä, johon vaikuttaa impulssi hetkellä $t=\tau$. Oletetaan, että ennen impulssia vaunu on levossa eli

$$x(\tau^-) = 0 \ \& \ \dot{x}(\tau^-) = 0 \qquad (256)$$

Tehtävänä on määrittää heti impulssin jälkeen hetkellä $t=\tau^+$ vaunun asema $x(\tau^+)$ ja nopeus $\dot{x}(\tau^+)$.

Lause[†]: Jos mekaaninen systeemi on levossa origossa $(x,\dot{x})=(0,0)$, niin heti hetkellä $t=\tau$ vaikuttavan impulssin I_0 jälkeen systeemin alkusiirtymä ja alkunopeus ovat

$$\boxed{x(\tau+)=0 \qquad \dot{x}(\tau+)=I_0/m} \tag{257}$$



Kuva 40. Vaimennetun systeemin impulssivaste $x(t)$, kun impulssi vaikuttaa hetkellä $t=\tau=0$

Koska impulssin jälkeen systeemi värähtelee vapaasti, niin sijoittamalla alkuehdot (257) vaimenemattoman ja vaimenevan värähtelyn ratkaisulausekkeisiin saadaan impulssivasteiksi

$$x(t)=\frac{I_0}{m\omega}\sin\omega t \qquad t>0 \tag{258}$$

$$x(t)=\frac{I_0}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega t}\sin\omega_d t \tag{259}$$

Lausekkeita (258) ja (259) johdettaessa oletettiin, että impulssi vaikutti hetkellä $t=0$. Jos impulssi vaikuttaa hetkellä $t=\tau$, niin impulssivasteiksi vaimentamattomalle ja vaimennetulle systeemille seuraa

$$x(t-\tau)=\frac{I_0}{m\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad t>\tau \tag{260}$$

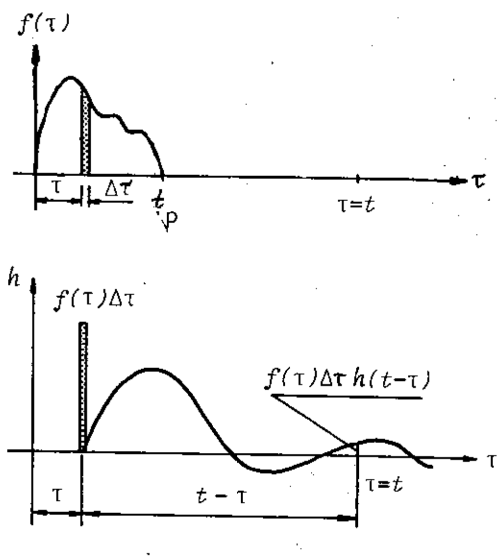
$$x(t-\tau)=\frac{I_0}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) \tag{261}$$

Impulssivasteen lausekkeet muodostavat perustan mielivaltaisen herätteen laskemisessa. Tavallisesti tarvitaan niin sanottua yksikköimpulssivastetta $h(t-\tau)$, $I_0=1$ (unit impulse response function),

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad t>\tau \tag{262}$$

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) \tag{263}$$

[†] todistus löytyy esimerkiksi oppikirjasta: Tapio Salmi, MEKANIIKKA 3, Kinetiikka. Teoriaa ja esimerkkejä. Kustannusyhtymä, Tampere 1980.



Kuva 41 Impulssivaste

Tarkastellaan kuvan 41 mielivaltaista herätettä

$$F(t) = F_0\, f(t) \tag{264}$$

Ajatellaan heräte koostuvaksi sarjasta impulsseja, joista kohdalla $t = \tau$ olevan impulssin suuruus on

$$F_0\, f(\tau)\, \Delta\tau$$

Tästä impulssista aiheutuu hetkellä $t > \tau$ kuvan 41 mukainen impulssivaste

$$F_0\, f(\tau)\, \Delta\tau\; h\,(t-\tau) \tag{265}$$

Koska systeemi on lineaarinen, yhteenlaskuperiaatteesta seuraa, että kokonaisvaste $x(t)$ on kaikkien hetkillä τ ($\tau \in [0, t]$) vaikuttavien impulssien impulssivasteiden summa toisin sanoen

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{\tau=0}^{t} F_0\, f(\tau)\, h(t-\tau)\, \Delta\tau = F_0 \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \tag{266}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = F_0 \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau} \tag{267}$$

Integraalia (267) sanotaan <u>konvoluutiointegraaliksi</u> tai <u>DUHAMELin integraaliksi</u>. Muuttujan vaihdolla $\xi = t - \tau$ konvoluutiointegraali voidaan kirjoittaa myös muotoon

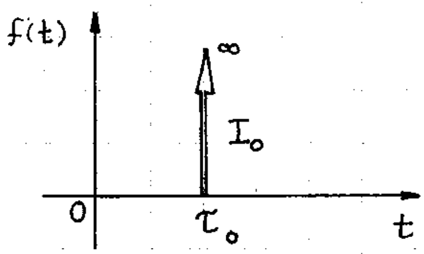
$$x(t) = F_0 \int_0^t f(t-\xi)\, h(\xi)\, d\xi \tag{268}$$

Jos $t > t_p$, missä t_p on <u>pulssin kestoaika</u> (kuva 41), niin tuloksesta (267) seuraa

$$x(t) = F_0 \int_0^{t_p} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + F_0 \int_{t_p}^{t} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = F_0 \int_0^{t_p} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau} \qquad t > t_p \tag{269}$$

sillä $f(\tau) \equiv 0$, kun $t > t_p$.



ESIMERKKI

Yhden vapausasteen systeemiin vaikuttaa impulsiivinen voima hetkellä τ_0. Määritä systeemin vaste $u(t)$.

RATKAISU

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\delta(\alpha-\beta)\,d\alpha = f(\beta) \qquad (1)$$

$$F(t) = I_0\,\delta(t-\tau_0) = F_0\,\frac{I_0}{F_0}\,\delta(t-\tau_0) = F_0\,f(t)$$

$$\Rightarrow \quad f(\tau) = \frac{I_0}{F_0}\,\delta(\tau-\tau_0)$$

$$u(t) = F_0 \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = F_0 \cdot \frac{I_0}{F_0} \int_0^t \delta(\tau-\tau_0)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= I_0 \int_0^t h(t-\tau)\,\delta(\tau-\tau_0)\,d\tau$$

$$= I_0 \int_0^t h(t-\tau)\,\delta(\tau-\tau_0-t+t)\,d\tau$$

$$h(t-\tau) = -h(\tau-t)$$

$$= I_0 \int_0^t -h(\tau-t)\,\delta(\tau-t-(\tau_0-t))\,d\tau$$

(1) $\quad \alpha = \tau - t \;, \; \beta = \tau_0 - t$

$\Rightarrow$

$$u(t) = -I_0\,h(\tau_0-t) = I_0\,h(t-\tau_0)$$

$\Rightarrow$ impulssivaste, kuten pitääkin. Impulssi tulee hetkellä τ_0.

6.3 Dynaamisen systeemin taajuusvastefunktio:

6.3.1 Viskoosisti vaimennettu systeemi:

Tarkastellaan systeemiä, joka on viskoosisti vaimennettu ja jonka heräte on harmoninen. Tällöin sen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \hat{F}\, e^{i\Omega t} \tag{270}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{\hat{F}}{m} e^{i\Omega t} = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2 e^{i\Omega t} \tag{271}$$

Heräte $F(t)$ on täydennetty kompleksiseksi ($i = \sqrt{-1}$)

$$F(t) = \hat{F}\, e^{i\Omega t} = \hat{F}\,(\cos\Omega t + i \sin\Omega t) \tag{272}$$

Tästä seuraa, että myös vaste $x(t) = \operatorname{Re} x(t) + \operatorname{Im} x(t)$ on kompleksinen. Voidaan osoittaa, että herätteen imaginääriosuutta vastaa vasteen imaginääriosuus. Siis kun todellisella herätteellä on vain reaaliosuus, niin siitä seuraa vain vasteen reaaliosuus. Imaginääriosuudet pidetään mukana vain laskennallisista syistä.

Määritelmä: Funktiota $H(\Omega)$, joka kytkee toisiinsa harmonisesti herätetyn systeemin vasteen ja herätteen toisiinsa muodossa

$$\boxed{X(t) = H(\Omega)\, F(t)} \tag{273}$$

sanotaan kyseisen systeemin kompleksiseksi taajuusvastefunktioksi.

Derivoimalla yhtälö

$$x(t) = H(\Omega)\,\hat{F} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = i\Omega\, H(\Omega)\,\hat{F} e^{i\Omega t} \tag{273'}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 H(\Omega)\,\hat{F} e^{i\Omega t}$$

ja sijoittamalla yhtälöön (271) saadaan

$$-\Omega^2 H(\Omega)\hat{F} + 2\zeta\omega\Omega\, i\, H(\Omega)\hat{F} + \omega^2 H(\Omega)\hat{F} = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\Omega) = \frac{1/k}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 + 2\zeta\frac{\Omega}{\omega}i}} \tag{274}$$

Tulos (274) on viskoosisti vaimennetun värähtelevän systeemin kompleksinen taajuusvastefunktio. Sen itseisarvoksi ja vaihekulmaksi seuraa

$$H(\Omega) = \frac{1}{k}\,\frac{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right] - 2\zeta\frac{\Omega}{\omega}i}{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \tag{275}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{|H(\Omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}} \tag{276}$$

$$\boxed{\psi = \arctan\left[-\frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right]} \tag{277}$$

Systeemin vaste $x(t)$ voidaan esittää nyt muodossa

$$x(t) = H(\Omega)\,F(t) = H(\Omega)\,\hat{F}e^{i\Omega t} = |H(\Omega)|e^{i\psi}\,\hat{F}e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \hat{F}\,|H(\Omega)|\,e^{i(\Omega t+\psi)}} \tag{278}$$

Taajuusvastefunktio (274) pitää tiedon tarkasteltavasta systee, mistä, sen massasta, jäykkyydestä ja vaimennuksesta (ω, k, ζ) ja on funktio kuormituksen kulmataajuudesta Ω. Se siirtää herätteen systeemin vasteeksi kullakin kulmataajuuden Ω arvolla ja siksi sitä kutsutaan usein myös systeemin <u>siirtofunktioksi</u>.

Systeemin käyttäytymisen informaatio on tiiviisti sisällytetty taajuusvastefunktioon $H(\Omega)$. Siksi sillä on aivan keskeinen merkitys vähänkin pitemmälle menevässä värähtelyanalyysissä!

6.3.2 Rakenteellisesti vaimennettu systeemi:

Rakenteellisesti vaimennetun systeemin, jonka heräte on harmoninen, liikeyhtälö on

$$m\ddot{x} + (1+ig)kx = F(t) = \hat{F}e^{i\Omega t} \tag{279}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + (1+ig)\omega^2 x = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2 e^{i\Omega t} \tag{280}$$

Sijoitetaan yhteydet (273)' liikeyhtälöön (280), jolloin saadaan

$$-\Omega^2 H(\Omega)\hat{F} + (1+ig)\omega^2 H(\Omega)\hat{F} = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\Omega) = \frac{1/k}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2 + gi}} \tag{281}$$

$$\Rightarrow \quad H(\Omega) = \frac{1}{k}\,\frac{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 - gi}{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + g^2} \tag{282}$$

$\Rightarrow$

$$|H(\Omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + g^2}} \tag{283}$$

$$\psi = \operatorname{arc}\tan\left[-\frac{g}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2}\right] \tag{284}$$

$$x(t) = \hat{F}\,|H(\Omega)|\,e^{i(\Omega t+\psi)} \tag{285}$$

Huomaa: Tulokset (278) ja (285) edellyttävät, että heräte on muotoa $F(t) = \hat{F}e^{i\Omega t} = \hat{F}(\cos\Omega t + i\sin\Omega t)$

jolloin todellinen heräte on

$$F(t) = \hat{F}\cos\Omega t \tag{286}$$

Jos todellinen heräte onkin muotoa

$$F(t) = \hat{F}\sin\Omega t \tag{287}$$

niin on meneteltävä seuraavasti:

$$F(t) = \hat{F}\sin\Omega t = \hat{F}\cos\left[\frac{\pi}{2} - \Omega t\right] \Rightarrow F(t) = \hat{F}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t\right)} \tag{288}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \hat{F}\,|H(\Omega)|\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \Omega t + \psi\right)} \tag{289}$$

6.3.3 Taajuusvastefunktion ja impulssivastefunktion yhteys:

Taajuusvastefunktio $H(\Omega)$ on siis vasteen ja herätteen suhde pakkovärähdystilassa, kun vapaa värähtely on vaimentunut pois ja kun herätteenä on ykkösamplitudinen ($\hat{F} = 1$) harmoninen ajan funktio. Mittaamalla taajuusvastefunktion $H(\Omega)$ arvo jokaisella kulmataajuudella Ω, saadaan täysin määrättyä systeemin dynaamiset ominaisuudet.

Toinen tapa selvittää systeemin dynaamiset ominaisuudet on mitata systeemin vastetta, kun siihen annetaan ykkösimpulssiheräte. Impulssivaste $h(t-\tau)$ kuvaa täysin systeemin dynaamisia ominaisuuksia.

On selvää, että funktioilla $H(\Omega)$ ja $h(t-\tau)$ täytyy olla jokin keskinäinen yhteys eli yhteys, jolla toinen voidaan laskea, kun toinen tunnetaan.

Voidaan osoittaa[ψ], että taajuusvastefunktio $H(\Omega)$ ja ykkösimpulssivastefunktio $h(t-\tau)$ muodostavat <u>FOURIER-muunnosparin</u>, eli

$$\boxed{\begin{aligned} H(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \end{aligned}} \tag{290}$$

Ominaisuus (290) muodostaa perustavan laatuisen kulmakiven rakenteiden satunnaisvärähtejyjen teoriassa. Jos $\tilde{F}(\Omega)$ on herätteen FOURIER-muunnos, niin systeemin vasteen FOURIER-muunnos saadaan kertolaskulla $\tilde{X}(\Omega) = H(\Omega)\,\tilde{F}(\Omega)$. Aikatason hankalat integroinnit voidaan muuntaa taajuustasoon, jossa vastaavat laskutoimitukset ovat vain kertolaskuja!

[ψ] Simo Virtanen, Stokastiset prosessit rakenteiden mekaniikassa. TTKK, opetusmoniste 53, Tampere 1980.

6.4 Normaalimuotomenetelmä:

6.4.1 Johdanto:

Rakenteiden dynamiikan tehtävän (liikeyhtälö saatettiin aikaisemmin muotoon

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q(t)\} \tag{291}$$

Lineaarisen teorian puitteissa massamatriisi $[M]$ ja jäykkyysmatriisi $[K]$ ovat vakioita. Ajastariippuvuus on keskitetty koordinaatteihin $\{q(t)\}$ ja kuormituksiin $\{Q(t)\}$. Yhtälö (291) ei ole tarkka yhtälö, mutta se on sitä paremmin voimassa, mitä tiheämpää elementtiverkkoa käytetään.

Yhtälöryhmän (291) ratkaisemiseen käytetään yleensä jompaa kumpaa seuraavista kahdesta menetelmästä

* Normaalimuotomenetelmä (Normal Mode Method)
* Välitön integrointi (Direct Integration)

Nämä saattavat ainakin aluksi tuntua täysin erilaisilta menetelmiltä, mutta itse asiassa ne ovat läheisiä sukulaisia. Menetelmän valinta riippuu sen numeerisesta tehokkuudesta ratkaistavana olevan ongelman suhteen.
Mainittakoon vielä aikaelementtimenetelmä yhtälön (291) ratkaisemiseen. Sen voidaan kuitenkin katsoa olevan samaa kuin välitön integrointi (vrt. myöhemmin).

6.4.2 Liikeyhtälöt pääkoordinaatistossa:

Suorittamalla muunnos

$$\{q\} = [\Phi]\{\eta\} \tag{292}$$

missä $[\Phi]$ on modaalimatriisi ja $\{\eta\}$ pääkoordinaatit saadaan liikeyhtälöksi

$$\lceil \mathcal{M} \rfloor\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{\eta}\} + \lceil \mathcal{K} \rfloor\{\eta\} = \{\mathcal{F}(t)\} \tag{293}$$

missä $\lceil \mathcal{M} \rfloor = [\bar{\Phi}]^T[M][\bar{\Phi}] = \lceil I \rfloor$ (normeeraus)

$$\lceil \mathcal{K} \rfloor = [\bar{\Phi}]^T[K][\bar{\Phi}] = \lceil \Lambda \rfloor \equiv \lceil \omega^2 \rfloor \tag{294}$$

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\bar{\Phi}]^T\{Q(t)\}$$

Kun vielä käytetään suhteellista vaimennusta, jolloin

$$[\bar{\Phi}]^T[C][\bar{\Phi}] = 2\lceil \zeta\omega \rfloor \tag{295}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\{\ddot{\eta}\} + 2\lceil \zeta\omega \rfloor\{\dot{\eta}\} + \lceil \omega^2 \rfloor\{\eta\} = \{\mathcal{F}(t)\}} \tag{296}$$

$$\lceil \zeta\omega \rfloor = \lceil \zeta_1\omega_1 \;\; \zeta_2\omega_2 \;\; \ldots \;\; \zeta_p\omega_p \rfloor$$

$$\lceil \omega^2 \rfloor = \lceil \omega_1^2 \;\; \omega_2^2 \;\; \ldots \;\; \omega_p^2 \rfloor \tag{297}$$

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\bar{\Phi}]^T\{Q(t)\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \mathcal{F}_i(t)} \tag{298}$$

Alkuehdot $\{q(0)\}$ ja $\{\dot{q}(0)\}$ muuntuvat pääkoordinaatiston alkuehdoiksi $\{\eta(0)\}$ ja $\{\dot{\eta}(0)\}$ seuraavasti:

$$\{q\} = [\bar{\Phi}]\{\eta\} \Rightarrow \{\dot{q}\} = [\bar{\Phi}]\{\dot{\eta}\} \tag{299}$$

Kerrotaan yhtälöt (299) vasemmalta matriisilla $[\bar{\Phi}]^T[M]$ ja otetaan huomioon normeerausehto $[\bar{\Phi}]^T[M][\bar{\Phi}] = [I]$. Tällöin saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} \{\eta(0)\} &= [\bar{\Phi}]^T[M]\{q(0)\} \\ \{\dot{\eta}(0)\} &= [\bar{\Phi}]^T[M]\{\dot{q}(0)\} \end{aligned}} \tag{300}$$

Liikeyhtälöillä (296) muunnetussa muodossa eli pääkoordinaatistossa on saavutettu merkittävä etu alkuperäisiin liikeyhtälöihin (291) verrattuna. Ne ovat separoituneet eli ortogonalisoituneet kukin omaksi liikeyhtälökseen. Tällöin on ollut pakko tyytyä suhteellisen viskoosin vaimennuksen malliin. Vielä on huomattava, että modaalimatriisiin $[\bar{\Phi}]$ voidaan valita ominaisvektoreita vain p kpletta siten, että $p < n$. Yleensä p on paljon pienempi kuin systeemin vapausasteiden lukumäärä n.

Kun liikeyhtälöistä (298) on alkuehdoilla (300) ratkaistu pääkoordinaattien $\{\eta\}$ arvot $\{\eta(t)\}$, niin koordinaatit $\{q(t)\}$ saadaan

$$\{q(t)\} = [\bar{\Phi}]\{\eta(t)\} = [\{\bar{\phi}\}_1 \{\bar{\phi}\}_2 \ldots \{\bar{\phi}\}_p]\{\eta(t)\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{p} \{\bar{\phi}\}_i \, \eta_i(t)} \tag{301}$$

Taloksen (301) mukaan kukin vaimenematon ominaismuoto $\{\bar{\phi}\}_i$ $i = 1, 2, \ldots, p \leq n$ herätetään kerroinfunktion $\eta_i(t)$ mukaisena ja saadut vasteet lasketaan yhteen. Ratkaisuun ei tule mitään likimääräisyyttä sen takia, että käytetään vaimenemattomia ominaismuotoja laskennan apuna, vaikka systeemissä on vaimennusta. Niitä käytettiin vain laskuteknisenä apuvälineenä. Oleellista on suhteellisen vaimennusmallin hyvyys sekä elementtijaon tiheys.

Tarkastellaan kuormitustermiä $\{\mathcal{F}(t)\} = [\bar{\Phi}]^T\{Q(t)\}$. Oletetaan, että <u>kuormitus on separoituva</u> toisin sanoen

$$\{Q\} = \{Q(t)\} = \{Q_0 f(t)\} \tag{302}$$

jolloin

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\bar{\Phi}]^T\{Q\} = [\{\bar{\phi}\}_1 \{\bar{\phi}\}_2 \cdots \{\bar{\phi}\}_p]^T\{Q_0 f(t)\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_i(t) = \{\bar{\phi}\}_i^T\{Q_0 f(t)\} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j \, Q_{0j} \, f_j(t) \tag{303}$$

Tällöin liikeyhtälö (298) menee muotoon

$$\boxed{\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j \, Q_{0j} \, f_j(t)} \tag{304}$$

Oikean puolen summalauseke hoidetaan yhtälöä ratkaistaessa siten, että pidetään kutakin summan termiä omana kuormitustapauksena, jolle yhtälö (304) ratkaistaan. Superpositioperiaatetta soveltamalla saadaan lopullinen ratkaisu laskemalla kutakin "kuormitustapausta" vastaavat ratkaisut $\eta_j(t)$ yhteen.

6.4.3 Liikeyhtälöiden ratkaisu pääkoordinaatistossa:

Liikeyhtälön

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} f_j(t) \tag{305}$$

ratkaisussa voidaan vedota aikaisempiin tuloksiin. Yhtälöstä (240) saadaan yhtälön (305) yleinen ratkaisu

$$\eta_i(t) = e^{-\zeta_i\omega_i t}(A_i \sin\omega_{di}t + B_i\cos\omega_{di}t) + \eta_{iT}(t) \tag{306}$$

Integroimisvakiot A_i ja B_i riippuvat alkuehdoista $\eta_i(0)$ ja $\dot{\eta}_i(0)$. $\eta_{iT}(t)$ on täydellisen yhtälön eräs yksityisratkaisu.

<u>Lause</u>: Liikeyhtälön (305) täydellisen yhtälön yksityisratkaisu on

$$\eta_{iT}(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau) h_i(t-\tau)\,d\tau \qquad t > 0 \tag{307}$$

missä $h_i(t-\tau)$ on ykkösimpulssivaste.

<u>Todistus</u>: Derivoidaan (307): $t > \tau$

$$\dot{\eta}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj}\left[f_j(t)\overset{=0}{h_i(t-t)}\cdot 1 - 0 + \int_0^t f_j(\tau)\dot{h}_i(t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\eta}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\dot{h}_i(t-\tau)\,d\tau$$

$$\ddot{\eta}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\ddot{h}_i(t-\tau)\,d\tau$$

Sijoitetaan nämä derivaatat liikeyhtälöön (305), jolloin saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\left[\ddot{h}_i(t-\tau) + 2\zeta_i\omega_i\dot{h}_i(t-\tau) + \omega_i^2 h_i(t-\tau)\right]d\tau \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} f_j(t)$$

Koska $h_i(t-\tau)$ on ykkösimpulssivaste, niin

$$[\quad] = 1\cdot\delta(t-\tau)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} \bar{\Phi}_i^j Q_{oj} f_j(t)$$

DIRACin δ-funktion määritelmästä $\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\delta(\alpha-\beta)\,d\alpha = f(\beta)$ ja symmetriasta

$$\delta(t-\tau) = \delta(\tau-t)$$

seuraa

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j Q_{oj} f_j(t)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j Q_{oj} f_j(t) \overset{\dagger}{=} \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j Q_{oj} f_j(t) \qquad \square$$

Lisäksi nähdään, että $\eta_{iT}(0) = 0$ & $\dot{\eta}_{iT}(0) = 0$ joten alkuehdoista $\eta_i(0)$ & $\dot{\eta}_i(0)$ seuraa

$$\eta_i(0) = e^0(A_i \cdot 0 + B_i \cdot 1) + 0 \Rightarrow B_i = \eta_i(0)$$

$$\dot{\eta}_i(0) = -\zeta_i\omega_i \cdot e^0(A_i \cdot 0 + B_i \cdot 1) + e^0 \cdot (\omega_{di} A_i \cdot 1 + B_i \cdot 0) + 0$$

$$\Rightarrow \quad A_i = \frac{\zeta_i\omega_i\eta_i(0) + \dot{\eta}_i(0)}{\omega_{di}}$$

Liikeyhtälön (305) täydelliseksi ratkaisuksi saadaan

(308)

$$\boxed{\eta_i(t) = e^{-\zeta_i\omega_i t}\left[\left(\frac{\zeta_i\omega_i\eta_i(0) + \dot{\eta}_i(0)}{\omega_{di}}\right)\sin\omega_{di}t + \eta_i(0)\cos\omega_{di}t\right] + \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_i^j Q_{oj} \int_0^t f_j(\tau)\,h_i(t-\tau)\,d\tau}$$

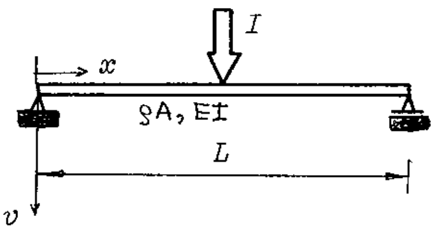
$$h_i(t-\tau) = \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_{di}(t-\tau) \qquad t > \tau$$

$$\{\eta(0)\} = [\bar{\Phi}]^T [M] \{q(0)\}$$

$$\{\dot{\eta}(0)\} = [\bar{\Phi}]^T [M] \{\dot{q}(0)\} \tag{309}$$

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}$$

$$\{\bar{\phi}\}_i^T [C] \{\bar{\phi}\}_i = 2\zeta_i\omega_i$$



ESIMERKKI:

Kuvan palkin keskijänteelle kohdistuu impulssi $I_0\delta(t)$. Määritä palkin siirtymävaste $v(x,t)$ normaalimuotomenetelmällä. Laske vielä vaste $v(L/2,T/4)$. $T = T_1/4$, misssä $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

RATKAISU:

Valitaan $\phi_i(x) = \sin(i\pi x/L)$, $i = 1,2,\ldots$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = q_1(t)\,\phi_1(x) + q_2(t)\,\phi_2(x) + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = q_1 \sin \pi x/L + q_2 \sin 2\pi x/L + \cdots$$

$$m_{ij} = \int_0^L \varrho A\,\phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx = \varrho A \int_0^L \sin i\pi x/L \,\sin j\pi x/L\, dx$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI\,\phi_i''\,\phi_j''\,dx = i^2 j^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI \int_0^L \sin i\pi x/L\,\sin j\pi x/L\,dx$$

$$\int_0^L \sin i\pi x/L\,\sin j\pi x/L\,dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ L/2 & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \varrho AL/2 & , i = j \end{cases} \quad , \quad k_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 EIL/2 & , i = j \end{cases}$$

Kuormitusvektori $\{Q\}$ on

$$Q_i = \int_0^L p(x)\,\phi_i(x)\,dx = I_0\,\delta(t) \int_0^L \delta\!\left(x - \tfrac{L}{2}\right) \sin\frac{i\pi x}{L}\,dx = I_0\,\delta(t)\,\sin\!\left(\frac{i\pi}{2}\right)$$

$[M]$ ja $[K]$ ovat lävistäjämatriiseja, josta seuraa, että $\{q\}$-koordinaatisto on heti pääkoordinaatisto ja funktiot $\phi_i(x)$ ovat ominaismuotofunktioita. Merkitään

$$\mathcal{M}_i = \varrho AL/2 \quad \& \quad \mathcal{K}_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 EIL/2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_i^2 = \frac{\mathcal{K}_i}{\mathcal{M}_i} = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\varrho A}$$

Ominaisvektorit $\{\phi\}_i$ ovat $\quad \{\phi\}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$, missä $\phi_i^j = \delta_{ij}$

Normeerataan

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = \varrho AL/2 \quad \Rightarrow \quad \{\bar{\phi}\}_i = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}} \{\phi\}_i$$

Muunnos pääkoordinaatistoon on

$$\{q\} = [\Phi]\{\eta\} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}} [I]\{\eta\}$$

(jatkuu)

(jatkoa)

1. TAPA: $\{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T\{Q\} = \frac{1}{\sqrt{M_i}}\{Q\}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_i(t) = \frac{I_0}{\sqrt{M_i}}\sin(\tfrac{i\pi}{2})\,\delta(t) \equiv \mathcal{F}_{0i}\,\delta(t)$$

Ratkaisu: $\eta_i(t) = \mathcal{F}_{0i}\int_0^t f_i(\tau)\,h_i(t-\tau)\,d\tau \quad , \quad h_i = \frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)$

$$\Rightarrow \quad \eta_i(t) = \mathcal{F}_{0i}\int_0^t \delta(\tau)\frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \frac{\mathcal{F}_{0i}}{\omega_i}\int_0^t \sin\omega_i(t-\tau)\,\delta(\tau-0)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \eta_i(t) = \frac{I_0}{\sqrt{M_i}\,\omega_i}\sin\omega_i(t-0) = \frac{I_0}{\sqrt{M_i}\,\omega_i}\sin(\tfrac{i\pi}{2})\sin\omega_i t$$

$$\Rightarrow \quad q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{M_i}}\eta_i(t) = \frac{I_0}{M_i\omega_i}\sin(\tfrac{i\pi}{2})\sin\omega_i t$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\,\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2I_0}{\rho AL}\sin(\tfrac{i\pi}{2})\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i}\sin\frac{i\pi x}{L}$$

Numerosovellutus: $t = T_1/4 = \pi/2\omega_1 \quad , \quad x = L/2 \quad , \omega_1 = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$

$$\Rightarrow \quad v(\tfrac{L}{2},\tfrac{T_1}{4}) = \frac{2I_0}{\rho AL}\big[0{,}10132+0+0{,}011258+0+0{,}0040529+0+ +0{,}002068+0+0{,}001251+0+0{,}0008374+0+ +0{,}0005995+0+0{,}0004503+0+\cdots\big]\sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}}$$

$$\Rightarrow \quad v(\tfrac{L}{2},\tfrac{T_1}{4}) \approx 0{,}2437\;\frac{I_0 L}{\sqrt{\rho AEI}}$$

2. TAPA: Muunnetaan impulssi ensin alkuehdoksi

$$q_i(0) = 0 \quad \& \quad \dot{q}_i(0) = \frac{I_0\sin(\frac{i\pi}{2})}{M_i}$$

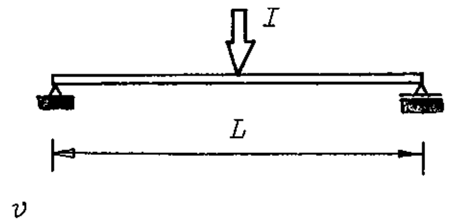
$$\Rightarrow \quad \eta_i(0) = 0$$

$$\{\dot\eta(0)\} = [\Phi]^T[M]\{\dot q(0)\} = \frac{1}{\sqrt{M_i}}M_i[I]\{\dot q(0)\}$$

$$\Rightarrow \quad \dot\eta_i(0) = \frac{I_0\sin(\frac{i\pi}{2})}{\sqrt{M_i}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta_i(t) = \frac{\dot\eta_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t = \frac{I_0\sin(\frac{i\pi}{2})}{\sqrt{M_i}\,\omega_i}\sin\omega_i t \qquad \text{(sama)}$$

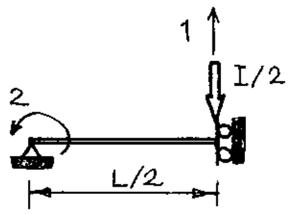
jatko kuten tavassa 1.



ESIMERKKI:

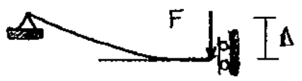
Kuvan palkin keskijänteelle kohdistuu impulssi $I_0\delta(t)$. Määritä palkin keskipisteen siirtymävaste $v(L/2,t)$ normaalimuotomenetelmällä. Laske vielä vaste hetkellä $t=T_1/4$, missä T_1 on systeemin alin ominaisvärähdysaika. Käytä elementtimenetelmää ja keskitettyä massaa. Vertaa tulosta tarkkaan arvoon.

RATKAISU:



Keskitetään massa koordinaattiin 1, jolloin

$$m_1 = \frac{1}{4}\rho AL$$



$$k_1 = 3\frac{EI}{(L/2)^3} = 24\frac{EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} = 96\frac{EI}{\rho AL^4}, \quad M_1 = \frac{1}{4}\rho AL, \quad K_1 = 24\frac{EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow \{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1 = \frac{1}{4}\rho AL \Rightarrow \{\bar{\phi}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} = \frac{2}{\sqrt{\rho AL}}$$

Alkuehto: $q(0)=0 \Rightarrow \eta(0)=0 \quad \& \quad \dot{q}(0) = -\frac{I/2}{m_1}$, $\quad [\Phi] = \frac{1}{\sqrt{M_1}} = \frac{2}{\sqrt{\rho AL}}$

$$\Rightarrow \dot{\eta}(0) = [\Phi]^T[M]\{\dot{q}(0)\} = \frac{2}{\sqrt{M_1}}\cdot m_1\left(\frac{I/2}{m_1}\right) = -\frac{I}{\sqrt{\rho AL}}$$

Ratkaisu: $\eta(t) = \frac{\dot{\eta}(0)}{\omega_1}\sin\omega_1 t = -\frac{I}{\sqrt{\rho AL}}\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}$

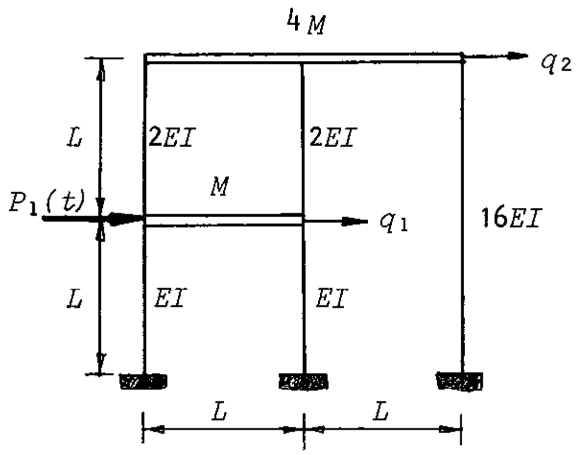
$$q_1(t) = [\Phi]\{\eta\} = \frac{2}{\sqrt{\rho AL}}\cdot\left(-\frac{I}{\sqrt{\rho AL}}\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow \quad q_1(t) = -\frac{2I}{\rho AL}\frac{1}{\sqrt{96}}\frac{\sqrt{\rho AL^4}}{\sqrt{EI}}\sin\omega_1 t = -\frac{2IL}{\sqrt{96}\sqrt{\rho AEI}}\sin\omega_1 t \quad ◄$$

Ajan hetkellä $t = T_1/4 = (2\pi/\omega_1)/4 = \pi/2\omega_1$ saadaan

$$q_1\left(t=\frac{\pi}{2\omega_1}\right) = -\frac{2IL}{\sqrt{96}\sqrt{\rho AEI}}\sin\frac{\pi}{2} = -0{,}2041\frac{IL}{\sqrt{\rho AEI}} \quad \triangleleft$$

Kun verrataan tulosta sivun 121 tarkkaan tulokseen $0{,}2437\ IL/\sqrt{\rho AEI}$, nähdään, että se on aika likimääräinen. Likimääräisyys johtuu massan keskittämisestä, joka on aina likimääräinen.



ESIMERKKI:

Kuvan kehän väli- ja yläpohja pääsevät liikkumaan vain vaakasuorasti, jolloin rakenteella on vain kaksi vapausastetta. Kehää kuormittaa harmoninen kuormitus

$$P_1(t) = \hat{P}\sin\Omega t$$

Määritä kehän siirtymävaste, kun herätteen kulmataajuus $\Omega = 0{,}5\cdot\omega_1$ tai $\Omega = 1{,}05\cdot\omega_1$, missä ω_1 on rakenteen alin ominaiskulmataajuus ja oletetaan, että rakenteellinen vaimennus on sellainen, jossa
a) $g = 0$, b) $g = 0{,}05$.

RATKAISU:

$$[M] = M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad [K] = k\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad k = 24\frac{EI}{L^3}$$

$$\omega_1 = 0{,}6081\sqrt{\frac{k}{M}} \quad , \quad \omega_2 = 1{,}8385\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1{,}315\end{bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -0{,}1901\end{bmatrix}$$

Normeeraus:

$$\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1 = 7{,}90\,M \Rightarrow \{\bar{\phi}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix}0{,}35578\\ 0{,}46786\end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2^T[M]\{\phi\}_2 = 1{,}15\,M \Rightarrow \{\bar{\phi}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix}0{,}93250\\ -0{,}17727\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [\Phi] = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix}0{,}35578 & 0{,}93250\\ 0{,}46786 & -0{,}17727\end{bmatrix}$$

$$\{Q(t)\} = \begin{bmatrix}\hat{P}e^{i\Omega t}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T\{Q\} = \begin{bmatrix}0{,}35578\\ 0{,}93250\end{bmatrix}\frac{\hat{P}}{\sqrt{M}}e^{i\Omega t}$$

a) $g = 0 \Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \mathcal{F}_i(t) \equiv \mathcal{F}_{0i}e^{i\Omega t}$

$$|H_i(\Omega)| = \frac{1/K_i}{1-(\Omega/\omega_i)^2}$$

$\underline{\Omega/\omega_1 = 0{,}50}$: $\quad |H_1(\Omega)| = \dfrac{1/\omega_1^2}{1-(\Omega/\omega_1)^2} = 3{,}60568\,\dfrac{M}{k}$

$$|H_2(\Omega)| = \frac{1/\omega_2^2}{1-(\Omega/\omega_2)^2} = 0{,}30417\,\frac{M}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\eta_1(t) = \mathcal{F}_{01}|H_1(\Omega)|e^{i\Omega t} = 0{,}35578\cdot 3{,}60568\,\frac{\sqrt{M}}{k}F_{01}e^{i\Omega t} = 1{,}28283\,\frac{\sqrt{M}}{k}F_{01}e^{i\Omega t}\\ \eta_2(t) = \mathcal{F}_{02}|H_2(\Omega)|e^{i\Omega t} = 0{,}93250\cdot 0{,}30417\,\frac{\sqrt{M}}{k}F_{02}e^{i\Omega t} = 0{,}28364\,\frac{\sqrt{M}}{k}F_{02}e^{i\Omega t}\end{cases}$$

(jatkoa)

$$\{q\} = [\Phi]\{\eta\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}(0{,}35578\,\eta_1 + 0{,}93250\,\eta_2) = 0{,}72089\,\frac{F_{01}}{k}\,e^{i\Omega t} \\ q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}(0{,}46786\,\eta_1 - 0{,}17727\,\eta_2) = 0{,}54990\,\frac{F_{02}}{k}\,e^{i\Omega t} \end{cases} \quad \triangleleft$$

$\underline{\Omega/\omega_1 = 1{,}05}$: $H_1(\Omega) = -26{,}383$ & $H_2(\Omega) = 0{,}33643\,\frac{M}{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_1(t) = 0{,}35578\cdot|-26{,}383|\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{01}\,e^{i\Omega t} = 9{,}38654\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{01}\,e^{i\Omega t} \\ \eta_2(t) = 0{,}93250\cdot 0{,}33643\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{02}\,e^{i\Omega t} = 0{,}31372\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{02}\,e^{i\Omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = 0{,}35578\cdot 9{,}38654 + 0{,}93250\cdot 0{,}31372 = 3{,}63204\,\frac{F_{01}}{k}\,e^{i\Omega t} \\ q_2(t) = 0{,}46786\cdot 9{,}38654 - 0{,}17727\cdot 0{,}31372 = 4{,}33598\,\frac{F_{02}}{k}\,e^{i\Omega t} \end{cases} \quad \triangleleft$$

b) Rakenteellinen vaimennus $g = 0{,}05$:

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + (1+ig)\,\omega_i^2\,\eta_i = \mathcal{F}_i(t) = \mathcal{F}_{0i}\,e^{i\Omega t} \quad , \quad \eta_i(t) = \mathcal{F}_{0i}\,|H_i(\Omega)|\,e^{i(\Omega t + \varphi_i)}$$

$$|H_i(\Omega)| = \frac{1/\kappa_i}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega_i)^2]^2 + g^2}} \quad , \quad \varphi_i = \arctan\left[-\frac{g}{1-(\Omega/\omega_i)^2}\right]$$

$\underline{\Omega/\omega_1 = 0{,}50}$:

$|H_1(\Omega)| = 3{,}59771\,\frac{M}{k}$, $\varphi_1 = -3{,}81°$

$|H_2(\Omega)| = 0{,}30377\,\frac{M}{k}$, $\varphi_2 = -2{,}94°$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_1(t) = 0{,}35578\cdot 3{,}59771\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{01}\,e^{i(\Omega t - 3{,}81°)} \\ \eta_2(t) = 0{,}93250\cdot 0{,}30377\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{02}\,e^{i(\Omega t - 2{,}94°)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_1(t) = 1{,}28000\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{01}\,e^{i(\Omega t - 3{,}81°)} \\ \eta_2(t) = 0{,}28327\,\frac{\sqrt{M}}{k}\,F_{02}\,e^{i(\Omega t - 2{,}94°)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = 0{,}71953\,\frac{F_{01}}{k}\,e^{i\Omega t}\ \underline{\angle -3{,}59°} \\ q_2(t) = 0{,}54865\,\frac{F_{02}}{k}\,e^{i\Omega t}\ \underline{\angle -3{,}89°} \end{cases} \quad \triangleleft$$

(jatkuu)

$\Omega/\omega_1 = 1{,}05$:

$$|H_1(\Omega)| = 23{,}712\ \frac{M}{k}\ , \quad \psi_1 = 26{,}0^\circ$$

$$|H_2(\Omega)| = 0{,}33589\ \frac{M}{k}\ , \quad \psi_2 = -3{,}254^\circ$$

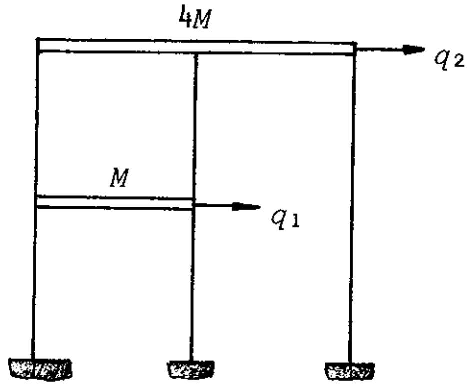
$$\Rightarrow \begin{cases} \eta_1(t) = 8{,}43637\ \frac{\sqrt{M}}{k} F_{01}\, e^{i(\Omega t + 26^\circ)} \\ \eta_2(t) = 0{,}31322\ \frac{\sqrt{M}}{k} F_{02}\, e^{i(\Omega t - 3{,}25^\circ)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = 3{,}2594\ \frac{F_{01}}{k}\, e^{i\Omega t} \quad \underline{/23{,}5^\circ} \\ q_2(t) = 3{,}8987\ \frac{F_{02}}{k}\, e^{i\Omega t} \quad \underline{/26{,}4^\circ} \end{cases} \quad \triangleleft$$

Yhteenveto: $F_{01} = F_{02} = \hat{P}$, $k = 24\,EI/L^3$

	$g = 0$	$g = 0{,}05$
	$\{q(t)\}$	$\{q(t)\}$
$\dfrac{\Omega}{\omega_1} = 0{,}50$	$\begin{bmatrix} 0{,}7210 \\ 0{,}5499 \end{bmatrix} \dfrac{F_{01}}{k}\, e^{i\Omega t}$	$\begin{bmatrix} 0{,}7195 & \underline{/-3{,}59^0} \\ 0{,}5487 & \underline{/-3{,}89^0} \end{bmatrix} \dfrac{F_{01}}{k}\, e^{i\Omega t}$
$\dfrac{\Omega}{\omega_1} = 1{,}05$	$\begin{bmatrix} 3{,}632 \\ 4{,}336 \end{bmatrix} \dfrac{F_{01}}{k}\, e^{i\Omega t}$	$\begin{bmatrix} 3{,}259 & \underline{/\ 23{,}5^0} \\ 3{,}899 & \underline{/\ 26{,}4^0} \end{bmatrix} \dfrac{F_{01}}{k}\, e^{i\Omega t}$

Kun ulkoisen herätteen frekvenssi ei ole lähellä rakenteen ominaiskulmataajuutta, niin rakenteellinen vaimennus ei sanottavasti pienennä värähtelyn amplitudia eikä aiheuta vaihesiirtoa, mutta kun herätteen taajuus on lähellä rakenteen ominaistaajuutta, niin rakenteellinen vaimennus vaikuttaa hieman amplitudia pienentävästi, mutta aiheuttaa ennen kaikkea huomattavan vaihesiirron herätteen ja vasteen välille. Tällä on resonanssin kehittymistä häiritsevä vaikutus!



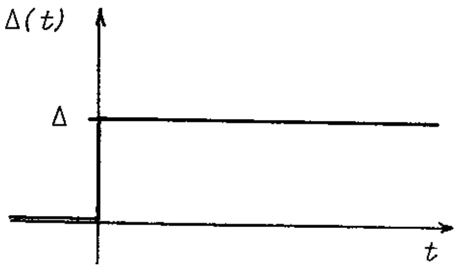
ESIMERKKI:

Kuvan kehän väli- ja yläpohja pääsevät liikkumaan vain vaakatasossa, jolloin rakenteella on vain kaksi vapausastetta. Kehän pilarien alapää saa äkillisen siirtymän Δ oikealle. Määritä kehän ylä- ja välipohjan siirtymävasteet, kun oletetaan suhteellinen viskoosi vaimennus siten, että a) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, b) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}05$. Tarkastele ajan hetkeä $t = T_1/2$, missä T_1 systeemin alin ominaisvärähdysaika.

RATKAISU:

$$\omega_1 = 0{,}6081\sqrt{k/M}\ , \quad \omega_2 = 1{,}8385\sqrt{k/M}$$

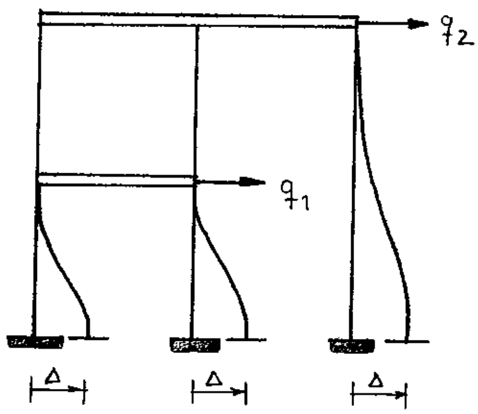
$$k = 24\,EI/L^3$$



$$[M] = M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\ , \quad [K] = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\phi}\}_1 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 0{,}35578 \\ 0{,}46786 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\phi}\}_2 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 0{,}93250 \\ -0{,}17727 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \quad \{q\} = [\Phi]\{\eta\}$$

$$[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 0{,}35578 & 0{,}93250 \\ 0{,}46786 & -0{,}17727 \end{bmatrix}$$

Ekvivalenttiset solmuvoimat:

$$Q_{01} = 2\cdot 12\,\frac{EI}{L^3}\,\Delta = k\Delta$$

$$Q_{02} = 12\,\frac{E\cdot 16I}{(2L)^3}\,\Delta = k\Delta$$

$$\Rightarrow \quad \{Q(t)\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k\Delta(t) \quad \Rightarrow \quad \{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T\{Q\} = \begin{bmatrix} 0{,}82364 \\ 0{,}75523 \end{bmatrix} k\Delta(t)/\sqrt{M}$$

a) Ei vaimennusta: $\xi_1 = \xi_2 = 0$

$$h_i(t-\tau) = \frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)\ , \quad f(\tau) \equiv 1\ , \quad \tau \geq 0$$

$$\eta_i(0) = 0 \ \& \ \dot{\eta}_i(0) = 0 \ \& \ \eta_i(t) = \mathcal{F}_{0i}\int_0^t f(\tau)\,h_i(t-\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^t f(\tau)\,h_i(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\omega_i^2}(1-\cos\omega_i t)$$

(jatkuu)

(jatkoa)

$$\begin{cases} \eta_1(t) = 0{,}82364 \frac{k}{\sqrt{M}} \Delta \cdot \frac{1}{0{,}6081^2} \frac{M}{k} (1-\cos\omega_1 t) \\ \eta_2(t) = 0{,}75523 \frac{k}{\sqrt{M}} \Delta \frac{1}{1{,}8385^2} \frac{M}{k} (1-\cos\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \eta_1(t) = 2{,}22734\, \Delta\sqrt{M}\,(1-\cos\omega_1 t) \\ \eta_2(t) = 0{,}22344\, \Delta\sqrt{M}\,(1-\cos\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}(0{,}35578\,\eta_1 + 0{,}93250\,\eta_2) \\ q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}(0{,}46786\,\eta_1 - 0{,}17727\,\eta_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\{q(t)\} = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}792\cos\omega_1 t - 0{,}208\cos\omega_2 t \\ 1 - 1{,}042\cos\omega_1 t + 0{,}040\cos\omega_2 t \end{bmatrix} \Delta$$

Komponenttien $q_1(t)$ ja $q_2(t)$ kuvaajat ovat sivuilla 129 ja 130.

Tarkastellaan ajan hetkeä $t = \frac{1}{2}T_1 = \pi/\omega_1$

$$\Rightarrow \quad \{q(\tfrac{\pi}{\omega_1})\} = \begin{bmatrix} 2{,}000 \\ 2{,}000 \end{bmatrix} \Delta$$

b) Suhteellinen viskoosi vaimennus: $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}10$

$$h_i(t-\tau) = \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_{di}(t-\tau)$$

$$f(\tau) \equiv 1 \qquad , \tau \geq 0$$

$$\eta_i(0) = 0 \quad \& \quad \dot{\eta}_i(0) = 0$$

$$\eta_i(t) = F_{0i} \int_0^t f(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau$$

$$\int_0^t f(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_{di}(t-\tau)\, d\tau$$

sijoitus $u = t-\tau \quad \Rightarrow \quad du = -d\tau$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t f(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t e^{-\zeta_i\omega_i u} \sin\omega_{di} u\, du$$

(jatkuu)

Käyttämällä taulukoita (esimerkiksi Dwight):

$$\int_0^t f(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_{di}} \Big|_0^t \frac{e^{-\zeta_i \omega_i u}(-\zeta_i \omega_i \sin\omega_{di} u - \omega_{di} \cos\omega_{di} u)}{\zeta_i^2 \omega_i^2 + \omega_{di}^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^t f(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_i^2}\left[1 - e^{-\zeta_i \omega_i t}\left(\frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \sin\omega_{di} t + \cos\omega_{di} t\right)\right]$$

$$\Rightarrow \eta_i(t) = \frac{\mathcal{F}_{oi}}{\omega_i^2}\left[1 - e^{-\zeta_i \omega_i t}\left(\frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \sin\omega_{di} t + \cos\omega_{di} t\right)\right]$$

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{M}}(0{,}35578\, \eta_1 + 0{,}93250\, \eta_2) \\ q_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{M}}(0{,}46786\, \eta_1 - 0{,}17727\, \eta_2) \end{cases}$$

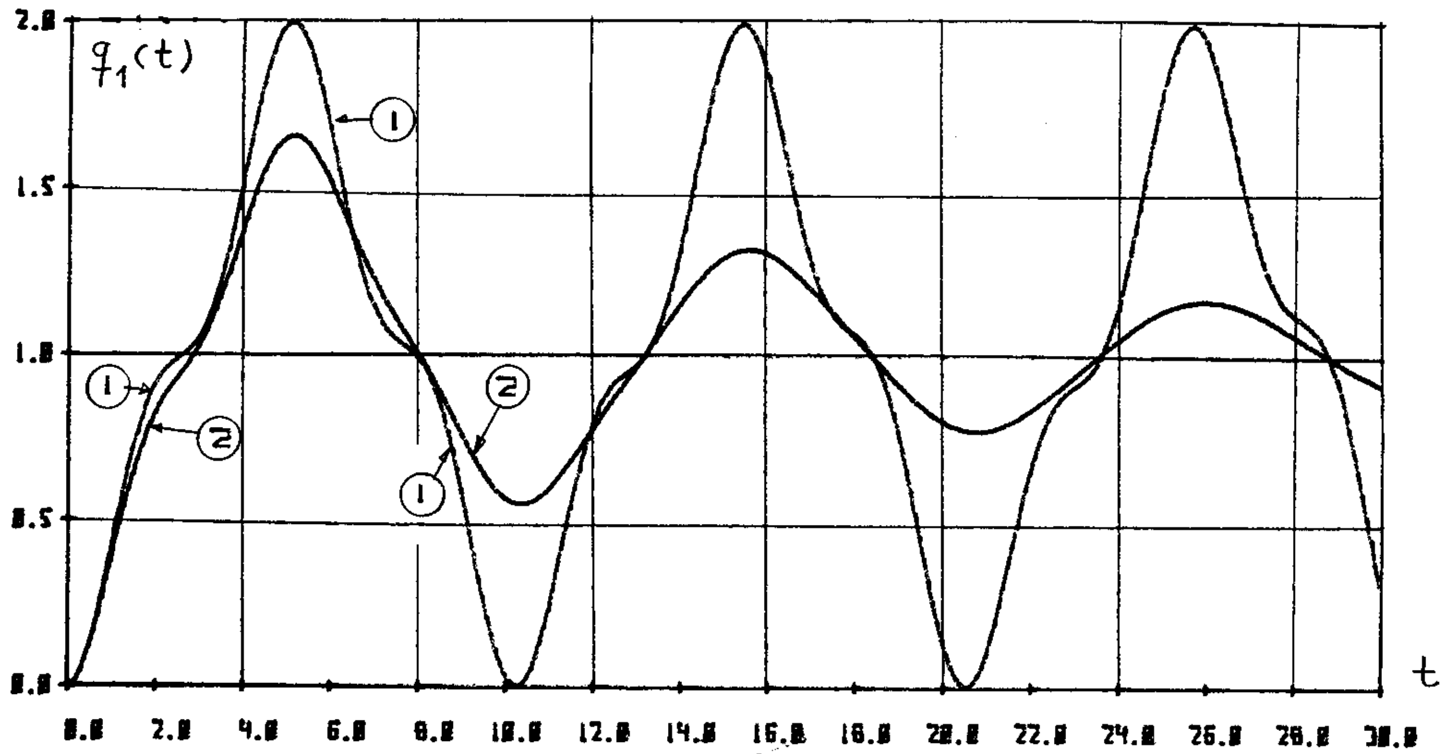
$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = \Big[1 - 0{,}79244\, e^{-\zeta_1 \omega_1 t}\left(\dfrac{\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin\omega_{d1} t + \cos\omega_{d1} t\right) + \\ \qquad - 0{,}20835\, e^{-\zeta_2 \omega_2 t}\left(\dfrac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \sin\omega_{d2} t + \cos\omega_{d2} t\right)\Big]\, \Delta \\ q_2(t) = \Big[1 - 1{,}0421\, e^{-\zeta_1 \omega_1 t}\left(\dfrac{\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin\omega_{d1} t + \cos\omega_{d1} t\right) + \\ \qquad + 0{,}03961\, e^{-\zeta_2 \omega_2 t}\left(\dfrac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \sin\omega_{d2} t + \cos\omega_{d2} t\right)\Big]\, \Delta \end{cases}$$

Ajan hetkellä $t = T_1/2 = \pi/\omega_1$, jolloin

$$\begin{cases} \eta_1(\frac{\pi}{\omega_1}) = 3{,}85143\, \Delta\sqrt{M} \\ \eta_2(\frac{\pi}{\omega_1}) = 0{,}38458\, \Delta\sqrt{M} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{q(\tfrac{\pi}{\omega_1})\} = \begin{bmatrix} 1{,}729 \\ 1{,}734 \end{bmatrix} \Delta \qquad \triangleleft$$

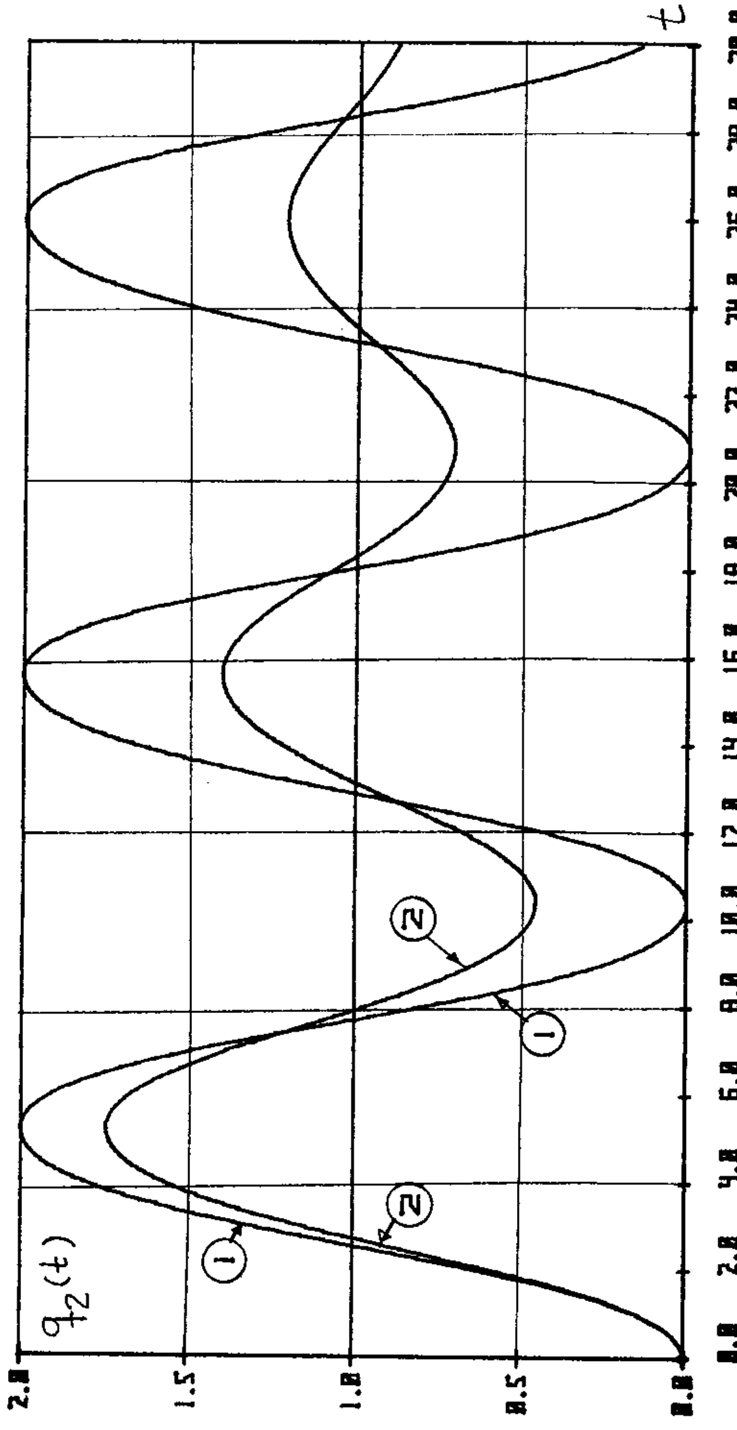
Kun verrataan tulosta sivun 127 tuloksiin, nähdään vaimennuksen hieman pienentäneen siirtymävastetta. Vasteen komponenttien kuvaajat ajan funktiona on esitetty sivuilla 129 ja 130.



VÄLIPOHJAN $q_1(t)$ VASTE

1 VAIMENTAMATON RAKENNE

2 VAIMENNETTU RAKENNE $\zeta = 0.10$



YLÄPOHJAN $q_2(t)$ VASTE

1 VAIMENTAMATON RAKENNE

2 VAIMENNETTU RAKENNE $\zeta=0.10$

6.5 Liikeyhtälöiden välitön integrointi:

6.5.1 Johdanto:

Rakenteiden dynamiikan tehtävässä (liikeyhtälö"

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q(t)\} \tag{310}$$

ratkaistaan joko normaalimuotomenetelmällä tai integroimalla liikeyhtälöä välittömästi (direct integration). Normaalimuotomenetelmän perusajatus on muuntaa liikeyhtälöt ennen integrointia niin, että ne ortogonalisoituvat eli separoituvat kukin omaksi yhtälökseen. Välittömässä integroinnissa yhtälöryhmää ryhdytään integroimaan numeerisesti välittömästi alkuarvoista muuntamatta sitä varsinaisesti erilaiseen muotoon.

Välittömässä integroinnissa käytetään differenssimenetelmää (finite difference method). Tällöin turvaudutaan pääasiassa kahteen perusideaan:

* Liikeyhtälöä ei tyydytä toteuttamaan jokaisella ajan hetkellä t, vaan tiettyinä ajan hetkinä t_i, jotka ovat yleensä tasavälein aika-akselilla, toisin sanoen $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Kussakin pisteessä t_i liikeyhtälöä pidetään kuviteltuna tasapainoyhtälönä (hitausvoima- ajattelutapa) ja tämän yhtälön ratkaisemiseen käytetään tavallisen statiikan tehtävän ratkaisualgoritmia.
* Kullakin aikavälillä Δt oletetaan kiihtyvyyden $\{\ddot{q}\}$, nopeuden $\{\dot{q}\}$ ja siirtymien $\{q\}$ muuttuvan jollakin tietyllä tavalla (esimerkiksi lineaarisesti). Tämä oletus määrää suurelta osin ratkaisun tarkkuuden, stabiiliuden ja kalleuden.

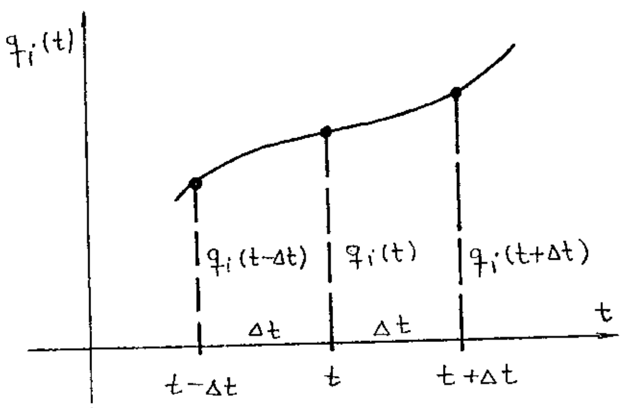
Oletetaan, että hetkellä $t=0$ tunnetaan $\{q(0)\}$ ja $\{\dot{q}(0)\}$, jolloin liikeyhtälöstä (310) saadaan

$$\{\ddot{q}(0)\} = [M]^{-1}(\{P(0)\} - [C]\{\dot{q}(0)\} - [K]\{q(0)\}) \tag{311}$$

Jos $[M]$ on singulaarinen, esimerkiksi keskitetty, jossa on nollahitaustermejä, niin ne vapausasteet pitää ensin tiivistää pois.

Välittömän integroinnin menetelmiä on kehitetty useita. Ne voidaan jakaa eksplisiittisiin menetelmiin ja implisiittisiin menetelmiin.
Edellisen menetelmän liikiratkaisu $\{q(t+\Delta t)\}$ määritetään toteuttamalla liikeyhtälö (310) hetkellä t, mutta jälkimmäisen ryhmän menetelmissä hetkellä $t+\Delta t$.
Eksplisiittisistä menetelmistä mainittakoon keskeisdifferenssin menetelmä. Implisiittisistä menetelmistä mainittakoon WILSONin θ-menetelmä, HOUBOLTin menetelmä ja NEWMARKin menetelmä.

6.5.2 Keskeisdifferenssimenetelmä:



Keskeisdifferenssimenetelmä on eksplisiittinen integrointimenetelmä.
Perusajatuksena on kehittää hetkillä $t-\Delta t$ ja $t+\Delta t$ nopeus $\dot{q}_i$ differenssiosamääräksi

$$\dot{q}_i(t-\Delta t) \approx \frac{q_i(t) - q_i(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\dot{q}_i(t+\Delta t) \approx \frac{q_i(t+\Delta t) - q_i(t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_i(t) \approx \frac{\dot{q}_i(t+\Delta t) - \dot{q}_i(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2}[q_i(t+\Delta t) - 2q_i(t) + q_i(t-\Delta t)]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_i(t) \approx \frac{1}{2\Delta t}(q_i(t+\Delta t) - q_i(t-\Delta t))$$

Siis

$$\boxed{\begin{aligned} \{\ddot{q}(t)\} &= \frac{1}{(\Delta t)^2}[\{q(t+\Delta t)\} - 2\{q(t)\} + \{q(t-\Delta t)\}] \\ \{\dot{q}(t)\} &= \frac{1}{2\Delta t}[\{q(t+\Delta t)\} - \{q(t-\Delta t)\}] \end{aligned}} \tag{312}$$

Kirjoitetaan liikeyhtälö hetkellä t

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \tag{313}$$

Liikeyhtälöstä (313) ja yhteyksistä (312) seuraa

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}[M]+\frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{q(t+\Delta t)\} = \{Q(t)\}-\left([K]-\frac{2}{\Delta t^2}[M]\right)\{q(t)\}+ \\ -\left(\frac{1}{\Delta t^2}[M]-\frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{q(t-\Delta t)\} \tag{314}$$

Yhtälöstä (314) ratkaistaan statiikan ohjelmalohkolla uusi siirtymä $\{q(t+\Delta t)\}$. Ensimmäisellä askeleella yhtälöa (314) sovelletaan hetkellä $t=\Delta t$. Tällöin tarvitaan $\{q(0)\}$ ja $\{q(-\Delta t)\}$, joista edellinen saadaan alkuarvoista, mutta jälkimmäistä varten tarvitaan erityinen <u>aloitusalgoritmi</u>. Tämä saadaan seuraavasti:
Sovelletaan lausekkeita $\{\dot q(t)\}$ ja $\{\ddot q(t)\}$ hetkellä $t=0$, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \{\ddot q(0)\} = \frac{1}{\Delta t^2}(\{q(\Delta t)\}-2\{q(0)\}+\{q(-\Delta t)\}) \\ \{\dot q(0)\} = \frac{1}{2\Delta t}(\{q(\Delta t)\}-\{q(-\Delta t)\}) \end{cases} \tag{315}$$

Eliminoimalla näistä yhtälöistä $\{q(\Delta t)\}$ ja ratkaisemalla $\{q(-\Delta t)\}$ saadaan

$$\{q(-\Delta t)\} = \{q(0)\} - \Delta t\{\dot q(0)\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot q(0)\} \tag{316}$$

$\{\dot q(0)\}$ on annettu alkuarvo ja $\{\ddot q(0)\}$ lasketaan yhtälöstä (311). Nyt tunnetaan $\{q(0)\}$ ja $\{q(-\Delta t)\}$, joten startti yhtälössä (314) voi tapahtua.

Keskeisdifferenssimenetelmä on erityisen tehokas silloin, kun vaimennus $[C]\equiv[0]$ ja massamatriisi on lävistäjämatriisi, sillä tällöin ei matriisia $[M]/\Delta t^2 + [C]/2\Delta t$ tarvitse kolmioida. Itse asiassa matriiseja $[M]$ ja $[K]$ ei tarvitse muodostaa vaan laskenta voidaan suorittaa elementti elementiltä. Tämä mahdollistaa hyvinkin suurien systeemien käsittelyn melko pienellä keskusmuistilla ja hyvin tehokkaasti. Jos rakenteessa on paljon samanlaisia elementtejä, niin laskenta on erittäin tehokas.

Keskeisdifferenssimenetelmän heikkoutena on se, että se edellyttää tiettyä kriittistä aika-askelta Δt_{cr} pienemmän askeleen käyttöä siten, että

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = T_n / \pi \tag{317}$$

missä $T_n = 2\pi/\omega_n$ on systeemin pienin ominaisvärähdysaika (ja vastaa siis suurinta ominaiskulmataajuutta). Massattomat vapausasteet on siis tiivistettävä pois ennen laskentaa. Integrointimenetelmää, jossa on voimassa vaatimus integrointiaskeleelle $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$, sanotaan ehdollisesti stabiiliksi (conditionally stable).

Laskenta kannattaa järjestää seuraavasti:

1. Muodosta $[M]$, $[K]$, $[C]$
2. Aseta $\{q\} = \{q(0)\}$ ja $\{\dot{q}\} = \{\dot{q}(0)\}$
3. Kolmioi $[M] = [L][D][L]^T$
4. Valitse $\Delta t < \Delta t_{cr}$ ja laske vakiot

   $a_0 = \dfrac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \dfrac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = 2a_0$, $a_3 = \dfrac{1}{a_2}$

5. Laske $\{\hat{P}(0)\} = \{Q(0)\} - [K]\{q(0)\} - [C]\{\dot{q}(0)\}$

   $\{\ddot{q}(0)\} = [M]^{-1}\{\hat{P}(0)\}$

6. Laske $\{q(-\Delta t)\} = \{q(0)\} - \Delta t\,\{\dot{q}(0)\} + a_3\{\ddot{q}(0)\}$
7. $[\hat{M}] = a_0[M] + a_1[C]$
8. Kolmioi $[\hat{M}] = [L][D][L]^T$

Laske jokaisessa pisteessä t_i:

1. $\{\hat{P}(t)\} = \{Q(t)\} - ([K] - a_2[M])\{q(t)\} - (a_0[M] - a_1[C])\{q(-\Delta t)\}$
2. Ratkaise $[L][D][L]^T\{q(t+\Delta t)\} = \{\hat{P}(t)\}$
3. Jos halutaan, laske

   $\{\ddot{q}(t)\} = a_0(\{q(t+\Delta t)\} - 2\{q(t)\} + \{q(t-\Delta t)\})$

   $\{\dot{q}(t)\} = a_1(\{q(t+\Delta t)\} - \{q(t-\Delta t)\})$

ESIMERKKI:

Tarkastellaan kahden vapausasteen systeemiä, jonka liikeyhtälö on

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} , \quad \{q(0)\} = 0 , \quad \{\dot{q}(0)\} = 0$$

Määritä systeemin vaste $\{q(t)\}$ keskeisdifferenssimenetelmällä käyttämällä aika-askelta a) $T_2/10$, b) $10\,T_2$

RATKAISU:

Laskemalla saadaan ominaistaajuudeksi $\omega_2 = \sqrt{5}$, joten

$$T_2 = 2\pi/\sqrt{5} \approx 2,8$$

a) $\Delta t = T_2/10 = 0,28$, $a_0 = 1/0,28^2 = 12,8$, $a_1 = 1/(2\cdot 0,28) = 1,79$
$a_2 = 2\cdot 12,8 = 25,5$, $a_3 = 1/25,5 = 0,0392$

starttaus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}(0)\} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\{q(0)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\ddot{q}(0)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\{q(-\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0,28\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,0392\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,392 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{M}] = 12,8\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1,79\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix}$$

$$\{\hat{R}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45,0 & 2 \\ 2 & 21,5 \end{bmatrix}\{q(t)\} - \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix}\{q(t-\Delta t)\}$$

$$\Rightarrow \quad \lceil 25,5 \quad 12,8 \rfloor \{q(t+\Delta t)\} = \{\hat{R}\}$$

Askeltamalla 12 kertaa saadaan tulokset:

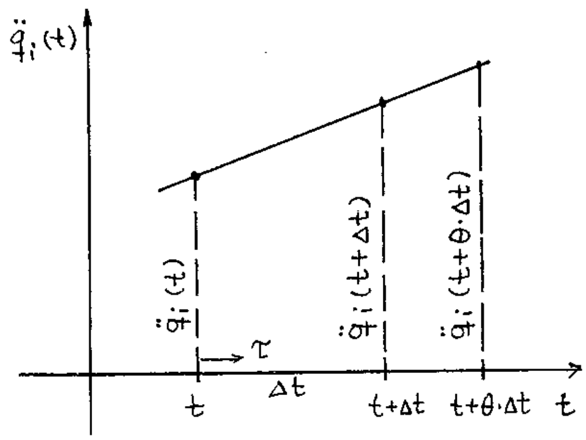
t	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	...	$12\Delta t$	
$\{\tilde{q}(t)\}$	0,000 0,392	0,0307 1,45	0,168 2,83	0,487 4,14	1,02 5,02	... ...	1,02 2,60	keskeisdifferenssimenetelmä
$\{q(t)\}$	0,003 0,382	0,038 1,41	0,176 2,78	0,486 4,09	0,996 5,00	... ...	1,157 2,489	tarkka tulos normaalimuotomenet.

b) Kuten edellä saadaan askelta $\Delta t = 10\,T_2 = 28$ käyttäen

$$\{q(\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,83\cdot 10^3 \end{bmatrix} , \quad \{q(2\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 3,03\cdot 10^6 \\ -1,21\cdot 10^7 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

Tulokset kasvavat seuraavilla askeleilla edelleen. On selvää, että näin suurta askelta käytettäessä tulokset ovatkin hyvin epätarkkoja. Oleellista on kuitenkin se, että tulokset kasvavat rajusti, joten menetelmä on tässä tapauksessa <u>numeerisesti epästabiili</u>.

6.5.3 WILSONin θ-menetelmä:



Kuva Lineaarinen kiihtyvyys-oletus.

WILSONin θ-menetelmä (E.L.Wilson, I.Farhoomand, K.J.Bathe, Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures, Int.J.of Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 1, 1973, pp. 241-252.) on eräs implisiittisistä askeltavista integrointimenetelmistä". Tietyin edellytyksin menetelmä on ehdoitta stabiili !

Menetelmän erityispiirre on se, että kiihtyvyys $\{\ddot{q}\}$ oletetaan muuttuvan lineaarisesti aika-askeleen ja tämän jatkeen aikana eli hetkestä t hetkeen $t+\theta\cdot\Delta t$, missä $\theta \geqq 1$. Jos $\theta = 1$ on kyseessä lineaarisen kiihtyvyyden menetelmä.

Merkitään hetkestä t mitattua aikaa τ. Lineaarisen kiihtyvyyden oletuksesta seuraa

$$\{\ddot{q}(t+\tau)\} = \{\ddot{q}(t)\} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) \tag{318}$$

Koska $\{\ddot{q}(t)\}$ ja $\{\ddot{q}(t+\theta\cdot\Delta t)\}$ ovat kiinteät ja $dt = d\tau$, niin

$$\{\ddot{q}(t+\tau)\} = \frac{d}{dt}\{\dot{q}(t+\tau)\} = \frac{d}{d\tau}\{\dot{q}(t+\tau)\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau \{\ddot{q}(t+\tau)\}d\tau = \int_0^\tau \frac{d}{d\tau}\{\dot{q}(t+\tau)\}d\tau = \Big/_0^\tau \{\dot{q}(t+\tau)\} = \{\dot{q}(t+\tau)\} - \{\dot{q}(t)\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau \{\ddot{q}(t+\tau)\}d\tau = \{\dot{q}(t+\tau)\} - \{\dot{q}(t)\} \overset{(318)}{=} \{\ddot{q}(t)\}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\cdot\Delta t}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\{\dot{q}(t+\tau)\} = \{\dot{q}(t)\} + \{\ddot{q}(t)\}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\cdot\Delta t}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\cdot\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) \tag{319}$$

Integroimalla vielä kerran muuttujan τ suhteen saadaan

$$\{q(t+\tau)\} = \{q(t)\} + \{\dot{q}(t)\}\tau + \{\ddot{q}(t)\}\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) \tag{320}$$

Soveltamalla yhtälöitä (319) & (320) hetkellä $\tau = \theta \cdot \Delta t$ saadaan

$$\{\dot{q}(t+\theta\Delta t)\} = \{\dot{q}(t)\} + \frac{\theta\Delta t}{2}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) \tag{321}$$

$$\{q(t+\theta\Delta t)\} = \{q(t)\} + \theta\Delta t\{\dot{q}(t)\} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) \tag{322}$$

Ratkaistaan yhtälöistä (321) & (322) suureet $\{\dot{q}(t+\theta\Delta t)\}$ ja $\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\}$, jolloin päädytään yhtälöihin

$$\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\left(\{q(t+\theta\Delta t)\} - \{q(t)\}\right) - \frac{6}{\theta\Delta t}\{\dot{q}(t)\} - 2\{\ddot{q}(t)\} \tag{323}$$

$$\{\dot{q}(t+\theta\Delta t)\} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(\{q(t+\theta\Delta t)\} - \{q(t)\}\right) - 2\{\dot{q}(t)\} - \frac{\theta\Delta t}{2}\{\ddot{q}(t)\} \tag{324}$$

Tavoitteena ovat hetken $\tau = \Delta t$ siirtymä-, nopeus- ja kiihtyvyysvektori. Niihin päästään käsiksi kirjoittamalla liikeyhtälö hetkellä $t + \theta\Delta t$

$$[M]\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} + [C]\{\dot{q}(t+\theta\Delta t)\} + [K]\{q(t+\theta\Delta t)\} = \{Q(t+\theta\Delta t)\} \tag{325}$$

Liikeyhtälössä (325) kuormitusvektori muunnetaan vastaamaan lineaarisesti muuttuvaa kiihtyvyyttä

$$\{Q(t+\theta\Delta t)\} = \{Q(t)\} + \theta\left(\{Q(t+\Delta t)\} - \{Q(t)\}\right) \tag{326}$$

Sijoittamalla (326), (323) & (324) liikeyhtälöön (325) saadaan merkinnällä

$$[\hat{M}] = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M] + \frac{3}{\theta\Delta t}[C] + [K] \tag{327}$$

ratkaisuyhtälö

$$[\hat{M}]\{q(t+\theta\Delta t)\} = \{Q(t+\theta\Delta t)\} - \left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[M] - \frac{3}{\theta\Delta t}[C]\right)\{q(t)\} + \left(\frac{6}{\theta\Delta t}[M] + 2[C]\right)\{\dot{q}(t)\} + \left(2[M] + \frac{\theta\Delta t}{2}[C]\right)\{\ddot{q}(t)\} \tag{328}$$

Yhtälöstä (328) ratkaistaan $\{q(t+\theta\Delta t)\}$ ja sijoitetaan yhtälöön (323), jolloin kiihtyvyys $\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\}$ on lausuttu vektorien $\{\ddot{q}(t)\}$, $\{\dot{q}(t)\}$ ja $\{q(t)\}$ avulla. Kun tuloksissa (318), (319) ja (320) sijoitetaan $\tau = \Delta t$ saadaan

$$\boxed{\begin{aligned}
\{\ddot{q}(t+\Delta t)\} &= \{\ddot{q}(t)\} + \frac{1}{\theta}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) && (329)\\
\{\dot{q}(t+\Delta t)\} &= \{\dot{q}(t)\} + \Delta t\{\ddot{q}(t)\} + \frac{\Delta t}{2\theta}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) && (330)\\
\{q(t+\Delta t)\} &= \{q(t)\} + \Delta t\{\dot{q}(t)\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{q}(t)\} + \frac{\Delta t^2}{6\theta}\left(\{\ddot{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{\ddot{q}(t)\}\right) && (331)
\end{aligned}}$$

Ratkaisuyhtälöt ovat (328), (323), (329), (330), (331) tässä järjestyksessä.

WILSONin θ-menetelmä ei vaadi erityistä starttialgoritmia. Menetelmä on implisiittinen, sillä liikeyhtälöt toteutettiin hetkellä $t+\theta\Delta t$, josta on seurauksena se, että jäykkyysmatriisi $[K]$ joudutaan kolmioimaan. Voidaan osoittaa, että menetelmä on ehdoitta stabiili, kun $\theta \geqq 1{,}37$.

Menetelmä kannattaa järjestää seuraavasti:

1. Muodosta matriisit $[K]$, $[C]$ ja $[M]$.
2. Aseta $\{q\} = \{q(0)\}$ ja $\{\dot q\} = \{\dot q(0)\}$
3. Kolmioi $[M] = [L][D][L]^T$
4. Laske $\{\ddot q(0)\}$: $[L][D][L]^T\{\ddot q(0)\} = \{Q(0)\} - [K]\{q(0)\} - [C]\{\dot q(0)\}$
5. Valitse aikaväli Δt ja aseta $\theta = 1{,}40$ (tavallisesti).
   $a_0 = 6/\theta^2\Delta t^2$, $a_1 = 3/\theta\Delta t$, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = \theta\Delta t/2$, $a_4 = a_0/\theta$
   $a_5 = -a_2/\theta$, $a_6 = 1 - 3/\theta$, $a_7 = \Delta t/2$, $a_8 = \Delta t^2/6$
6. Muodosta $[\hat K] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$
7. Kolmioi $[\hat K] = [L][D][L]^T$

Laske jokaisessa pisteessä $t = t_i$

1. $$\{\hat Q(t+\theta\Delta t)\} = \{Q(t)\} + \theta(\{Q(t+\Delta t)\} - \{Q(t)\}) + $$
   $$+ [M](a_0\{q(t)\} + a_2\{\dot q(t)\} + 2\{\ddot q(t)\}) +$$
   $$+ [C](a_1\{q(t)\} + 2\{\dot q(t)\} + a_3\{\ddot q(t)\})$$
2. Ratkaise $[L][D][L]^T\{q(t+\theta\Delta t)\} = \{\hat Q(t+\theta\Delta t)\}$
3. Laske $$\{\ddot q(t+\Delta t)\} = a_4(\{q(t+\theta\Delta t)\} - \{q(t)\}) + a_5\{\dot q(t)\} + a_6\{\ddot q(t)\}$$
   $$\{\dot q(t+\Delta t)\} = \{\dot q(t)\} + a_7(\{\ddot q(t+\Delta t)\} + \{\ddot q(t)\})$$
   $$\{q(t+\Delta t)\} = \{q(t)\} + \Delta t\{\dot q(t)\} + a_8(\{\ddot q(t+\Delta t)\} + 2\{\ddot q(t)\})$$

ESIMERKKI:

Tarkastellaan kahden vapausasteen systeemiä, jonka liikeyhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \{q(0)\} = \{0\}, \quad \{\dot{q}(0)\} = \{0\}$$

Määritä systeemin vaste $\{q(t)\}$ *WILSON*in θ-menetelmällä käyttämällä aika-askelta a) $T_2/10$, b) $10\,T_2$.

RATKAISU:

Laskemalla saadaan $\omega_2 = \sqrt{5}$, jolloin $T_2 = 2\pi/\sqrt{5} = 2{,}8$

a) $\Delta t = T_2/10 = 0{,}28$, $\theta = 1{,}40$

$\Rightarrow$ $a_0 = 39{,}0$, $a_1 = 7{,}65$, $a_2 = 15{,}3$, $a_3 = 0{,}196$, $a_4 = 27{,}9$

$a_5 = -10{,}9$, $a_6 = -1{,}14$, $a_7 = 0{,}14$, $a_8 = 0{,}0131$

$$\{q(0)\} = \{0\} \;\&\; \{\dot{q}(0)\} = \{0\} \Rightarrow \{\ddot{q}(0)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39{,}0\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84{,}1 & -2 \\ -2 & 43{,}0 \end{bmatrix}$$

Tämä kolmioidaan, minkä jälkeen kutakin aika-askelta varten lasketaan

$$\{\hat{Q}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(39{,}0\{q(t)\} + 15{,}8\{\dot{q}(t)\} + 2\{\ddot{q}(t)\})$$

$$[\hat{K}]\{q(t+\theta\Delta t)\} = \{\hat{Q}(t+\theta\Delta t)\} \Rightarrow \{q(t+\theta\Delta t)\}$$

$$\Rightarrow \{\ddot{q}(t+\Delta t)\} = 27{,}9(\{q(t+\theta\Delta t)\} - \{q(t)\}) - 10{,}9\{\dot{q}(t)\} - 1{,}14\{\ddot{q}(t)\}$$

$$\{\dot{q}(t+\Delta t)\} = \{\dot{q}(t)\} + 0{,}14(\{\ddot{q}(t+\Delta t)\} + \{\ddot{q}(t)\})$$

$$\{q(t+\Delta t)\} = \{q(t)\} + 0{,}28\{\dot{q}(t)\} + 0{,}0131(\{\ddot{q}(t+\Delta t)\} + 2\{\ddot{q}(t)\})$$

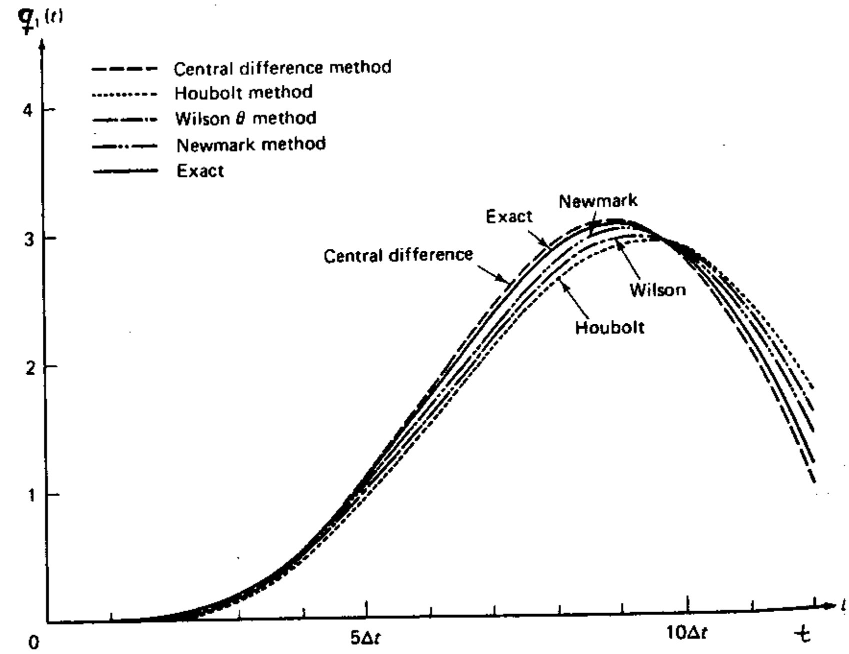
Näistä seuraa oheisen taulukon tulokset:

t	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	...	$12\Delta t$	
$\{\tilde{q}(t)\}$	0,00605 0,366	0,0525 1,34	0,196 2,64	0,490 3,92	0,952 4,88	... ...	1,54 2,29	*WILSON*in θ-menetelmä
$\{q(t)\}$	0,003 0,382	0,038 1,41	0,176 2,78	0,486 4,09	0,996 5,00	... ...	1,157 2,489	Tarkka tulos normaalimuotomenet.

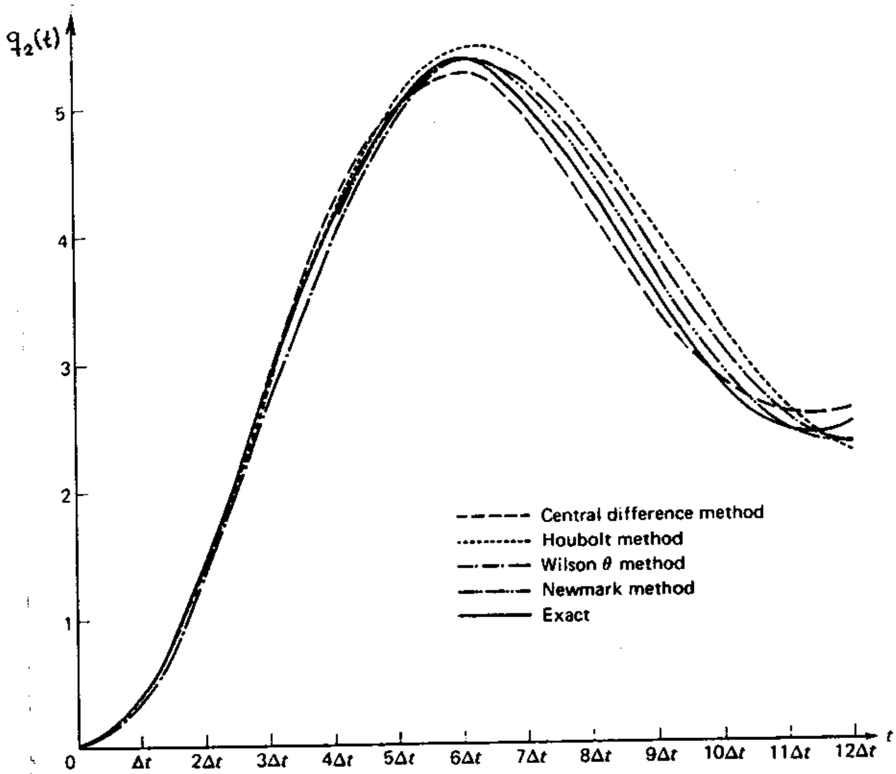
b) $\Delta t = 28 = 10T_2$

Tulokset tulevat hyvin virheellisiä, mutta oleellista on, että ne eivät kasva ajan mukana, vaan päinvastoin vaimenevat kohti staattista ratkaisua!

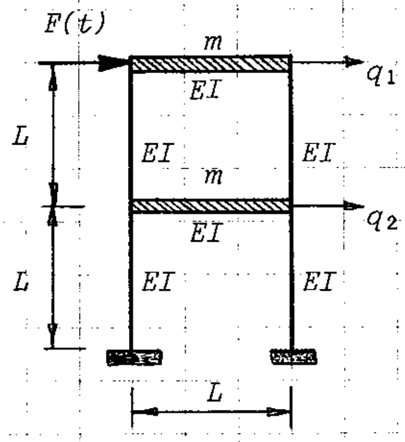
Oheisissa kuvissa on edellisen tehtävän tulokset graafisesti. Siinä on WILSONin θ-menetelmän lisäksi myös tarkka ratkaisu, keskeisdifferenssimenetelmän ratkaisu sekä HOUBOLTin ja NEWMARKin menetelmän ratkaisut. Tulokset ovat melko huonoja, joten aika-askel $\Delta t = T_2/10 = 0,28$ on ilmeisesti liian suuri.

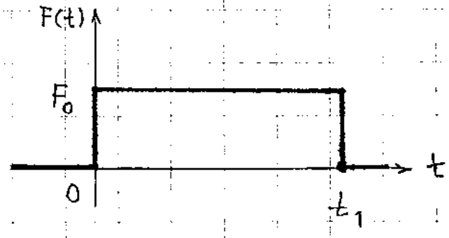


(a)



(b)





ESIMERKKI:

Kuvan kehärakenteen yläpaarteelle vaikuttaa pulssimainen kuormitus $F(t)$, jonka pulssin pituus on t_1 ja pulssin voimakkuus F_0. Määritä kehän siirtymävaste *Wilsonin* θ-menetelmällä ajan hetkillä $t = \frac{1}{4}t_1$, $\frac{1}{2}t_1$, $\frac{3}{4}t_1$, t_1, $\frac{5}{4}t_1$, $\frac{3}{2}t_1$. Valitse parametrille θ arvo 1,40.

RATKAISU:

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 13{,}412 & -17{,}647 \\ -17{,}647 & 40{,}588 \end{bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{F(t)\}$$

$$\{F(t)\} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t = \tfrac{1}{4}t_1 \,, \quad \theta = 1{,}40$$

$$\{q(0)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\dot{q}(0)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{F(0)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} = \frac{48{,}98}{t_1^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t} = \frac{8{,}571}{t_1}, \quad a_2 = 2a_1 = \frac{17{,}14}{t_1}$$

$$a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2} = 0{,}1750\, t_1, \quad a_4 = \frac{1}{\theta}a_0 = \frac{34{,}99}{t_1^2}, \quad a_5 = -\frac{1}{\theta}a_2 = -\frac{12{,}24}{t_1}$$

$$a_6 = 1 - \frac{3}{\theta} = -1{,}143, \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2} = 0{,}125\, t_1, \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6} = 0{,}01042\, t_1^2$$

$$\{\ddot{q}(0)\} = [m]^{-1}(\{F(0)\} - [k]\{q(0)\}) = \frac{F_0}{m}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valitaan $t_1 = \frac{1}{4}T_1$, missä $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ ($\omega_1 = 2{,}174\sqrt{EI/mL^3}$).
Tällöin $t_1 \approx 0{,}7225\sqrt{\frac{mL^3}{EI}}$

$$\Rightarrow$$

$$[\hat{k}] = [k] + a_0[m] = \frac{EI}{L^3}\left(\begin{bmatrix} 13{,}412 & -17{,}647 \\ \text{sym.} & 40{,}588 \end{bmatrix} + \frac{48{,}98}{t_1^2}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{k}] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 107{,}24 & -17{,}647 \\ \text{sym.} & 134{,}42 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{k}]^{-1} = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}009531 & 0{,}001251 \\ 0{,}001251 & 0{,}007604 \end{bmatrix}$$

(jatkuu)

<u>1. askel</u>: $t=0$, $\Delta t = \frac{1}{4} t_1$, $t_1 = 0{,}7225\sqrt{mL^3/EI}$

$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \{F(0)\} + \theta\left(\{F(\Delta t)\} - \{F(0)\}\right) + [m]\left(a_0\{\overset{0}{\cancel{q(0)}}\} + a_2\{\overset{0}{\cancel{\dot{q}(0)}}\} + 2\{\ddot{q}(0)\}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F_0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1{,}40\cdot\left(\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F_0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{F_0}{m} = \begin{bmatrix} 1{,}450 \\ 0 \end{bmatrix} F_0$$

$$\{q(t+\theta\Delta t)\} = [\hat{k}]^{-1}\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \frac{F_0L^3}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}01382 \\ 0{,}001814 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{q}(\Delta t)\} = a_4\left(\{q(t+\theta\Delta t)\} - \{\underset{0}{\cancel{q(0)}}\}\right) + a_5\{\underset{0}{\cancel{\dot{q}(0)}}\} + a_6\{\ddot{q}(0)\} = \begin{bmatrix} 0{,}3551 \\ 0{,}1216 \end{bmatrix}\frac{F_0}{m}$$

$$\{\dot{q}(\Delta t)\} = \{\underset{0}{\cancel{\dot{q}(0)}}\} + a_7\left(\{\ddot{q}(\Delta t) + \{\ddot{q}(0)\}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}1069 \\ 0{,}01520 \end{bmatrix}\frac{F_0 t_1}{m}$$

$$\{q(\Delta t)\} = \{\underset{0}{\cancel{q(0)}}\} + \Delta t\{\underset{0}{\cancel{\dot{q}(0)}}\} + a_8\left(\{\ddot{q}(\Delta t)\} + 2\{\ddot{q}(0)\}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}007371 \\ 0{,}0006614 \end{bmatrix}\frac{F_0L^3}{EI}$$

<u>2. askel</u>: $t = \Delta t$

$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \{F(\Delta t)\} + \theta\left(\{F(2\Delta t)\} - \{F(\Delta t)\}\right) + [m]\left(a_0\{q(\Delta t)\} + a_2\{\dot{q}(\Delta t)\} + 2\{\ddot{q}(\Delta t)\}\right)$$

$$\Rightarrow \{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 4{,}2341 \\ 0{,}5658 \end{bmatrix} F_0$$

$$\{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} = [k]^{-1}\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}04107 \\ 0{,}009599 \end{bmatrix}\frac{F_0L^3}{EI}$$

$$\{\ddot{q}(2\Delta t)\} = a_4\left(\{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} - \{q(\Delta t)\}\right) + a_5\{\dot{q}(\Delta t)\} + a_6\{\ddot{q}(\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}5440 \\ 0{,}2740 \end{bmatrix}\frac{F_0}{m}$$

$$\{\dot{q}(2\Delta t)\} = \{\dot{q}(\Delta t)\} + a_7\left(\{\ddot{q}(2\Delta t)\} + \{\ddot{q}(\Delta t)\}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}2193 \\ 0{,}06465 \end{bmatrix}\frac{F_0 t_1}{m}$$

$$\{q(2\Delta t) = \{q(\Delta t)\} + \Delta t\{\dot{q}(\Delta t)\} + a_8\left(\{\ddot{q}(2\Delta t) + 2\{\ddot{q}(\Delta t)\}\right)$$

$$\Rightarrow \{q(2\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}02814 \\ 0{,}005458 \end{bmatrix}\frac{F_0L^3}{EI}$$

<u>3. askel</u>: $t = 2\Delta t$

$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 8{,}4872 \\ 2{,}1682 \end{bmatrix} F_0 \Rightarrow \{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}08360 \\ 0{,}02710 \end{bmatrix}\frac{F_0L^3}{EI}$$

$$\{\ddot{q}(3\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}4115 \\ 0{,}3462 \end{bmatrix}\frac{F_0}{m} \Rightarrow \{\dot{q}(3\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}3387 \\ 0{,}1422 \end{bmatrix}\frac{F_0 t_1}{m}$$

$$\Rightarrow \{q(3\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0{,}06492 \\ 0{,}01876 \end{bmatrix}\frac{F_0L^3}{EI}$$

(jatkuu)

4. askel : $t = 3\Delta t$

$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 13,720 \\ 4,8900 \end{bmatrix} F_0 \quad \Rightarrow \quad \{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,1369 \\ 0,05435 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$

$$\{\ddot{q}(4\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,2088 \\ 0,2494 \end{bmatrix} \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{q}(4\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,4162 \\ 0,2167 \end{bmatrix} \frac{F_0 t_1}{m}$$

$$\Rightarrow \{q(4\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,1147 \\ 0,1054 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$

5. askel : $t = 4\Delta t = t_1$

$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 18,113 \\ 14,103 \end{bmatrix} F_0 \quad \Rightarrow \quad \{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,1903 \\ 0,1299 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$

$$\{\ddot{q}(5\Delta t)\} = \begin{bmatrix} -0,2655 \\ -1,2953 \end{bmatrix} \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{q}(5\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,4091 \\ 0,08596 \end{bmatrix} \frac{F_0 t_1}{m}$$

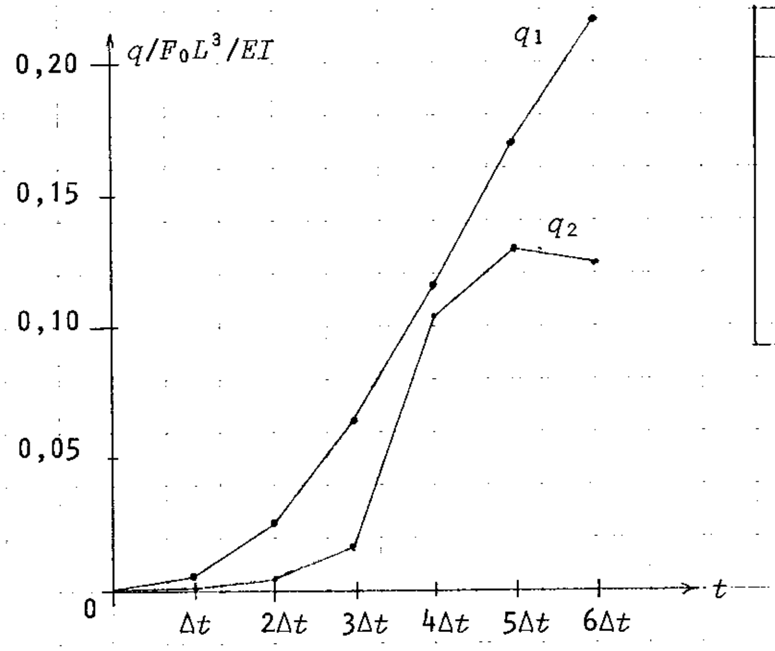
$$\Rightarrow \{q(5\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,1699 \\ 0,1294 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$

6. askel : $t = 5\Delta t$

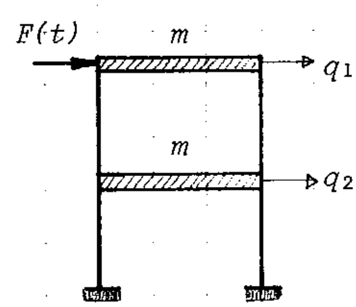
$$\{\hat{F}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 22,423 \\ 11,025 \end{bmatrix} F_0 \quad \Rightarrow \quad \{\hat{q}(t+\theta\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,2275 \\ 0,1119 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$

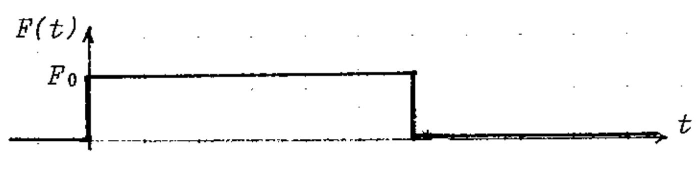
$$\{\ddot{q}(6\Delta t)\} = \begin{bmatrix} -0,8430 \\ -0,7447 \end{bmatrix} \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{q}(6\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,2705 \\ -0,02334 \end{bmatrix} \frac{F_0 t}{m}$$

$$\Rightarrow \{q(6\Delta t)\} = \begin{bmatrix} 0,2158 \\ 0,1225 \end{bmatrix} \frac{F_0 L^3}{EI}$$



t	q_1	q_2
Δt	0,00737	0,000661
$2\Delta t$	0,02814	0,005458
$3\Delta t$	0,06492	0,01876
$4\Delta t$	0,1147	0,1054
$5\Delta t$	0,1699	0,1294
$6\Delta t$	0,2158	0,1225





6.5.4 Välittömän integroinnin tarkkuus:

Normaalimuotomenetelmää käytettäessä hyödynnetään se tieto, että pakkovärähtelyssä yleensä vain alimmat ominaismuodot heräävät ja vaikuttavat oleellisesti tulokseen. Sama ilmiö on sovellettavissa myös välittömän integroinnin yhteydessä.
Rakenteen pakkovärähtelytehtävän välittömässä integroinnissa kannattaa käyttää implisiittistä integrointia, kuten esimerkiksi WILSONin θ-menetelmää, joka on ehdoitta stabiili. Se suodattaa automaattisesti ylempien ominaismuotojen vaikutuksen ratkaisusta, jos aika-askel Δt valitaan sopivasti. Tämä saattaa olla tarpeen kahdestakin syystä. Ensinnäkin FEM-malli ei riitä ylempien ominaismuotojen hallintaan. Toisaalta kuormituksen FOURIER-sarjasta ilmenee, että vain alimmat taajuudet ovat merkittäviä. Jos pakkovoiman ylin merkittävä kulmataajuus on ω_u, olisi FEM-mallin syytä ylettyä kulmataajuuteen $\omega_{co} = 4\omega_u$ (cut off) riittävän tarkasti. Vastaavasti välittömän integroinnin aika-askeleeksi voidaan ottaa $\Delta t = T_{co}/20 = \pi/10\omega_{co}$.
Suuntaa antava resepti voisi olla seuraava:

1. Muodosta kuormituksen FOURIER-sarja ja totea siitä, mitkä ovat oleellisia kulmataajuuksia. Merkitään ylintä kulmataajuutta ω_u.
2. Laadi rakenteen FEM-malli niin, että se ratkaisee statiikan riittävän tarkasti ja pystyy käsittelemään ominaiskulmataajuudet aina arvoon $\omega_{co} = 4\,\omega_u$ saakka.
3. Valitse ehdoitta stabiili integroimismenetelmä, kuten esimerkiksi WILSONin θ-menetelmä ja sille aika-askel

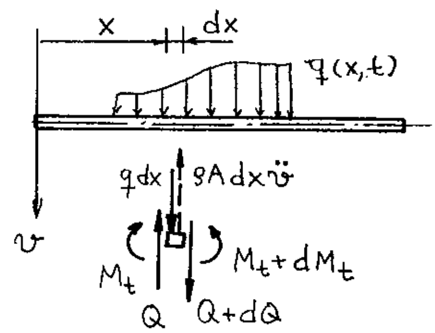
$$\Delta t \leqq T_{co}/20 = \pi/10\,\omega_{co} = \pi/40\,\omega_u \qquad (332)$$

Yleensä implisiittisen integroinnin yhteydessä kannattaa käyttää korkeampiasteisia elementtejä, kuten 8-solmuista tasoelementtiä ja 21-solmuista solidielementtiä. Tällöin on syytä soveltaa konsistenttia massamatriisia ja kuormitusvektoria.

7 SAUVARAKENTEEN HARMONISEN LIIKKEEN TARKKA RATKAISEMINEN

7.1 Suoran, tasapaksun sauvan liikeyhtälö:

Aikaisemmissa luvuissa esitetyssä FEM-perusteisessa rakenteiden dynamiikan tehtävän analysoinnissa seurattiin sauvarakenteen joidenkin pisteiden, esimerkiksi nurkkapisteiden, liikettä. Valittujen pisteiden välisellä alueella siirtymien oletettiin tapahtuvan jollakin likimääräisellä tavalla, esimerkiksi staattisen siirtymämallin mukaisesti.
Seuraavassa esitetään menetelmä, joka ottaa huomioon siirtymien tarkan (teknisen taivutusteorian puitteissa) jakautumisen valittujen solmupisteiden välillä. Menetelmä on itse asiassa statiikasta tutun sauvarakenteen kulmanmuutos-siirtymämenetelmän yleistäminen dynamiikkaan.



Tarkastellaan kuvan suoraa, tasapaksua ja homogeenista palkkia ja sen kohdasta x leikattua differentiaalipalaa dx. Soveltamalla differentiaalipalaan hitausvoima-ajattelutavan mukaista kuviteltua tasapainoyhtälöä saadaan

$$\uparrow \quad Q-(Q+dQ)-q\,dx+\varrho A\ddot{v}\,dx=0 \qquad |:dx$$

$$\varrho A\ddot{v}-\frac{dQ}{dx}=q$$

Toisaalta on voimassa $Q=-EIv'''$, joten voidaan kirjoittaa

$$\boxed{EIv''''+\varrho A\ddot{v}=q(x,t)} \tag{333}$$

Yhtälöä (333) kirjoitettaessa on otettu huomioon vain taivutusmuodonmuutos. Koska palkki on tasapaksu ja homogeeninen, niin EI ja ϱA ovat vakioita.

7.2 Sauvan vapaan värähtelyn liikeyhtälön ratkaisu:

Tarkastellaan seuraavassa palkin vapaita harmonisia värähtelyitä, joille

$$v(x,t) = \hat{v}(x)\, e^{i\omega t} \quad , \quad q(x,t) \equiv 0 \tag{334}$$

Liikeyhtälö on tällöin

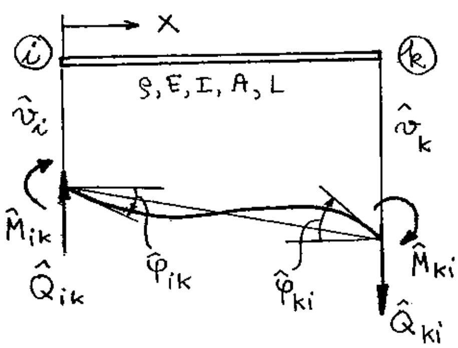
$$EI\,\hat{v}'''' - \rho A \omega^2 \hat{v} = 0 \tag{335}$$

Merkitään
$$\boxed{\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI}\omega^2} \tag{336}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{v}'''' - \lambda^4 \hat{v} = 0} \tag{337}$$

Differentiaaliyhtälön (337) ratkaisu on tunnetusti

$$\hat{v}(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x + C_3 \sinh\lambda x + C_4 \cosh\lambda x \tag{338}$$



Kuva 40 Palkki

Valitaan perustuntemattomiksi palkin päiden siirtymät $\hat{v}_i$, $\hat{v}_k$, $\hat{\varphi}_{ik}$ ja $\hat{\varphi}_{ki}$, jolloin käytetään kulmanmuutos-siirtymämenetelmää.

Reunaehdoista

$$\begin{cases} \hat{v}(0) = \hat{v}_i \quad , \quad \hat{v}(L) = \hat{v}_k \\ \hat{v}'(0) = \hat{\varphi}_{ik} \quad , \quad \hat{v}'(L) = \hat{\varphi}_{ki} \\ EI\,\hat{v}''(0) = -\hat{M}_{ik} \; , \quad EI\,\hat{v}''(L) = \hat{M}_{ki} \end{cases} \tag{339}$$

saadaan integroimisvakiot C_1, C_2, C_3 ja C_4 eliminoitua.

Lisäksi jää kaksi yhtälöä, joista voidaan ratkaista päätemomentit $\hat{M}_{ik}$ ja $\hat{M}_{ki}$. Erittäin pitkien laskujen jälkeen saadaan

$$\begin{cases} \hat{M}_{ik} = \frac{EI}{L}\left[c(\beta)\hat{\varphi}_i + s(\beta)\hat{\varphi}_k - r(\beta)\frac{\hat{v}_k}{L} + t(\beta)\frac{\hat{v}_i}{L} \right] & (340) \\ \hat{M}_{ki} = \frac{EI}{L}\left[s(\beta)\hat{\varphi}_i + c(\beta)\hat{\varphi}_k - t(\beta)\frac{\hat{v}_k}{L} + r(\beta)\frac{\hat{v}_i}{L} \right] & (341) \end{cases}$$

missä

$$\beta = \lambda L$$

$$\hat{\varphi}_{ik} = \hat{\varphi}_i \quad , \quad \hat{\varphi}_{ki} = \hat{\varphi}_k$$

$$c(\beta) = \beta \, \frac{\cosh\beta \sin\beta - \sinh\beta \cos\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{342}$$

$$s(\beta) = \beta \, \frac{\sinh\beta - \sin\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{343}$$

$$r(\beta) = \beta^2 \, \frac{\cosh\beta - \cos\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{344}$$

$$t(\beta) = \beta^2 \, \frac{\sinh\beta \sin\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{345}$$

Leikkausvoimien amplitudien lausekkeet saadaan yhteyksistä

$$\hat{Q}_{ik} = -EI\,\hat{v}'''(0) \quad \& \quad \hat{Q}_{ki} = -EI\,\hat{v}'''(L) \tag{346}$$

Laskujen jälkeen saadaan

$$\hat{Q}_{ik} = -\frac{EI}{L^2}\left[t(\beta)\,\hat{\varphi}_i + r(\beta)\,\hat{\varphi}_k - n(\beta)\frac{\hat{v}_k}{L} + m(\beta)\frac{\hat{v}_i}{L} \right] \tag{347}$$

$$\hat{Q}_{ki} = -\frac{EI}{L^2}\left[r(\beta)\,\hat{\varphi}_i + t(\beta)\,\hat{\varphi}_k - m(\beta)\frac{\hat{v}_k}{L} + n(\beta)\frac{\hat{v}_i}{L} \right] \tag{348}$$

missä

$$m(\beta) = \beta^3 \, \frac{\sinh\beta \cos\beta + \cosh\beta \sin\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{349}$$

$$n(\beta) = \beta^3 \, \frac{\sinh\beta + \sin\beta}{1 - \cosh\beta \cos\beta} \tag{350}$$

Statiikan tehtävään päästään, kun annetaan $\omega \to 0 \Rightarrow \beta \to 0$.
Raja-arvoina saadaan (totea!)

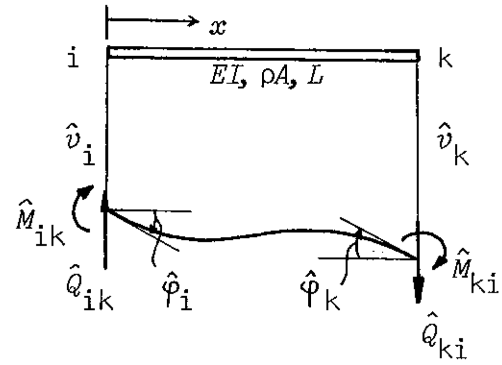
$$\lim_{\beta \to 0} c(\beta) = 4 \quad , \quad \lim_{\beta \to 0} r(\beta) = \lim_{\beta \to 0} t(\beta) = 6 \tag{351}$$

$$\lim_{\beta \to 0} s(\beta) = 2 \quad , \quad \lim_{\beta \to 0} m(\beta) = \lim_{\beta \to 0} n(\beta) = 12 \tag{352}$$

jotka ovat statiikasta tutut tulokset.

Yhteenveto:

kulmanmuutos-siirtymämenetelmä



$$\hat{M}_{ik} = a_{ik}\hat{\varphi}_i + b_{ik}\hat{\varphi}_k - c_{ik}\hat{v}_k + d_{ik}\hat{v}_i + MK_{ik}$$

$$\hat{M}_{ki} = b_{ki}\hat{\varphi}_i + a_{ki}\hat{\varphi}_k - d_{ki}\hat{v}_k + c_{ki}\hat{v}_i + MK_{ki}$$

$$\beta = \lambda L \qquad \lambda^4 = \rho A\,\omega^2/EI$$

$$\hat{Q}_{ik} = -d_{ik}\hat{\varphi}_i - c_{ik}\hat{\varphi}_k + e_{ik}\hat{v}_k - f_{ik}\hat{v}_i + QK_{ik}$$

$$\hat{Q}_{ki} = -c_{ki}\hat{\varphi}_i - d_{ki}\hat{\varphi}_k + f_{ki}\hat{v}_k - e_{ki}\hat{v}_i + QK_{ki}$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{EI}{L}c(\beta) \qquad c(\beta) = \beta\,\frac{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$b_{ik} = b_{ki} = \frac{EI}{L}s(\beta) \qquad s(\beta) = \beta\,\frac{\sinh\beta - \sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$c_{ik} = c_{ki} = \frac{EI}{L^2}r(\beta) \qquad r(\beta) = \beta^2\,\frac{\cosh\beta - \cos\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$d_{ik} = d_{ki} = \frac{EI}{L^2}t(\beta) \qquad t(\beta) = \beta^2\,\frac{\sinh\beta\,\sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$e_{ik} = e_{ki} = \frac{EI}{L^3}n(\beta) \qquad n(\beta) = \beta^3\,\frac{\sinh\beta + \sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$f_{ik} = f_{ki} = \frac{EI}{L^3}m(\beta) \qquad m(\beta) = \beta^3\,\frac{\sinh\beta\cos\beta + \cosh\beta\sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta}$$

$$\lim_{\beta\to 0} c(\beta) = 4 \qquad \lim_{\beta\to 0} r(\beta) = \lim_{\beta\to 0} t(\beta) = 6$$

$$\lim_{\beta\to 0} s(\beta) = 2 \qquad \lim_{\beta\to 0} m(\beta) = \lim_{\beta\to 0} n(\beta) = 12$$

$$\hat{v}(x) = \frac{\hat{M}_{ik}}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right) + \frac{\hat{M}_{ki}}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\beta}\right) +$$

$$+\frac{\hat{v}_i}{2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} + \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right) + \frac{\hat{v}_k}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\beta} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\beta}\right)$$

7.3 Sauvan ominaisvärähtelyjen tarkka ratkaiseminen:

Kun sauvan harmonisten värähtelyjen primääriituntemattomat $\hat{v}_i$, $\hat{v}_k$, $\hat{\varphi}_i$, $\hat{\varphi}_k$ on ratkaistu, saadaan sivun 148 yhtälöistä sauvan päätemomentit $\hat{M}_{ik}$ ja $\hat{M}_{ki}$. Tämän jälkeen saadaan sauvan poikittaissiirtymän amplitudi $\hat{v}(x)$ (ausekkeelle

$$\hat{v}(x) = \frac{\hat{M}_{ik}}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right) + \frac{\hat{M}_{ki}}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\beta}\right) +$$
$$+ \frac{\hat{v}_i}{2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} + \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right) + \frac{\hat{v}_k}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\beta} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\beta}\right) \qquad (353)$$

Sauvarakenteen ominaisvärähtelyjen ratkaisemiseksi muodostetaan kulmanmuutos-siirtymämenetelmän mukaisesti rakenteen nurkissa $i=1,2,\ldots,n$ momenttitasapainoyhtälöt $\sum_j \hat{M}_{ij} = 0$. Jos rakenne on siirtyvänurkkainen, tarvitaan myös siirtymäyhtälöt (voimatasapainoyhtälöt). Tällöin päädytään lineaariseen yhtälöryhmään

$$[K(\omega)]\{\hat{D}\} = \{0\} \qquad (354)$$

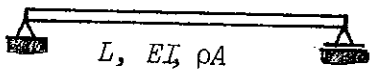
missä $[K(\omega)]$ on dynaaminen jäykkyysmatriisi ja $\{\hat{D}\}$ on solmusiirtymien amplitudivektori.

Yhtälö eli niin sanottu frekvenssiyhtälö ominaiskulmataajuuksien ω_i, $i=1,2,\ldots,\infty$ ratkaisemiseksi saadaan yhtälöstä (354) vaatimalla sille epätriviaaliratkaisu

$$\boxed{\det[K(\omega)] = 0} \qquad (355)$$

Frekvenssiyhtälö (355) on transsendenttinen ja sen ratkaisemiseen sisältyy joitakin numeerisia vaikeuksia.

Ominaiskulmataajuuksia ω_i vastaavat solmusiirtymät $\{\hat{D}\}$ saadaan yhtälöstä (354), jonka jälkeen vastaavat ominaismuotofunktiot yhtälöstä (353).



ESIMERKKI:

Määritä kuvan kaksitukisen palkin ominaisvärähtelyjen *frekvenssiyhtälö*, ominaiskulmataajuudet ja ominaisvärähtelymuodot.

RATKAISU:

Ominaisvärähtelyjen differentiaaliyhtälön ratkaisusta

$$\hat{v}(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\sinh\lambda x + D\cosh\lambda x \qquad (1)$$

ja reunaehdoista $\hat{v}(0)=0$ & $\hat{v}''(0)=0$ seuraa

$$\begin{cases} B+D=0 \\ -B+D=0 \end{cases} \Rightarrow B=D=0 \Rightarrow \hat{v}(x)=A\sin\lambda x + C\sinh\lambda x \qquad (2)$$

Reunaehdoista $\hat{v}(L)=0$ & $\hat{v}''(L)=0$ seuraa

$$\begin{cases} A\sin\lambda L + C\sinh\lambda L = 0 \\ -A\sin\lambda L + C\sinh\lambda L = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Vaaditaan epätriviaali ratkaisu vakioille A ja C.

$$\det\begin{bmatrix} \sin\lambda L & \sinh\lambda L \\ -\sin\lambda L & \sinh\lambda L \end{bmatrix} = 0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\lambda L \sinh\lambda L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \quad (n=1,2,\dots) \\ \sinh\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = 0 \text{ ei käy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda L = n\pi \equiv L\sqrt[4]{\frac{\rho A\omega^2}{EI}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_i = (i\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}} \qquad i = 1,2,\dots,\infty$$

Ominaismuotofunktiot saadaan seuraavasti:

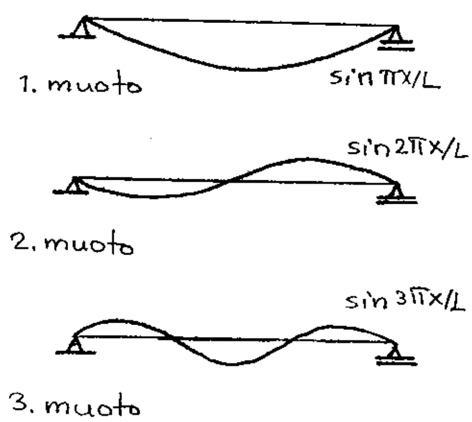
$$\hat{v}(L)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = A\underbrace{\sin\lambda L}_{=0} + C\sinh\lambda L$$

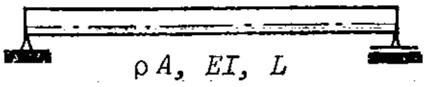
$$\Rightarrow C = 0$$

$\Rightarrow$ Ominaismuotofunktiot ovat

$$\hat{v}(x) = A\sin\lambda x \quad , \quad \lambda^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{v}_i(x) = A\sin\frac{i\pi x}{L}}$$

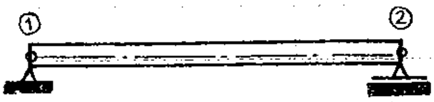




ESIMERKKI

Määritä kuvan tasapaksun ja homogeenisen nivelleen tuetun palkin tarkat ominaiskulmataajuudet.

RATKAISU



Reunaehdot:

$\hat{v}_1 = 0 \quad , \quad \hat{v}_2 = 0$

$\hat{M}_1 = 0 \quad , \quad \hat{M}_2 = 0$

$a_{12} = a_{21} = a \quad , \quad b_{12} = b_{21} = b$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = a\hat{\varphi}_1 + b\hat{\varphi}_2 \\ 0 = b\hat{\varphi}_1 + a\hat{\varphi}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviaaliratkaisu $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = 0$ ei kelpaa, joten vaaditaan epätriviaaliratkaisu eli

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

$\Rightarrow \quad a+b=0 \quad$ tai $\quad a-b=0$

$$1) \quad a+b=0 \Rightarrow \cancel{\frac{EI}{L}}\cancel{\beta}\,\frac{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta} + \cancel{\frac{EI}{L}}\cancel{\beta}\,\frac{\sinh\beta - \sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta} = 0 \quad (1)$$

$\beta = 0$ ei käy $(\omega = 0)$

$\Rightarrow \quad \cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta + \sinh\beta - \sin\beta = 0$

$\Rightarrow \quad \cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta = \sin\beta - \sinh\beta \quad | \text{ kor } II$

$$\underbrace{\cosh^2\beta}_{1+\sinh^2\beta}\sin^2\beta + \sinh^2\beta\,\underbrace{\cos^2\beta}_{1-\sin^2\beta} - 2\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \sin^2\beta + \sinh^2\beta - 2\sin\beta\sinh\beta$$

$\Rightarrow$

$$\cancel{\sin^2\beta} + \cancel{\sin^2\beta\sinh^2\beta} + \cancel{\sinh^2\beta} - \cancel{\sinh^2\beta\sin^2\beta} - 2\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \cancel{\sin^2\beta} + \cancel{\sinh^2\beta} - 2\sin\beta\sinh\beta$$

$\Rightarrow$

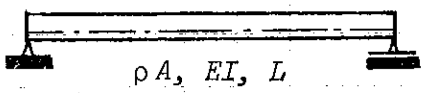
$\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \sin\beta\sinh\beta$

$$\sin\beta\sinh\beta\,\underbrace{(1-\cosh\beta\cos\beta)}_{\neq 0 \text{ (NIMITTÄJÄ (1) !)}} = 0$$

$\Rightarrow \quad \sinh\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ ei käy

$\quad \sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \quad \Rightarrow \omega_n = \beta^2\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A L^4}} = (n\pi)^2\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A L^4}}$

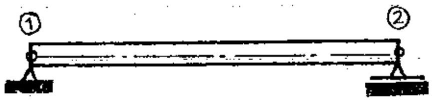
samoin $a-b=0 \Rightarrow$ samat tulokset



ESIMERKKI

Määritä kuvan tasapaksun ja homogeenisen niveltuetun palkin tarkat ominaiskulmataajuudet.

RATKAISU



Reunaehdot:

$\hat{v}_1 = 0$, $\hat{v}_2 = 0$

$\hat{M}_1 = 0$, $\hat{M}_2 = 0$

$a_{12} = a_{21} = a$, $b_{12} = b_{21} = b$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = a\hat{\varphi}_1 + b\hat{\varphi}_2 \\ 0 = b\hat{\varphi}_1 + a\hat{\varphi}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviaaliratkaisu $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = 0$ ei kelpaa, joten vaaditaan epätriviaaliratkaisu eli

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

$\Rightarrow$ $a+b=0$ tai $a-b=0$

1) $$a+b=0 \Rightarrow \frac{EI}{L}\beta\,\frac{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta} + \frac{EI}{L}\beta\,\frac{\sinh\beta - \sin\beta}{1-\cosh\beta\cos\beta} = 0 \quad (1)$$

$\beta = 0$ ei käy $(\omega = 0)$

$$\Rightarrow \cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta + \sinh\beta - \sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow \cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta = \sin\beta - \sinh\beta \qquad |\ \text{kor II}$$

$$\underbrace{\cosh^2\beta}_{1+\sinh^2\beta}\sin^2\beta + \sinh^2\beta\underbrace{\cos^2\beta}_{1-\sin^2\beta} - 2\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \sin^2\beta + \sinh^2\beta - 2\sin\beta\sinh\beta$$

$\Rightarrow$

$$\cancel{\sin^2\beta} + \cancel{\sin^2\beta\sinh^2\beta} + \cancel{\sinh^2\beta} - \cancel{\sinh^2\beta\sin^2\beta} - 2\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \cancel{\sin^2\beta} + \cancel{\sinh^2\beta} - 2\sin\beta\sinh\beta$$

$\Rightarrow$

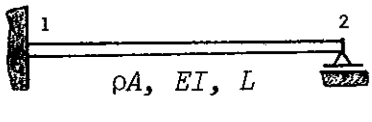
$$\sinh\beta\sin\beta\cosh\beta\cos\beta = \sin\beta\sinh\beta$$

$$\sin\beta\sinh\beta\,\underbrace{(1-\cosh\beta\cos\beta)}_{\neq 0\ (\text{NIMITTÄJÄ (1) !})} = 0$$

$\Rightarrow$ $\sinh\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ ei käy

$\sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = n\pi \Rightarrow \omega_n = \beta^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$

samoin $a-b=0 \Rightarrow$ samat tulokset.



ESIMERKKI:

Määritä kuvan palkin ominaisvärähtelyjen *frekvenssiyhtälö* ja siitä ominaiskulmataajuudet.

RATKAISU:

$$\hat{M}_{21} = b_{21} \underbrace{\cancel{\hat{\varphi}_1}}_{=0} + a_{21} \hat{\varphi}_2 = 0$$

Vaaditaan epätriviaaliratkaisu $a_{21} = 0$, jolloin

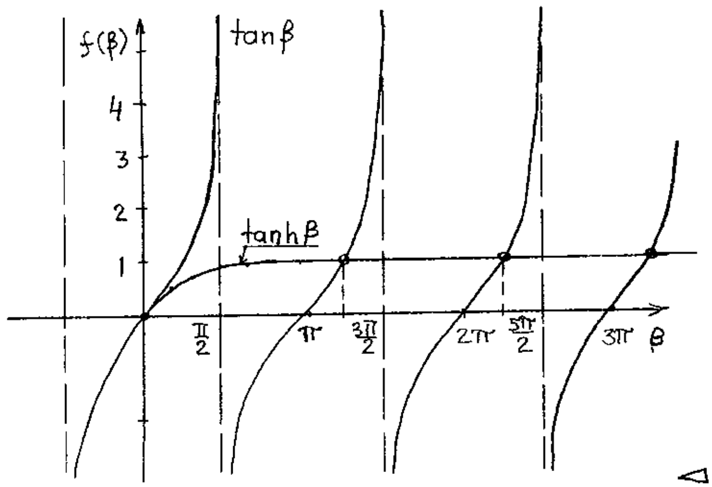
$$\cosh\beta \sin\beta - \sinh\beta \cos\beta = 0 \quad |: \cos\beta \cosh\beta \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta - \tanh\beta = 0 \qquad \text{frekvenssiyhtälö} \qquad \triangleleft$$

$$\Rightarrow$$

$$\tan\beta = \tanh\beta$$

Kuvasta nähdään



$$\beta_1 \approx 3{,}927$$
$$\beta_2 \approx 7{,}069$$
$$\beta_3 \approx 10{,}210$$
$$\vdots$$
$$\beta_i \approx \frac{4i+1}{4}\pi$$

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \qquad \triangleleft$$

Koska $\hat{M}_{21} = 0$ ja $\hat{\vartheta}_1 = \hat{\vartheta}_2 = 0$, niin

$$\hat{\vartheta}_i(x) = \frac{\hat{M}_{12}}{2EI\lambda_i^2}\left(\frac{\sin\lambda_i(L-x)}{\sin\beta_i} - \frac{\sinh\lambda_i(L-x)}{\sinh\beta_i}\right)$$

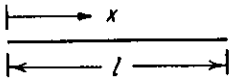
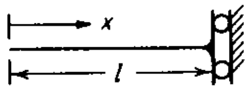
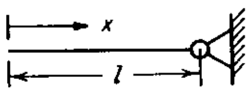
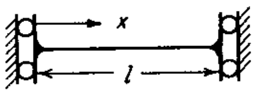
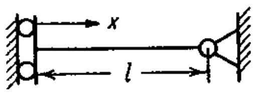
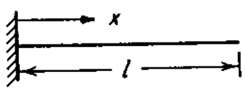
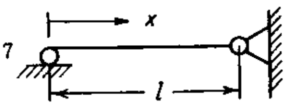
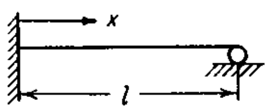
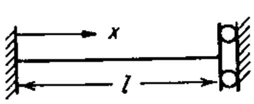
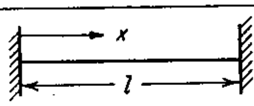
Siis ominaisvärähtelymuodot ovat

$$\hat{\vartheta}_i(x) = \frac{\sin\lambda_i(L-x)}{\sin\beta_i} - \frac{\sinh\lambda_i(L-x)}{\sinh\beta_i} \qquad \triangleleft$$

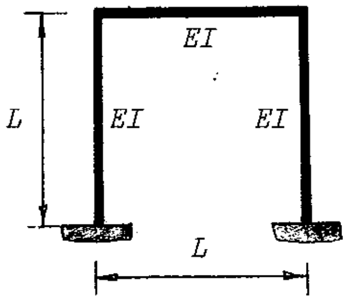
Sivulla 152 on esitetty kaksitukisen tasapaksun ja homogeenisen palkin ominaiskulmataajuudet eri reunaehdoin.

Kaksitukisen tasapaksun ja homogeenisen palkin ominaiskulmataajuudet ω_i ($i=1,2,\dots,\infty$) eri reunaehdoin. Lähdekirja:
W. Hurty & M. Rubinstein, Dynamics of Structures.

TABLE 5.1 Eigenvalues for Single-Span Uniform Beams

Case	Boundary Conditions		$(\beta l)_n$			
			$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n>3$
1		Free-Free $w''(0)=0$ $w''(l)=0$ $w'''(0)=0$ $w'''(l)=0$	0	4.730	7.853	$\frac{2n-1}{2}\pi$ (approx)
2		Free-Guided $w''(0)=0$ $w'(l)=0$ $w'''(0)=0$ $w'''(l)=0$	0	2.365	5.498	$\frac{4n-5}{4}\pi$ (approx)
3		Free-Hinged $w''(0)=0$ $w(l)=0$ $w'''(0)=0$ $w''(l)=0$	0	3.927	7.069	$\frac{4n-3}{4}\pi$ (approx)
4		Guided-Guided $w'(0)=0$ $w'(l)=0$ $w'''(0)=0$ $w'''(l)=0$	0	3.142	6.283	$(n-1)\pi$ (exact)
5		Guided-Hinged $w'(0)=0$ $w(l)=0$ $w'''(0)=0$ $w''(l)=0$	1.571	4.712	7.854	$\frac{2n-1}{2}\pi$ (exact)
6		Clamped-Free $w(0)=0$ $w''(l)=0$ $w'(0)=0$ $w'''(l)=0$	1.875	4.694	7.855	$\frac{2n-1}{2}\pi$ (approx)
7		Hinged-Hinged $w(0)=0$ $w(l)=0$ $w''(0)=0$ $w''(l)=0$	3.142	6.283	9.425	$n\pi$ (exact)
8		Clamped-Hinged $w(0)=0$ $w(l)=0$ $w'(0)=0$ $w''(l)=0$	3.927	7.069	10.210	$\frac{4n+1}{4}\pi$ (approx)
9		Clamped-Guided $w(0)=0$ $w'(l)=0$ $w'(0)=0$ $w'''(l)=0$	2.365	5.498	8.639	$\frac{4n-1}{4}\pi$ (approx)
10		Clamped-Clamped $w(0)=0$ $w(l)=0$ $w'(0)=0$ $w'(l)=0$	4.730	7.853	10.996	$\frac{2n+1}{2}\pi$ (approx)

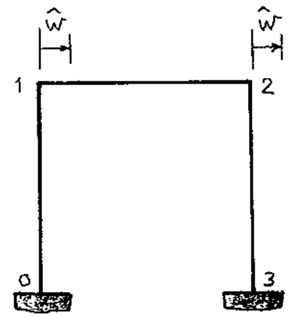
$$\omega_n = (\beta l)_n^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$



ESIMERKKI:

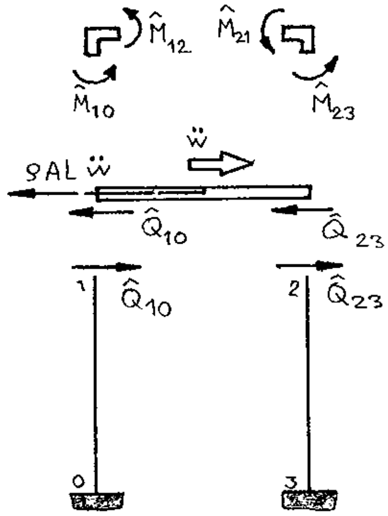
Kuvan kehän palkit ovat venymättömät, tasapaksut ja homogeeniset. Niiden poikkileikkausala on A ja tiheys ρ. Määritä rakenteen *frekvenssiyhtälö* kulmanmuutos-siirtymämenetelmällä ja ratkaise frekvenssiyhtälöstä muutamia alimpia ominaiskulmataajuuksia.

RATKAISU:



Merkitään $a_{ij} \equiv a$, $b_{ij} \equiv b$, $d_{ij} \equiv d$
$f_{ij} \equiv f$.

$$\hat{M}_{10} = a\hat{\varphi}_1 - d\hat{w}$$
$$\hat{M}_{12} = a\hat{\varphi}_1 + b\hat{\varphi}_2$$
$$\hat{M}_{21} = b\hat{\varphi}_1 + a\hat{\varphi}_2$$
$$\hat{M}_{23} = a\hat{\varphi}_2 + d(-\hat{w})$$



Tasapainoehdot: $\begin{cases} \hat{M}_{10} + \hat{M}_{12} = 0 \\ \hat{M}_{21} + \hat{M}_{23} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2a\hat{\varphi}_1 + b\hat{\varphi}_2 - d\hat{w} = 0 & (1) \\ b\hat{\varphi}_1 + 2a\hat{\varphi}_2 - d\hat{w} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lisäksi tarvitaan vielä siirtyvyysyhtälö:

$$\begin{cases} \hat{Q}_{10} = -d\hat{\varphi}_1 + f\hat{w} \\ \hat{Q}_{23} = -d\hat{\varphi}_2 - f(-\hat{w}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad -\rho AL\ddot{w} - \hat{Q}_{10} - \hat{Q}_{23} = 0$$
$$\ddot{w} = -\omega^2\hat{w}$$

$\Rightarrow$

$$-d\hat{\varphi}_1 - d\hat{\varphi}_2 + (2f - \rho AL\omega^2)\hat{w} = 0 \qquad (3)$$

(1), (2) & (3) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2a\hat{\varphi}_1 + b\hat{\varphi}_2 - d\hat{w} = 0 \\ b\hat{\varphi}_1 + 2d\hat{\varphi}_2 - d\hat{w} = 0 \\ -d\hat{\varphi}_1 - d\hat{\varphi}_2 + (2f - \rho AL\omega^2)\hat{w} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2a & b & -d \\ b & 2a & -d \\ -d & -d & 2f - \rho AL\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

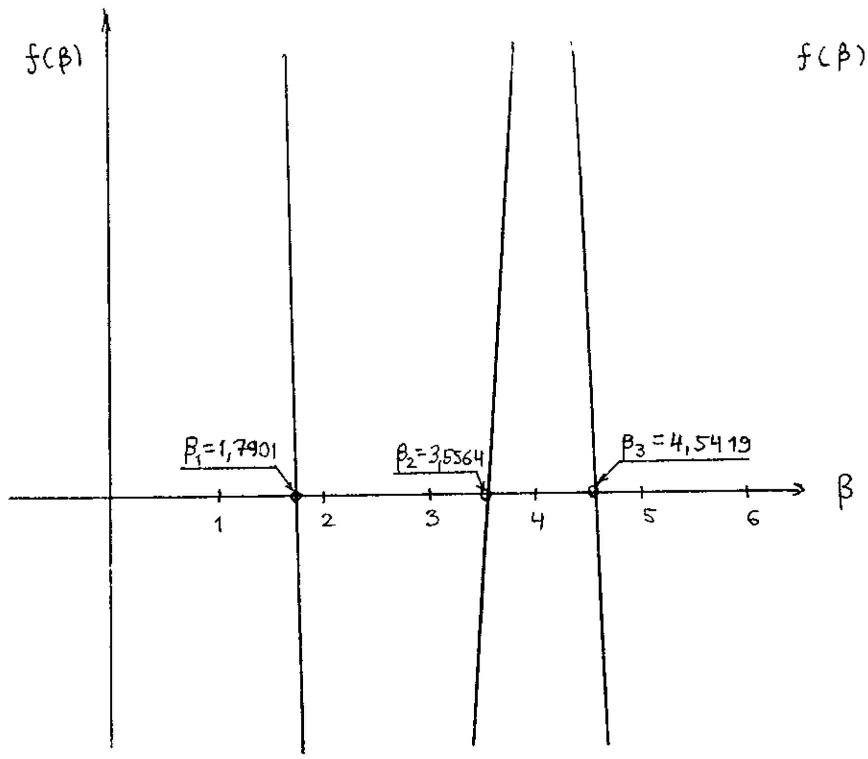
(jatkuu)

Vaaditaan epätriviaaliratkaisu eli

$$\det\begin{bmatrix} 2a & b & -d \\ b & 2a & -d \\ -d & -d & 2f-\rho AL\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{frekvenssiyhtälö} \quad \triangleleft$$

$a = EI\,c(\beta)/L$, $b = EI\,s(\beta)/L$, $d = EI\,t(\beta)/L^2$, $f = EI\,m(\beta)/L^2$

$$\beta^4 = \frac{\rho AL^4}{EI}\omega^2$$



Kuva Frekvenssiyhtälön $f(\beta) = \det[\ ] = 0$ kuvaaja.

Kuvasta nähdään

$$\beta_1 \approx 1{,}7901 \quad , \quad \beta_2 \approx 3{,}5564 \quad , \quad \beta_3 \approx 4{,}5419 \quad , \ \ldots$$

$$\beta L = \lambda \quad , \quad \lambda^4 = \frac{\rho A}{EI}\omega^2$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1 \approx 3{,}2045\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

$$\omega_2 \approx 12{,}645\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad \triangleleft$$

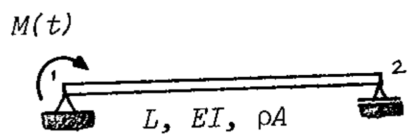
$$\omega_3 \approx 20{,}621\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

$$\vdots$$

7.4 Sauvarakenteen jaksollisen kuormituksen tarkka vaste:

Edellä esitetty teknisen taivutusteorian puitteissa tarkka kulmanmuutos-siirtymämenetelmä soveltuu myös pakkovärähdystehtävän ratkaisemiseen, kun kuormitus on harmoninen. Jos kuormitus on epäharmoninen, mutta kuitenkin jaksollinen, on kuormitus ensin kirjoitettava FOURIER-sarjaksi.

Jos kuormitus on jaksoton, niin edellä esitetty kulmanmuutos-siirtymämenetelmä ei sellaisenaan toimi.



ESIMERKKI:
Määritä kuvan palkin taivutusmomentin amplitudipinta, kun $M(t) = \hat{M} \sin \Omega t$.
$\Omega = 200$ 1/s, $E = 210$ GPa, $I = 40\,000$ cm^4,
$L = 5$ m, $\rho A = 2100$ kg/m, $\hat{M} = 10$ kNm.

RATKAISU:

$$\hat{M}_{21} = 0 \quad , \quad \hat{v}_1 = \hat{v}_2 = 0 \quad , \quad \hat{M}_{12} = \hat{M}$$

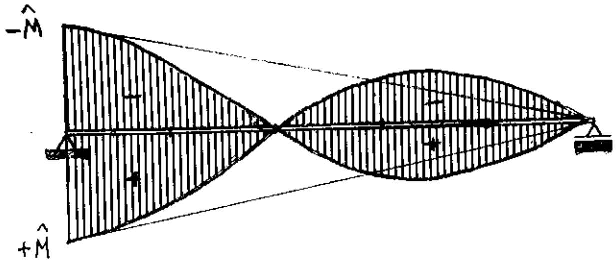
$$\hat{v}(x) = \frac{M_{12}}{2EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right)$$

$$\hat{M}_t(x) = -EI\hat{v}'' = \frac{\hat{M}}{2\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} - \frac{\lambda^2\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{M}_t(x) = \frac{\hat{M}}{2}\left(\frac{\sin\lambda(L-x)}{\sin\beta} - \frac{\sinh\lambda(L-x)}{\sinh\beta}\right)$$

$$\beta = \lambda L = \sqrt[4]{\frac{\rho A \Omega^2}{EI}}\, L = 5 \quad , \quad \lambda = 1$$

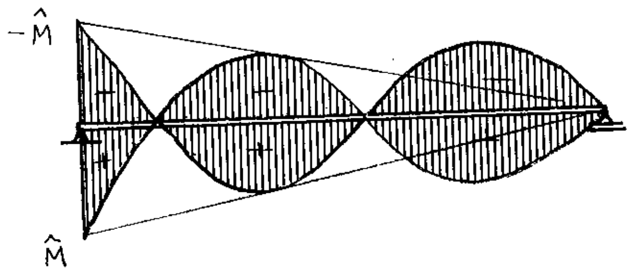
Annettu $\Omega = 200$ 1/s on ominaiskulmataajuuksien $\omega_1 = 79$ 1/s ja $\omega_2 = 316$ 1/s välissä. Sijoittamalla numeroarvot saadaan



$$\hat{M}_t(x) = \frac{\hat{M}}{2}\left(\frac{\sin(5-x)}{-0{,}9589} + \frac{\sinh(5-x)}{74903}\right)$$

Kuvassa on momenttiamplitudin kuvaaja. Vertaa tulosta vastaa-vaan statiikan tehtävän tulok-seen.

(jatkuu)

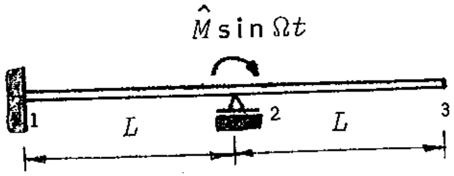


Jos $\Omega = 400$ 1/s, niin se on ominaiskulmataajuuksien $\omega_2 = 316$ 1/s ja $\omega_3 = 711$ 1/s välissä.

$$\Rightarrow \quad \beta = 5\sqrt{2} \;, \; \lambda = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{M}_t(x) = \frac{\hat{M}}{2}\left(\frac{\sin\sqrt{2}(5-x)}{0{,}7089} + \frac{\sinh\sqrt{2}(5-x)}{588{,}7}\right)$$



ESIMERKKI:

Kuvan ulokepalkin $EI = 0{,}84$ MNm^2 ja massan pituustiheys $\rho A = 2100$ kg/m. Ulkoisen herätemomentin kulmataajuus $\Omega = 20$ 1/s ja amplitudi $\hat{M}$. Määritä palkin pysyvien värähtelyjen tukimomenttien M_{21} ja M_{23} amplitudit siirtymämenetelmällä. $L = 4$ m.

RATKAISU:

$$\hat{\varphi}_1 = 0 \;, \quad \hat{v}_1 = \hat{v}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \hat{M}_{21} = a\hat{\varphi}_2 \\ \hat{M}_{23} = a\hat{\varphi}_2 + b\hat{\varphi}_3 - c\,\hat{v}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{M}_{32} = 0 = b\hat{\varphi}_2 + a\hat{\varphi}_3 - d\,\hat{v}_3 \\ \hat{Q}_{32} = 0 = -c\,\hat{\varphi}_2 - d\,\hat{\varphi}_3 + f\,\hat{v}_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{v}_3 = \frac{ac - bd}{af - d^2}\,\hat{\varphi}_2 \quad \& \quad \hat{\varphi}_3 = \frac{bf - dc}{af - d^2}\,\hat{\varphi}_2$$

Tasapainoehto: $\circlearrowleft \quad \hat{M}_{21} + \hat{M}_{23} - \hat{M} = 0$

$$\Rightarrow \quad a\hat{\varphi}_2 + a\hat{\varphi}_2 + b\left(\frac{bf - dc}{af - d^2}\right)\hat{\varphi}_2 - c\left(\frac{ac - bd}{af - d^2}\right)\hat{\varphi}_2 = \hat{M}$$

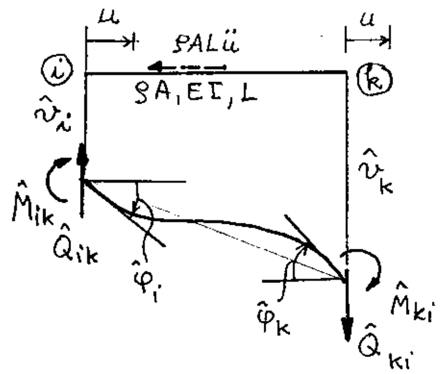
$$\Rightarrow \quad \hat{\varphi}_2 = \frac{af - d^2}{2a^2 f - 2ad^2 + b^2 f - ac^2}\,\hat{M}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \Omega^2}{EI}}\,L = \sqrt[4]{\frac{20^2 \cdot 2100}{0{,}84 \cdot 10^6}} \cdot 4 = 4 \qquad \text{järj. (MN, m, s)}$$

$$a(4) = \frac{EI}{L}\,c(4) = \frac{0{,}84}{4} \cdot 0{,}60034 = 0{,}126 \qquad \text{jne...}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{M}_{21} \approx 0{,}0825\,\hat{M} \\ \hat{M}_{23} \approx 0{,}9175\,\hat{M} \end{cases}$$

7.5 Sauvarakenteen dynaamiseen siirtymämalliin perustuva elementtimenetelmä:

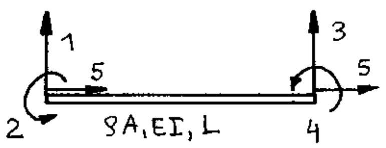


Edellä esitetty tarkka siirtymämenetelmä voidaan tietenkin pukea elementtimenetelmän muotoon. Tällöin on merkit sovitettava toinen toisiinsa seuraavasti: Oletetaan, että palkki on venymätön:

$$\hat{M}_1 = -\hat{M}_{ik}, \quad \hat{M}_2 = -\hat{M}_{ki}, \quad \hat{Q}_1 = \hat{Q}_{ik}, \quad \hat{Q}_2 = -\hat{Q}_{ki}$$

$$\hat{\varphi}_1 = -\hat{\varphi}_i, \quad \hat{\varphi}_2 = -\hat{\varphi}_k, \quad \hat{v}_1 = -\hat{v}_i, \quad \hat{v}_2 = -\hat{v}_k$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 \hat{u}$$



$$\hat{M}_{ik} = a_{ik}\hat{\varphi}_i + b_{ik}\hat{\varphi}_k - c_{ik}\hat{v}_k + d_{ik}\hat{v}_i$$

$$\hat{M}_{ki} = b_{ki}\hat{\varphi}_i + a_{ki}\hat{\varphi}_k - d_{ki}\hat{v}_k + c_{ki}\hat{v}_i$$

$$\hat{Q}_{ik} = -d_{ik}\hat{\varphi}_i - c_{ik}\hat{\varphi}_k + e_{ik}\hat{v}_k - f_{ik}\hat{v}_i$$

$$\hat{Q}_{ki} = -c_{ki}\hat{\varphi}_i - d_{ki}\hat{\varphi}_k + f_{ki}\hat{v}_k - e_{ki}\hat{v}_i$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{EI}{L}c(\beta), \quad b_{ik} = b_{ki} = \frac{EI}{L}s(\beta), \quad c_{ik} = c_{ki} = \frac{EI}{L^2}r(\beta)$$

$$d_{ik} = d_{ki} = \frac{EI}{L^2}t(\beta), \quad e_{ik} = e_{ki} = \frac{EI}{L^3}n(\beta), \quad f_{ik} = f_{ki} = \frac{EI}{L^3}m(\beta), \quad \beta^4 = \frac{\varrho A\omega^2}{EI}L^4$$

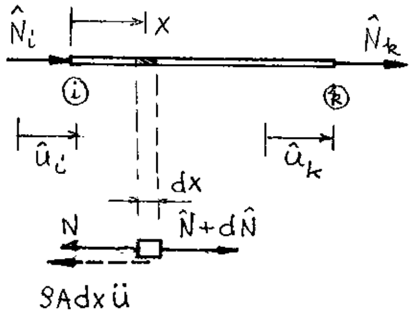
$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ik} & d_{ik} & -e_{ik} & c_{ik} & 0 \\ & a_{ik} & -c_{ik} & b_{ik} & 0 \\ & & f_{ki} & -d_{ki} & 0 \\ & & & a_{ki} & 0 \\ & \text{SYM.} & & & -\varrho AL\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u \end{bmatrix} \qquad (356)$$

Merkitään $\varrho AL\omega^2 = \beta^4 EI/L^3$. Silloin dynaamiseksi jäykkyysmatriisiksi venymättömälle palkille saadaan

$$[K(\omega)] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} m(\beta) & t(\beta)L & -n(\beta) & r(\beta)L & 0 \\ & c(\beta)L^2 & -r(\beta)L & s(\beta)L^2 & 0 \\ & & m(\beta) & -t(\beta)L & 0 \\ & & & c(\beta)L^2 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & -\beta^4 \end{bmatrix} \qquad (357)$$

◁

Tietokonelaskennan systematisoimiseksi kannattaa ottaa elementin pituussuuntainen muodonmuutos huomioon. Kun oletetaan, että elementin normaalivoima yhtyy vetojäykkyyskeskiöön ja massakeskiö ja vetojäykkyyskeskiö yhtyvät, niin palkin partikkelien keskiakselin suuntainen liike on kytkemätön taivutuksesta johtuvaan liikkeeseen.



Palkin palan kuvitellusta tasapainoehdosta seuraa

$$\rightarrow \quad -\hat{N}+(\hat{N}+d\hat{N})-\varrho A dx\, \ddot{u}=0 \tag{358}$$

$$\hat{N}=EA\hat{u}' \quad , \quad \ddot{u}=-\omega^2\hat{u} \tag{359}$$

$$\Rightarrow \quad +\frac{d\hat{N}}{dx}+\varrho A\omega^2\hat{u}=0 \tag{360}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}''+\bar{\lambda}^2\hat{u}=0 \quad , \quad \bar{\lambda}^2=\frac{\varrho A\omega^2}{EA}=\frac{\varrho\omega^2}{E} \tag{361}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(x)=C_1\sin\bar{\lambda}x+C_2\cos\bar{\lambda}x \quad , \text{ reunaehdot: } \begin{cases}\hat{u}(0)=\hat{u}_i\\ \hat{u}(L)=\hat{u}_k\end{cases} \tag{362}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} C_1=(\hat{u}_k-\hat{u}_i\cos\bar{\lambda}L)/\sin\bar{\lambda}L\\ C_2=\hat{u}_i\end{cases} \quad , \quad \bar{\beta}=\bar{\lambda}L \quad , \quad \begin{aligned} g(\bar{\beta})&=1/\sin\bar{\beta}\\ h(\bar{\beta})&=\cot\bar{\beta}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{u}(x)=\hat{u}_i\left(\cos\bar{\lambda}x-h(\bar{\beta})\sin\bar{\lambda}x\right)+\hat{u}_k\, g(\bar{\beta})\sin\bar{\lambda}x \tag{363}$$

$$\hat{N}=EA\,\hat{u}'=EA\left[\hat{u}_i\bar{\lambda}(-\sin\bar{\lambda}x-h(\bar{\beta})\cos\bar{\lambda}x)+\hat{u}_k\bar{\lambda}\,g(\bar{\beta})\cos\bar{\lambda}x\right] \tag{364}$$

$$\text{Reunaehdot:} \quad \hat{N}(0)=-\hat{N}_i \quad \& \quad \hat{N}(L)=\hat{N}_k \tag{365}$$

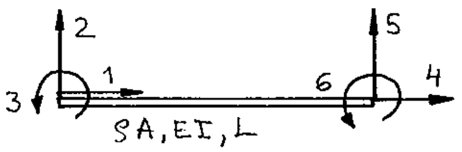
$$\Rightarrow \begin{cases} -\hat{N}_i=EA\bar{\lambda}\left[-\hat{u}_i h(\bar{\beta})+\hat{u}_k g(\bar{\beta})\right]\\ \hat{N}_k=EA\bar{\lambda}\left[\hat{u}_i(-\sin\bar{\beta}-h(\bar{\beta})\cos\bar{\beta})+\hat{u}_k g(\bar{\beta})\cos\bar{\beta}\right]\end{cases} \tag{366}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{N}_i=\dfrac{EA\bar{\beta}}{L}\left[\cot\bar{\beta}\,\hat{u}_i-\dfrac{1}{\sin\bar{\beta}}\,\hat{u}_k\right]\\ \hat{N}_k=\dfrac{EA\bar{\beta}}{L}\left[-\dfrac{1}{\sin\bar{\beta}}\,\hat{u}_i+\cot\bar{\beta}\,\hat{u}_k\right]\end{cases} \tag{367}$$

Merkitään

$$g_{ik}=g_{ki}=\frac{EA}{L}\,\bar{\beta}\cot\bar{\beta} \quad \& \quad h_{ik}=h_{ki}=\frac{EA}{L}\,\frac{\bar{\beta}}{\sin\bar{\beta}} \tag{368}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{N}_i=g_{ik}\hat{u}_i-h_{ik}\hat{u}_k \quad \& \quad \hat{N}_k=-h_{ki}\hat{u}_i+g_{ki}\hat{u}_k \tag{369}$$



Kuvan venyvää palkkielementtiä vastaa nyt dynaaminen jäykkyysmatriisi

$$\eta = EA/EI \tag{370}$$

$$[K(\omega)] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} e(\bar\beta)\eta L & 0 & 0 & -p(\bar\beta)\eta L & 0 & 0 \\ & m(\beta) & t(\beta)L & 0 & -n(\beta) & r(\beta)L \\ & & c(\beta)L^2 & 0 & -r(\beta)L & s(\beta)L^2 \\ & & & e(\bar\beta)\eta L & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & m(\beta) & -t(\beta)L \\ & & & & & c(\beta)L^2 \end{bmatrix} \tag{371}$$

missä

$$e(\bar\beta) = \bar\beta \cot\bar\beta \quad , \quad p(\bar\beta) = \bar\beta/\sin\bar\beta \quad , \quad \bar\beta = \bar\lambda L = \sqrt{\frac{\varrho L}{E}\omega^2}\,L$$

$$g_{ik} = g_{ki} = \frac{EA}{L^2}\, e(\bar\beta) \quad , \quad h_{ik} = h_{ki} = \frac{EA}{L^2}\, p(\bar\beta) \tag{372}$$

$$\begin{aligned} \hat N_i &= g_{ik}\hat u_i - h_{ik}\hat u_k \\ \hat N_k &= -h_{ki}\hat u_i + g_{ki}\hat u_k \end{aligned} \tag{373}$$

$$\hat u(x) = \hat u_i \frac{\sin\bar\lambda(L-x)}{\sin\bar\beta} + \hat u_k \frac{\sin\bar\lambda x}{\sin\bar\beta} \tag{374}$$

Tarkastellaan seuraavassa, miten staattiseen siirtymämalliin ja dynaamiseen siirtymämalliin perustuvat sauvarakenteen elementtimenetelmät suhtautuvat toisiinsa. Kehitetään parametrista β riippuvat funktiot sarjaksi

$$\begin{aligned} c(\beta) &= 4 - \tfrac{1}{105}\beta^4 + \dots &, \quad s(\beta) &= 2 + \tfrac{1}{140}\beta^4 + \dots \\ t(\beta) &= 6 - \tfrac{11}{210}\beta^4 + \dots &, \quad m(\beta) &= 12 - \tfrac{13}{35}\beta^4 + \dots \\ n(\beta) &= 12 - \tfrac{9}{70}\beta^4 + \dots &, \quad r(\beta) &= 6 - \tfrac{13}{420}\beta^4 + \dots \\ e(\beta) &= 1 - \tfrac{1}{3}\bar\beta^2 + \dots &, \quad p(\beta) &= 1 + \tfrac{1}{6}\bar\beta^2 + \dots \end{aligned} \tag{375}$$

Sijoittamalla sarjakehitelmät dynaamiseen matriisiin $[K(\omega)]$ saadaan $\left(\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} L^4 \ , \ \bar{\beta}^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EA}\right)$

$$[K(\omega)] = \frac{EI}{L^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} EAL^2/EI & 0 & 0 & -EAL^2/EI & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ \hline & & & EAL^2/EI & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{array} \right] +$$

$$- \frac{\rho A L \omega^2}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & -70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} + \cdots \tag{376}$$

Tuloksesta nähdään, että dynaamisen jäykkyysmatriisin $[K(\omega)]$ sarjakehitelmän ensimmäinen termi on staattisen siirtymämallin jäykkyysmatriisi ja toinen termi on staattisen siirtymämallin konsistentti massamatriisi!

Ominaisvärähtelyn frekvenssiyhtälö on

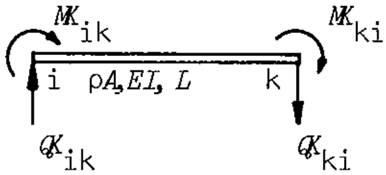
$$\det [K(\omega)] = 0 \tag{377}$$

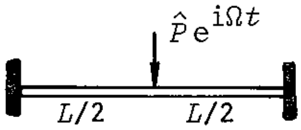
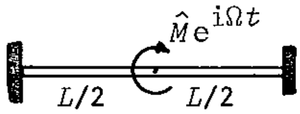
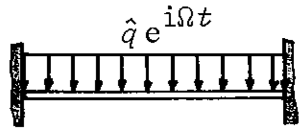
Harmonisen pakkovärähtelyn ratkaisuyhtälö on

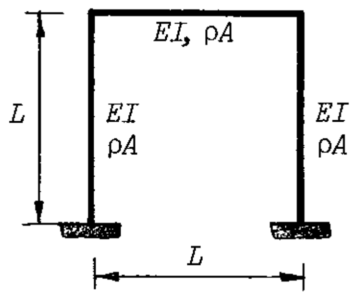
$$[K(\Omega)]\{D\} = \{P\} = \{\hat{P}\} e^{i\Omega t} \tag{378}$$

missä $\{D\} = \{D(t)\}$ on rakenteen solmusiirtymävektori. Kuormitusvektori $\{P\}$ on harmonisten solmukuormitusten ja harmonisten ekvivalenttisten elementtikuormitusten summa.

SAUVAN JÄYKISTYSREAKTIOITA:



	$\mathcal{M}_{ik} = -\mathcal{M}_{ki}$	$\mathcal{Q}_{ik} = -\mathcal{Q}_{ki}$
	$-\frac{\hat{P}L}{4}\cdot\frac{r(\beta)}{m(\beta)}$	$\frac{\hat{P}}{2}\cdot\frac{n(\beta)}{m(\beta)}$
	$\frac{\hat{M}}{2}\cdot\frac{s(\beta)}{c(\beta)}$	$-\frac{\hat{M}}{L}\cdot\frac{r(\beta)}{c(\beta)}$
	$\left(\frac{t(\beta)}{\beta^4}-\frac{r(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L^2$	$\left(\frac{n(\beta)}{\beta^4}-\frac{m(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L$

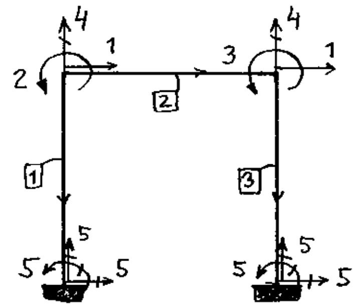


ESIMERKKI:

Määritä kuvan kehän frekvenssiyhtälö käyttämällä dynaamiseen siirtymämalliin perustuvaa elementtimenetelmää. Kehän sauvat ovat tasapaksut, homogeeniset ja venymättömät.

RATKAISU:

Palkit venymättömät. Sivun 157 mukaan



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|ccccc|}
 \boxed{3} & 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\
 \boxed{2} & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \\
 \boxed{1} & 1 & 2 & 5 & 5 & 4
 \end{array} \\
[k(\omega)] = \frac{EI}{L^3} & \left[\begin{array}{ccccc}
 m(\beta) & t(\beta)L & -n(\beta) & n(\beta)L & 0 \\
 & c(\beta)L^2 & -n(\beta)L & s(\beta)L^2 & 0 \\
 & & m(\beta) & -t(\beta)L & 0 \\
 & & & c(\beta)L^2 & 0 \\
 \text{SYM.} & & & & -\beta^4
 \end{array}\right]
 \begin{array}{ccc}
 1 & 4 & 1 \\
 2 & 2 & 3 \\
 5 & 4 & 5 \\
 5 & 3 & 5 \\
 4 & 1 & 4
 \end{array}
\end{array}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
[K(\omega)] = \frac{EI}{L^3} & \left[\begin{array}{ccc}
 2m(\beta)-\beta^4 & t(\beta)L & t(\beta)L \\
 & 2c(\beta)L^2 & s(\beta)L^2 \\
 \text{SYM.} & & 2c(\beta)L^2
 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
f = \frac{EI}{L^3} m(\beta) \,, \quad d = \frac{EI}{L^2} t(\beta) \,, \quad a = \frac{EI}{L} c(\beta) \,, \quad b = \frac{EI}{L} s(\beta)
$$

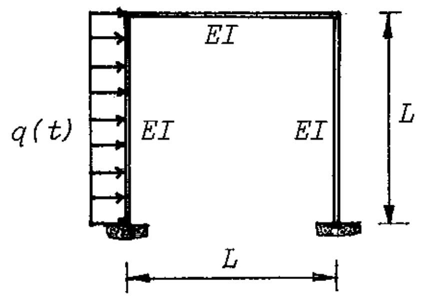
$$
\beta^4 \frac{EI}{L^3} = \frac{\varrho A \omega^2}{EI} L^4 \frac{EI}{L^3} = \varrho A L \omega^2
$$

$$
\Rightarrow \quad [K(\omega)] = \begin{bmatrix}
 2f - \varrho A L \omega^2 & d & d \\
 & 2a & b \\
 \text{SYM.} & & 2a
\end{bmatrix}
$$

frekvenssiyhtälö on

$$
\det [K(\omega)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{bmatrix}
 2f - \varrho A L \omega^2 & d & d \\
 d & 2a & b \\
 d & b & 2a
\end{bmatrix} = 0
$$

Tulos vastaa sivun 153 tulosta.



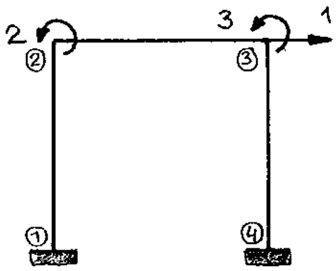
ESIMERKKI:

Kuvan kehää kuormittaa harmoninen tuulikuormitus

$$q(t) = \hat{q}\, e^{i\Omega t}$$

Määritä kehän nurkkasiirtymien amplitudit.

RATKAISU:



$\Omega = 1{,}50\,\omega_1$, $\beta_1 = 1{,}7901$ (sivu154)

$$\Rightarrow \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \Omega^2}{EI} L^4} = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_1^2}{EI} L^4}\,\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \beta_1 \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\beta_1 = 2{,}1924$$

Solmuun kohdistuvat ekvivalenttiset solmuvoimat $\{\hat{p}^{ekv}\}$:

$$\hat{M}K_{21} = -\left(\frac{t(\beta)}{\beta^4} - \frac{r(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L^2 \quad \& \quad \hat{Q}K_{21} = -\left(\frac{n(\beta)}{\beta^4} - \frac{m(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L$$

$n(\beta) = 15{,}200$, $m(\beta) = 3{,}088$, $t(\beta) = 4{,}726$, $r(\beta) = 6{,}765$,

$c(\beta) = 3{,}765$, $s(\beta) = 2{,}175$

$f = \frac{EI}{L^3} m(\beta)$, $a = \frac{EI}{L} c(\beta)$, $b = \frac{EI}{L} s(\beta)$, $d = \frac{EI}{L^2} t(\beta)$

$$\{\hat{p}^{ekv}\} = \begin{bmatrix} -\hat{Q}K_{21} \\ \hat{M}K_{21} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n(\beta)}{\beta^4} - \frac{m(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L \\ -\left(\frac{t(\beta)}{\beta^4} - \frac{r(\beta)}{\beta^4}\right)\hat{q}L^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5242\ \hat{q}L \\ 0{,}08826\ \hat{q}L^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sivun 162 tuloksesta seuraa

$$[K(\beta)] = \begin{bmatrix} 2f - \rho A L \Omega^2 & d & d \\ d & 2a & b \\ d & b & 2a \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -16{,}928 & 4{,}726L & 4{,}726L \\ & 7{,}530L^2 & 2{,}175L^2 \\ \text{SYM.} & & 7{,}530L^2 \end{bmatrix}$$

Ratkaisuyhtälöstä

$$[K(\beta)]\begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \\ \hat{D}_3 \end{bmatrix} = \{\hat{p}^{ekv}\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \\ \hat{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02235\ \hat{q}L^4/EI \\ 0{,}02367\ \hat{q}L^3/EI \\ 0{,}00719\ \hat{q}L^3/EI \end{bmatrix}$$

8 LIIKKUVA KUORMA PALKILLA

Liikkuvan kuorman palkille aiheuttamien dynaamisten efektien tutkiminen sai alkusysäyksen Chesterin sillan sortuessa Englannissa v. 1847. Katastrofi vaati useita kuolonuhreja ja englantilaisiin nakennusinsinööreihin kohdistettiin ankaraa arvostelua.

Heti v. 1848 englantilainen H. COX päätteli, että liikkuvan dynaamisen kuorman efektit ovat kaksi kertaa niin suuret kuin staattiset efektit. Hän päätyi tulokseen tarkastelemalla 2-tukista palkkia, jonka keskipisteen dynaaminen siirtymä hetkellä, jolloin kuorma P ohittaa keskipisteen on δ_{dyn}. Tällöin voima P tekee työn $P\delta_{dyn}$. Palkkiin on tällöin varastoitunut kimmoenergiaa

$$U = \frac{1}{2} k \delta_{dyn}^2 = \frac{1}{2}\left(48\frac{EI}{L^3}\right)\delta_{dyn}^2$$

$$U = W_P \Rightarrow 24\frac{EI}{L^3}\delta_{dyn}^2 = P\delta_{dyn} \Rightarrow \delta_{dyn} = \frac{PL^3}{24EI}$$

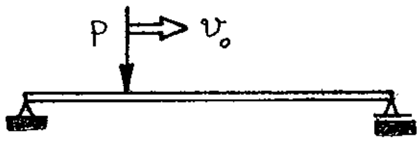
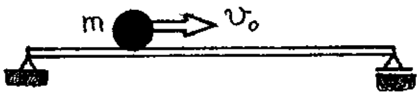
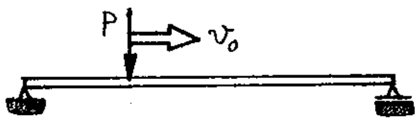
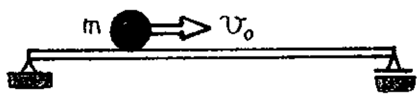
Toisaalta $\delta_{st} = PL^3/48EI$, joten

$$\delta_{dyn} = 2\cdot\delta_{st}$$

Tulos on kuitenkin kovin karkea. Laskennassa ei ole otettu huomioon palkin massaa eikä palkin ja kuorman liike-energiaa. G. STOKES paransi v. 1849 COXin teoriaa. Hän huomautti liike-energian unohtamisesta sekä siitä, että on tehtävä työtä myös, jotta kuorma liikkuisi palkilla vakionopeudella.

Liikkuvan kuorman tehtävä voidaan jakaa sivun 165 taulukon mukaisesti neljään osaan:

<u>1. TAPAUS</u>: Kaikki inertiaalivaikutukset unohdetaan. Kuorman paine palkille oletetaan aiheutuvan siis kuorman painovoimasta. Itse asiassa tällöin ei ole kysymys "dynaamisten" efektien huomioonottamisesta, vaan niin sanotun "kinemaattisen" efektin eli sen, että kuorman vaikutuspiste liikkuu vakionopeudella v.

	Palkin massa	Kuorman massa
	Ei	Ei
	Ei	Kyllä
	Kyllä	Ei
	Kyllä	Kyllä

Tapausta I, jossa kaikki inertiaalivaikutukset unohdetaan tutkivat toisistaan riippumatta v. 1868 E. WINKLER ja O. MOHR. Inertiaalivaikutuksen unohtaminen johtaa hyvin epätarkkaan tulokseen.

2. TAPAUS: Oletetaan, että palkin massa on merkityksetön ja kuorman massa on m. Kuormasta aiheutuu palkille pistevoima

$$N = mg - m\ddot{v}$$

Toisaalta

$$\ddot{v} = \frac{d}{dt}(\dot{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(v_0 v') = v_0 \frac{d}{dt} v'$$

$$= v_0 \frac{dx}{dt}\frac{dv'}{dx} = v_0^2 v''$$

$$\Rightarrow \quad N = mg - m v_0^2 v'' \tag{1}$$

Toisaalta, koska palkki oletetaan massattomaksi, on sen taipuma kosketusvoimasta N sama kuin staattinen taipuma samasta voimasta eli

$$v = \frac{N x^2 (L-x)^2}{3LEI} \tag{2}$$

Eliminoimalla N yhtälöistä (1) & (2) päädytään differentiaaliyhtälöön

$$v'' + \frac{3LEI}{m v_0^2 x^2 (L-x)^2} v = g/v_0^2 \tag{3}$$

On huomattava, että differentiaaliyhtälö (3) määrittelee itse asiassa liikkuvan massan ratakäyrän, sen ei tarvitse esittää palkin taipumaviivaa mindän hetkenä.
Differentiaaliyhtälön (3) esitti v. 1849 F. WILLIS Cambridgesta. Hän ei kuitenkaan osannut ratkaista yhtälöään ja siksi hän pyysi apua STOKESilta, joka samana vuonna ratkaisi sen sarjakehitelmien avulla.
Eräs likiratkaisu differentiaaliyhtälölle (3) saadaan helposti, kun oletetaan, että hitausvoimaa laskettaessa taipumat ovat samat kuin vastaavat taipumat arvolla $v_0 = 0$, siis

$$v_{v_0=0}(x) = mg\,x^2(L-x)^2/3LEI$$

$$\Rightarrow \quad v''_{v_0=0}(x) = 2mg\,(L^2-6Lx+6x^2)/3LEI$$

$$\Rightarrow \quad N \approx mg - mv_0^2\,\frac{2mg}{3LEI}(L^2-6Lx+6x^2)$$

N saa suurimman arvonsa, kun $x = \frac{L}{2}$ eli kun kuorma on palkin keskellä, jolloin

$$N_{max} \approx mg\left(1 + mv_0^2\frac{L}{3EI}\right)$$

Siis $N_{max} > mg$. Kun palkki on massaton, kasvaa taipuma samassa suhteessa, joten dynaaminen taipuma keskellä on

$$\delta_{dyn} \approx \delta_{st}\left(1 + mv_0^2\frac{L}{3EI}\right)$$

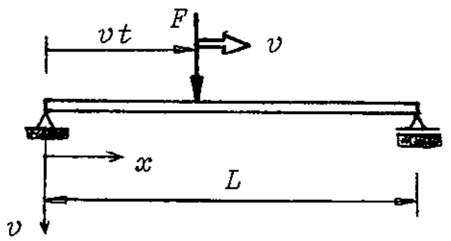
Ja suurin taivutusmomentti on palkin keskellä

$$M_{tmax} \approx M_{st}\left(1 + mv_0^2\frac{L}{3EI}\right)$$

Toinen termi yhtälöissä on käytännön sovellutuksissa pieni. Vaikka saadut tulokset ovatkin likimääräiset, voidaan niistä kuitenkin todeta, että kuorman tasaisen liikkeen vaikutus palkkeihin, jotka ovat kevyitä, on pieni.
Edellä esitettyä likimenetelmää sanotaan usein STOKES-WILLISin menetelmäksi.

3. TAPAUS: Ei oteta huomioon kuorman inertiaalivaikutusta, mutta palkin inertiaalivaikutus huomioidaan. Tämän probleeman ratkaisi A. N. KRYLOV vuonna 1905. Probleeman ratkaisu on esitetty sivuilla 168-175.

4. TAPAUS: Sekä kuorman että palkin inertiaalivaikutus otetaan huomioon. Tehtävä voidaan ratkaista päättymättömiä sarjakehitelmiä käyttäen.
Kts. tarkemmin teoksesta:
Frýba L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads.



ESIMERKKI:

Tarkastellaan kuvan homogeenista ja tasapaksua palkkia, jolla liikkuu massaton laite vakionopeudella v oikealle aiheuttaen pistevoiman F palkille. Määritä normaalimuotomenetelmällä palkin vaste $v(x,t)$ sekä kuorman resonanssinopeus.

RATKAISU:

Sivun 150 mukaan palkin ominaisparit ovat

$$\omega_i = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A L^4}} \quad \& \quad \Phi_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}_\nu = \int_0^L \varrho A\, \Phi_\nu^2(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\varrho A L$$

Pistevoima $F(x,t)$ voidaan esittää DIRAC'in δ-funktion avulla seuraavasti

$$p(x,t) = F_0\, f(t)\, \delta(x - vt)$$

Kuormitustermi $\{Q\}$ funktioiden Φ_i virittämässä funktioavaruudessa on

$$Q_i = \int_0^L p(x,t)\,\Phi_i(x)\,dx = F_0 f(t) \int_0^L \sin\frac{i\pi x}{L}\,\delta(x-vt)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad Q_i = \begin{cases} F_0 f(t) \sin(\frac{i\pi v t}{L}) & 0 \le vt \le L \\ 0 & vt > L \end{cases}$$

Muunnos pääkoordinaatistoon (vrt. sivu 120):

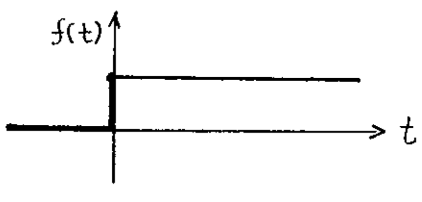
$$\{\tilde{\phi}\} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}}\{\phi\} \quad , \quad \phi_i^j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \{q\} = [\Phi]\{\eta\} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}}[I]\{\eta\}$$

$$\Rightarrow \quad \{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T\{Q\} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}}\{Q\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_i}} \begin{cases} F_0\, f(t) \sin(\frac{i\pi v t}{L}) & 0 \le vt \le L \\ 0 & vt \ge L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\varrho A L/2}} \begin{cases} F_0\, f(t) \sin(\frac{i\pi v t}{L}) \\ 0 \end{cases}$$

Aikafunktio $f(t)$ on askelfunktio



$$f(t) \equiv s(t) = \begin{cases} 1 & , t \ge 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

(jatkuu)

(jatkoa)

Ratkaisu: $\eta_i(t) = F_{oi}\int_0^t f_i(\tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau$, $h_i(t-\tau) = \frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)$

$\Rightarrow$

$$\eta_i(t) = \frac{F_0}{\sqrt{\rho A L/2}} \int_0^t s(\tau)\sin\left(\frac{i\pi v\tau}{L}\right)\frac{1}{\omega_i}\sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \eta_i(t) = \frac{F_0/\omega_i}{\sqrt{\rho A L/2}} \int_0^t s(t)\sin\Omega_i\tau \sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau$$

jolloin on merkitty $\Omega_i = i\pi v/L$. Taulukosta saadaan

$$\eta_i(t) = \frac{F_0/\omega_i}{\sqrt{\rho A L/2}} \frac{1}{\Omega_i^2-\omega_i^2}(\Omega_i\sin\omega_i t - \omega_i\sin\Omega_i t) \quad , \Omega_i \neq \omega_i$$

$\Rightarrow$

$$\eta_i(t) = \frac{F_0}{\sqrt{\rho A L/2}} \frac{1}{\Omega_i^2-\omega_i^2}\left(\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\right) \quad , \Omega_i \neq \omega_i$$

$$\Rightarrow \quad q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{M_i}}\eta_i(t) = \frac{2F_0}{\rho A L}\frac{1}{\Omega_i^2-\omega_i^2}\left(\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\right), \quad \Omega_i \neq \omega_i$$

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\,\Phi_i(x)$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = \frac{2F_0}{\rho A L}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)}{\Omega_i^2-\omega_i^2}\left(\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\right) \quad ◄$$

missä $\quad \omega_i = (i\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad , \Omega_i = \frac{i\pi v}{L} \quad , 0 \le vt \le L$

Ehto: $\Omega_i \neq \omega_i$ on myös oltava voimassa. Jos $\Omega_i = \omega_i$ niin sanotaan, että kuorma liikkuu <u>resonanssinopeudella</u>. Sille saadaan lauseke

$$\Omega_i = \omega_i \Rightarrow \frac{i\pi v}{L} = i^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \Rightarrow v_{res} = i\pi\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^2}} \quad ◁$$

Edellä on siis käsitelty tapaus, kun $0 \le t \le \frac{L}{v}$.
Jos $t > \frac{L}{v}$, niin kuorma on jättänyt palkin ja jää vapaasti värähtelemään. Todellisessa rakenteessa vaimennus hävittää vähitellen värähtelyn pois.

Tarkastellaan seuraavassa tapausta, jossa palkin yli ajetaan <u>resonanssinopeudella</u>, jolloin

$\Omega_\nu = \omega_\nu$, ν kiinnitetty.

$$\Rightarrow \quad \int_0^t s(\tau)\sin\omega_\nu\tau \sin\omega_\nu(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\omega_\nu}(\sin\omega_\nu t - \omega_\nu t\cos\omega_\nu t)$$

$$\Rightarrow \quad \eta_i(t) = \frac{F_0/2\omega_\nu^2}{\sqrt{\rho AL/2}}(\sin\omega_\nu t - \omega_\nu t\cos\omega_\nu t)$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = \frac{2F_0}{\rho AL}\Big[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{\infty} \frac{\sin\frac{i\pi x}{L}}{\Omega_i^2-\omega_i^2}\Big(\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\Big) +$$

$$+ \sin\frac{\nu\pi x}{L}\cdot\frac{1}{2\omega_\nu^2}(\sin\omega_\nu t - \omega_\nu t\cos\omega_\nu t)\Big]$$

Tuloksen jälkimmäinen termi kasvaa rajatta ajan myötä. Tosin tulos on voimassa vain kun $0 \le t \le L/v$, joten siirtymä v ei ehdi kasvaa rajatta.

<u>ESIMERKKI</u>:

Määritä edellisen tehtävän palkin keskipisteen maksimitaipuma verrattuna vastaavaan staattiseen taipumaan suhteen Ω_1/ω_1 funktiona.

<u>RATKAISU</u>:

Palkin keskipisteen staattinen taipuma on suurimmillaan, kun staattinen kuormitus F_0 on palkin keskellä. Siis

$$\delta_{st\,max} = \frac{F_0 L^3}{48EI}$$

Palkin keskipisteen dynaaminen taipuma saadaan lausekkeesta

$$v\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2F_0}{\rho AL}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{i\pi}{2}\right)}{\Omega_i^2-\omega_i^2}\left(\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\right)$$

Lasketaan malliksi resonanssinopeutta $\Omega_1 = \omega_1$ vastaava keskipisteen maksimitaipuma:

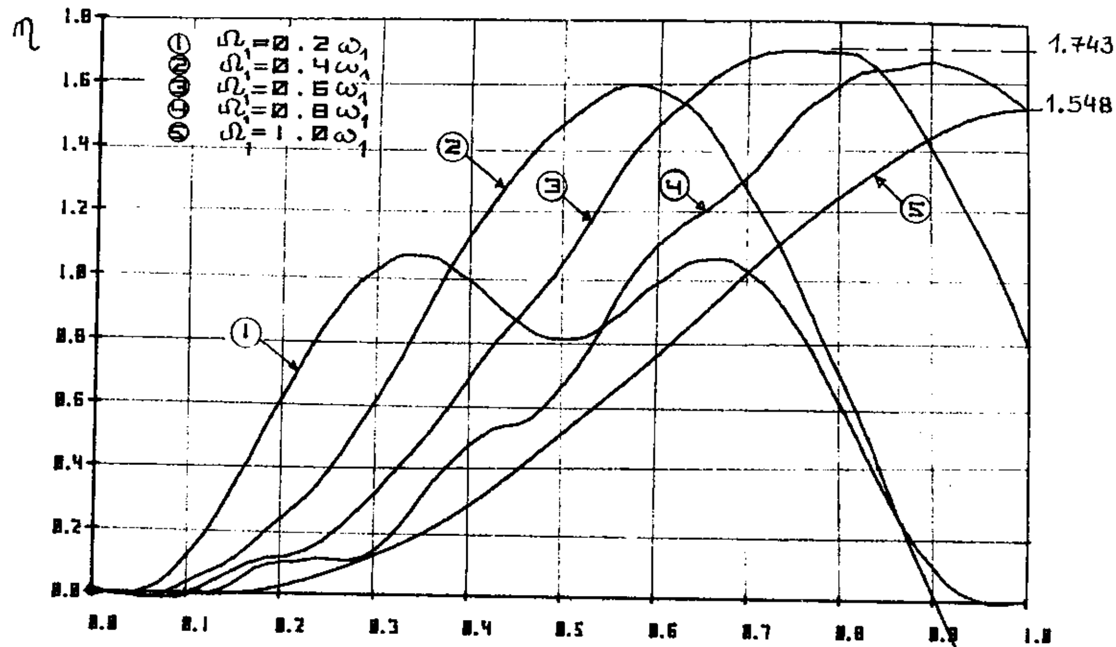
$$\Rightarrow \quad \Omega_i = \frac{i\pi v_{res}}{L} = \frac{i\pi^2}{L}\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^2}} = \frac{\omega_i}{i}$$

(jatkuu)

(jatkoa)

$$\Rightarrow \quad v\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2F_0}{\rho A L}\left[\frac{1}{2\omega_1^2}(\sin\omega_1 t - \omega_1 t\cos\omega_1 t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{i}{\omega_i}\right)^2 \frac{\sin(i\pi/2)}{1-i^2}\left(\frac{1}{i}\sin\omega_i t - \sin\frac{\omega_i}{i}t\right)\right]$$



PALKIN KESKIPISTEEN DYNAAMISEN TAIPUMAN SUHDE STAATTISEEN MAKSIMITAIPUMAAN $\eta = w(L/2,t)/\delta_{ST}$ ERI AJONOPEUKSILLA

Kuvassa on keskipisteen dynaaminen taipuma eri ajonopeuksilla ja kuorman eri sijaintikohdilla. Siitä nähdään, että maksimitaipuma saadaan ajonopeudella $\Omega_1 = \omega_1$ hetkellä, jolloin kuorma on juuri jättämässä palkin, jolloin

$$t = \frac{L}{v_{res}} = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\rho A L^2}{EI}} = \frac{\pi}{\omega_1}$$

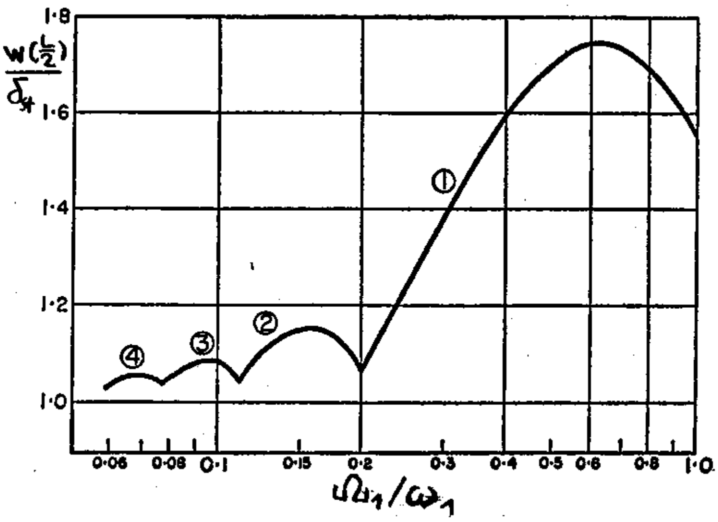
$$\Rightarrow \quad v\left(\frac{L}{2},\frac{\pi}{\omega_1}\right) = \frac{2F_0}{\rho A L}\left[\frac{1}{2\omega_1^2}(\underbrace{\sin\pi}_{0} - \pi\cos\pi) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{i}{\omega_1}\right)^2\frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{1-i^2}\left(\frac{1}{i}\underbrace{\sin(i^2\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(i\pi)}_{0}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad v\left(\frac{L}{2},\frac{\pi}{\omega_1}\right) = \frac{2F_0}{\rho A L}\,\frac{\pi}{2\omega_1^2} = \frac{F_0 L^3}{\pi^3 EI}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v\left(\frac{L}{2},\frac{\pi}{\omega_1}\right)}{v_{st\,max}} = \frac{1/\pi^3}{1/48} = \frac{48}{\pi^3} \approx 1{,}548 \qquad \triangleleft$$

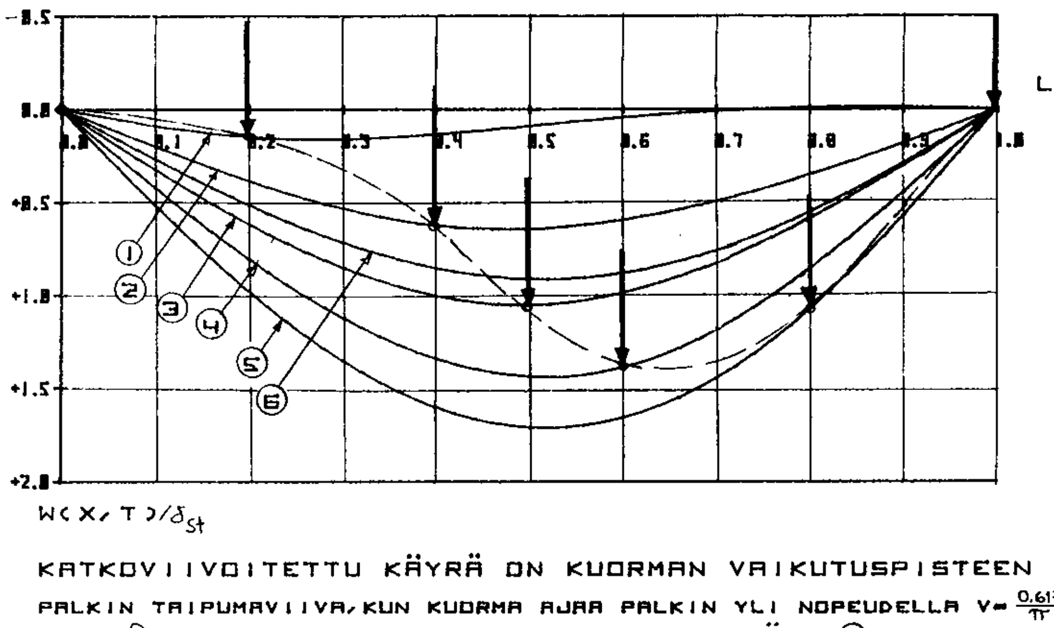
(jatkuu)

Vastaavalla tavalla saadaan suhteen $v_{dyn.max}/v_{stmax}$ suhteen Ω_1/ω_1 funktiona. Tuloksena on kuvaaja (Warburton, The Dynamical Behaviour of Structures):



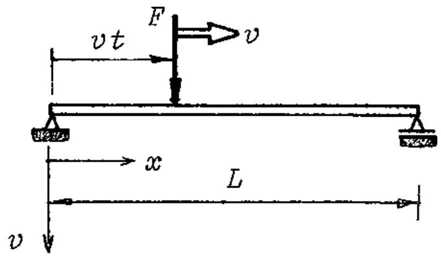
Tuloksesta nähdään se mielenkiintoinen seikka, että keskipisteen maksimitaipumaa ei saada silloin, kun ajetaan resonanssinopeudella $\Omega_1 = \omega_1$ ($1{,}548\ v_{stmax}$), vaan ajettaessa nopeudella $\Omega_1 = 0{,}617\,\omega_1$ jolloin saadaan $1{,}743\,v_{stmax}$

Kun kuorma kulkee palkin yli vaarallisimmalla nopeudella $\Omega_1 = 0{,}617\ \omega_1$, niin palkin taipumaviiva kehittyy alla olevan kuvan mukaisesti:



KATKOVIIVOITETTU KÄYRÄ ON KUORMAN VAIKUTUSPISTEEN URA.
PALKIN TAIPUMAVIIVA, KUN KUORMA AJAA PALKIN YLI NOPEUDELLA $V = \frac{0.617}{\pi} L\omega_1$ (ELI $\Omega_1 = 0.617\omega_1$) KUORMAN SIJAITESSA PISTEISSÄ : ① X=0.2L, ② X=0.4L, ③ X=0.5L, ④ X=0.6L, ⑤ X=0.8L, ⑥ X=1.0L.

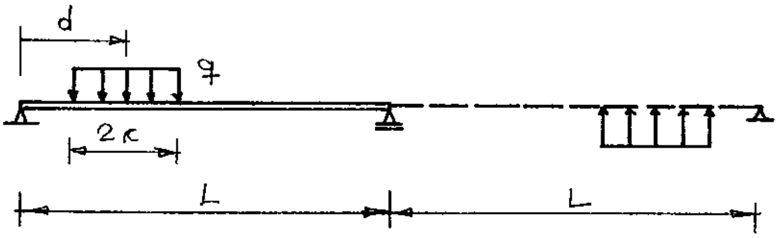
HP 9830 A



ESIMERKKI:

Kuvan palkilla liikkuu massaton kuorma vakionopeudella v oikealle. Määritä palkin siirtymävaste kehittämällä kuormitus ensin *FOURIER*-sarjaksi.

RATKAISU:



jakso T

$T = 2L$

Kehitetään kuormitus antimetriseksi FOURIER-sinisarjaksi:

$$b_\nu = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\nu\pi x}{T}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} q\sin\frac{2\nu\pi x}{2L}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad b_\nu = \frac{2q}{L}\int_{d-c}^{d+c}\sin\frac{\nu\pi x}{L}\,dx = \frac{4q}{\nu\pi}\sin\frac{\nu\pi d}{L}\sin\frac{\nu\pi c}{L}$$

$$\Rightarrow \quad q(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4q}{\nu\pi}\sin\frac{\nu\pi d}{L}\sin\frac{\nu\pi c}{L}\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

merk. $F_0 = 2cq$

$\Rightarrow q = F_0/2c$

$$\Rightarrow \quad q(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2F_0}{L}\sin\frac{\nu\pi d}{L}\,\frac{\sin\frac{\nu\pi c}{L}}{\frac{\nu\pi c}{L}}\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

Pistekuorma, joten $c \to 0$. Tällöin kuormitustiheys on

$$q(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2F_0}{L}\sin\frac{\nu\pi d}{L}\sin\frac{\nu\pi x}{L} \qquad \lhd$$

Kun $d = vt$, niin

$$q(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2F_0}{L}\sin\frac{\nu\pi v t}{L}\sin\frac{\nu\pi x}{L} = q(x,t)$$

Palkin <u>harmonisten</u> värähtelyjen differentiaaliyhtälö on sivun 14 mukaan

$$EI\hat{v}'''' + \rho A\ddot{v} = q(x,t) \quad , \quad \lambda^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \quad , \quad \ddot{v} = -\omega^2 v$$

$$\hat{v}'''' - \lambda^4 v = \frac{q(x,t)}{EI}$$

Homogeenisen yhtälön $\hat{v}'''' - \lambda^4 v = 0$ ratkaisu on

$$v_h(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x)\left(A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t\right) \qquad \Bigg| \quad \Phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \quad \omega_i = (i\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

Arvataan täydellisen yhtälön yksityisratkaisuksi

$$v_T(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \sin\frac{\nu\pi v t}{L}\,\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{v}_T(x,t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \left(\frac{\nu\pi v}{L}\right)^2 \sin\frac{\nu\pi v t}{L}\,\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

$$v_T''''(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^4 \sin\frac{\nu\pi v t}{L}\,\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

Sijoittamalla diff. yhtälöön saadaan

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \Big[-\underbrace{\left(\frac{\nu\pi v}{L}\right)^2}_{\Omega_\nu^2} + \underbrace{(\nu\pi)^4 \frac{EI}{\rho A L^4}}_{\omega_\nu^2}\Big] \sin\frac{\nu\pi v t}{L}\,\sin\frac{\nu\pi x}{L} \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2F_0}{\rho A L} \sin\frac{\nu\pi v t}{L}\,\sin\frac{\nu\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow$$

$$D_\nu = \frac{2F_0}{\rho A L}\,\frac{1}{\omega_\nu^2 - \Omega_\nu^2}, \qquad v = v_h + v_T$$

$$\Rightarrow$$

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{L}\left[A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t + \frac{2F_0}{\rho A L}\,\frac{1}{\omega_i^2 - \Omega_i^2} \sin\Omega_i t\right]$$

Alkuehto: $v(x,0) = 0 \Rightarrow B_i = 0$

$\dot{v}(x,0) = 0 \Rightarrow A_i = -\frac{2F_0}{\rho A L}\,\frac{\Omega_i}{\omega_i}\,\frac{1}{\omega_i^2 - \Omega_i^2}$

$$\Rightarrow$$

$$v(x,t) = \frac{2F_0}{\rho A L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)}{\Omega_i^2 - \omega_i^2}\left[\frac{\Omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i t - \sin\Omega_i t\right] \qquad \triangleleft$$

$0 \le t \le v/L \quad , \quad \Omega_i \neq \omega_i$

Tulos on sama kuin aikaisemmin normaalimuotomenetelmällä saatiin.

RAKENTEIDEN DYNAMIIKAN KIRJALLISUUSLUETTELO

[1] *Bathe J., Wilson L.,* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall Inc., Engl. Cliffs., New Jersey 1976, 528 s.

[2] *Hurty W., Rubinstein M.,* Dynamics of Structures. Prentice-Hall Inc., Engl. Cliffs., New Jersey, 1964, 455 s.

[3] *Zienkiewicz O.,* The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill Book Company, London, 1971, 521 s.

[4] *Thomson W.,* Theory of Vibration with Applications. Prentice-Hall, Inc., Engl. Cliffs., New Jersey, 1972, 467 s.

[5] *Clough R., Penzien J.,* Dynamics of Structures. McGraw-Hill Book Co., London, 1975.

[6] *Koloušek V.,* Dynamics in Engineering Structures. Butterworths Book Company, London, 1973, 580 s.

[7] *Frýba L.,* Vibration of Solids and Structures under moving loads. Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands.

[8] *Henrych J.,* Dynamics of Arches and Frames. Elsevier, Amsterdam, 1981, 463 s.

[9] *Meirovitch L.,* Analytical Methods in Vibrations. MacMillan Company, London, 1967.

[10] *Blevins R.,* Formulas for natural frequency and mode shape. van Nostrand Reinhold Book Company, 1979.

[11] *Pitloun R.,* Schwingende Balken. Berechnungstafeln. Veb Verlag für Bauwesen, Berlin, 1970.

[12] *Szuladzinski G.,* Dynamics of Structures and Machinery. Problems and Solutions. John Wiley & Sons, New York, 1982.

[13] *Donéa J.,*(ed.) Advanced structural Dynamics. Applied Science Publisher, LTD, London, 1980, 471 s.

[14] *Gorman D.,* Free Vibration Analysis of Rectangular Plates. Elsevier, New York, 1982.

[15] *Soedel W.,* Vibration of shells and plates. Marcel Dekker Inc., New York, 1981.

[16] *Akesson B., Tägnfors H., Johannesson O.,* Böjsvängande balkar och ramar. AWE/Gebers, Stockholm, 1972.

[17] *Aramraks T.,* Highway Bridge Vibration Studies. A Thesis in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Dec., 1974, Purdue University.

[18] *Troitsky M.,* Stiffened Plates, bending, stability and vibrations. Elsevier, Amsterdam, 1976.