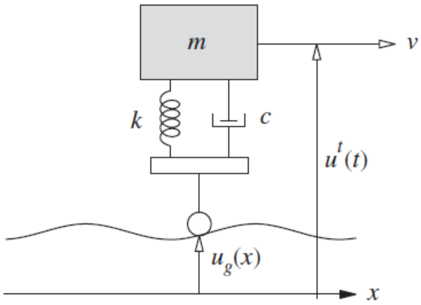
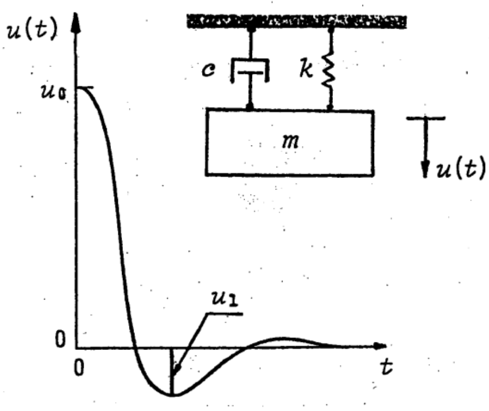


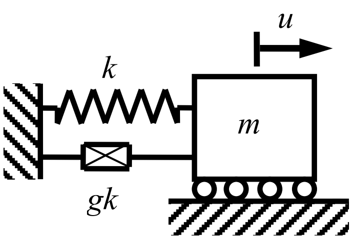
1. An automobile is crudely idealized as a lumped mass m supported on a spring–damper system as shown in Figure. The automobile travels at constant speed v over a road whose roughness is known as a function of position along the road. Derive the equation of motion.



1. Kuvan systeemi on levossa staattisessa tasapainoasemassaan, josta siirtymä u mitataan. Systeemi vapautetaan levosta alkuasemasta $u = u_0$. Määritä kuvassa esitetyn siirtymän u_1 arvo sekä värähtelyn logaritminen dekrementti. $m = 3$ kg, $k = 108$ N/m, $c = 18$ Ns/m

Vast: $-0{,}1630\,u_0$, 3,63

Initial displacement u_0 is given to the viscously damped system. Then the mass point is released. Define the displacement u_1 and logarithmic decrement.



2. Kuvan värähtelijää kuormittaa harmoninen voima

$$F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$$

Värähtelijän liikettä vaimentaa rakenteellinen vaimennus, jonka vaimennuskerroin g. Totea ensin, että vaimennusvoima on

$$F_D = -\frac{gk}{\Omega}\dot{u}$$

Esitä värähtelijän liikeyhtälöt sekä määritä pysyvien värähtelyjen vaste. Miten rakenteellinen vaimennus poikkeaa viskoosisesta vaimennuksesta vahvistuskertoimen osalta?

Harmonic force $F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$ is acting on the vibration system. The system has rate-independent linear damping.

Determinate equation of motion and steady state response. How structural damping differs from viscously damping?

Problem 1.19

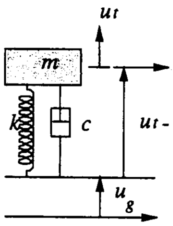


Fig. 1.19(a)

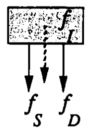


Fig. 1.19(b)

Displacement u^t is measured from the static equilibrium position under the weight mg.

From the free-body diagram in Fig. 1.19(b)

$$f_I + f_D + f_S = 0 \qquad \text{(a)}$$

where

$$\begin{aligned} f_I &= m\ddot{u}^t \\ f_D &= c(\dot{u}^t - \dot{u}_g) \qquad \text{(b)} \\ f_S &= k(u^t - u_g) \end{aligned}$$

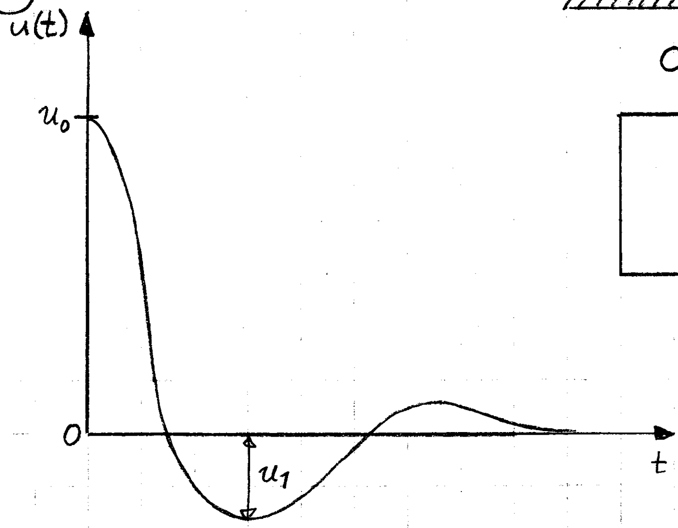
Substituting Eqs. (b) in Eq. (a) gives

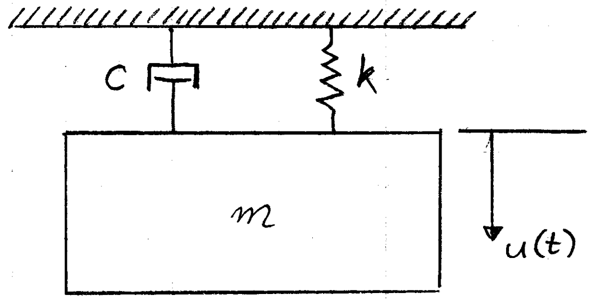
$$m\ddot{u}^t + c(\dot{u}^t - \dot{u}_g) + k(u^t - u_g) = 0$$

Noting that $x = vt$ and transferring the excitation terms to the right side gives the equation of motion:

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u}^t + ku^t = c\dot{u}_g(vt) + ku_g(vt)$$

1





$m = 3\,\mathrm{kg}$, $k = 108\,\frac{N}{m}$

$c = 18\,\frac{Ns}{m}$

ominaiskulmataajuus

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{108}{3}}\ \frac{rad}{s} = 6\ \frac{rad}{s}$$

kriittinen vaimennusvakio

$$c_k = 2m\omega = 2\cdot 3\cdot 6\ \frac{kg}{s} = 36\ \frac{Ns}{m}$$

suhteellinen vaimennusvakio

$$\zeta = \frac{c}{c_k} = \frac{18}{36} = 0,5$$

vaimennetun värähtelijän ominaiskulmataajuus

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = 6\cdot\sqrt{1-0,5^2} \approx 5,196\ \frac{rad}{s}$$

vaimenevan ominaisvärähtelyn värähdysaika

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{5,196} \approx 1,209\ s$$

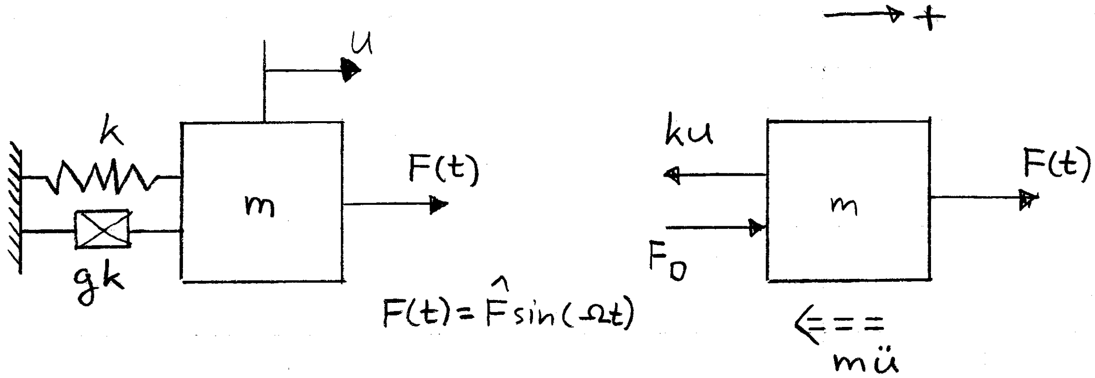
alkuehdot $u(0) = u_0$ ja $\dot{u}(0) = v_0 = 0$, kun $t = \frac{1}{2}T_d$

$$u_1 = u(\tfrac{1}{2}T_d) = e^{-\zeta\omega\frac{1}{2}T_d}\left(u_0\cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_d T_d}{2}}_{=\pi}\Big) + \frac{\zeta\omega u_0}{\omega_d}\sin\Big(\underbrace{\frac{\omega_d T_d}{2}}_{=\pi}\Big)\right)$$

$$\approx -0,1630\,u_0$$

logaritminen degrementti $\delta = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{2\pi\cdot 0,5}{\sqrt{1-0,5^2}} \approx 3,63$

(2)



Harmonisessa värähdysliikkeessä

$$u = \hat{u}\, e^{i(\Omega t + \phi)}$$

$$\dot{u} = i\Omega \hat{u}\, e^{i(\Omega t + \phi)} = i\Omega u$$

$$u = \frac{\dot{u}}{i\Omega}$$

Kimmoisen systeemin rakenteellinen vaimennusvoima on kokemusten mukaan rakenteen kimmovoimiin F_E verrannollinen ja vastakkaissuuntainen materiaalipartikkelin nopeudelle $\dot{u}$

$$F_D = ig F_E = ig(-ku) = -igku = -igk\frac{\dot{u}}{i\Omega} = -\frac{gk}{\Omega}\dot{u}$$

Liikeyhtälöt

$$\sum F \rightarrow \quad -ku - m\ddot{u} + F_D + F(t) = 0$$

$$-ku - m\ddot{u} - \frac{gk}{\Omega}\dot{u} + F(t) = 0$$

$$m\ddot{u} + \frac{gk}{\Omega}\dot{u} + ku = F(t) \quad \| : m$$

$$\ddot{u} + \frac{g}{\Omega}\frac{k}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}\hat{F}\sin(\Omega t), \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow m = \frac{k}{\omega^2}$$

$$\ddot{u} + \frac{g\omega^2}{\Omega}\dot{u} + \omega^2 u = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2 \sin(\Omega t), \quad u_{st} = \frac{\hat{F}}{k}$$

$$\ddot{u} + \frac{g\omega^2}{\Omega}\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 u_{st}\sin(\Omega t)$$

Differentiaaliyhtälö on samaa muotoa kuin prujun kaava (239)

$$(239) \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = x_{st}\,\omega^2 \sin(\Omega t)$$

nyt $\quad 2\zeta\omega = \frac{g\,\omega^2}{\Omega} \quad , \quad 2\zeta\frac{\Omega}{\omega} = g$

vahvistuskerroin

$$(242) \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{x_{st}}{\sqrt{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}}$$

$$\text{nyt} \quad \hat{A} = \frac{u_{st}}{\sqrt{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + g^2}}$$

$$(243) \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left[\frac{-2\zeta\frac{\Omega}{\omega}}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2}\right]$$

$$\text{nyt} \Rightarrow \quad \phi = \arctan\left[\frac{-g}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2}\right]$$

$$(241) \Rightarrow \quad x_t = \hat{A}\sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{nyt} \Rightarrow \quad u_t = \hat{A}\sin(\Omega t + \phi)$$

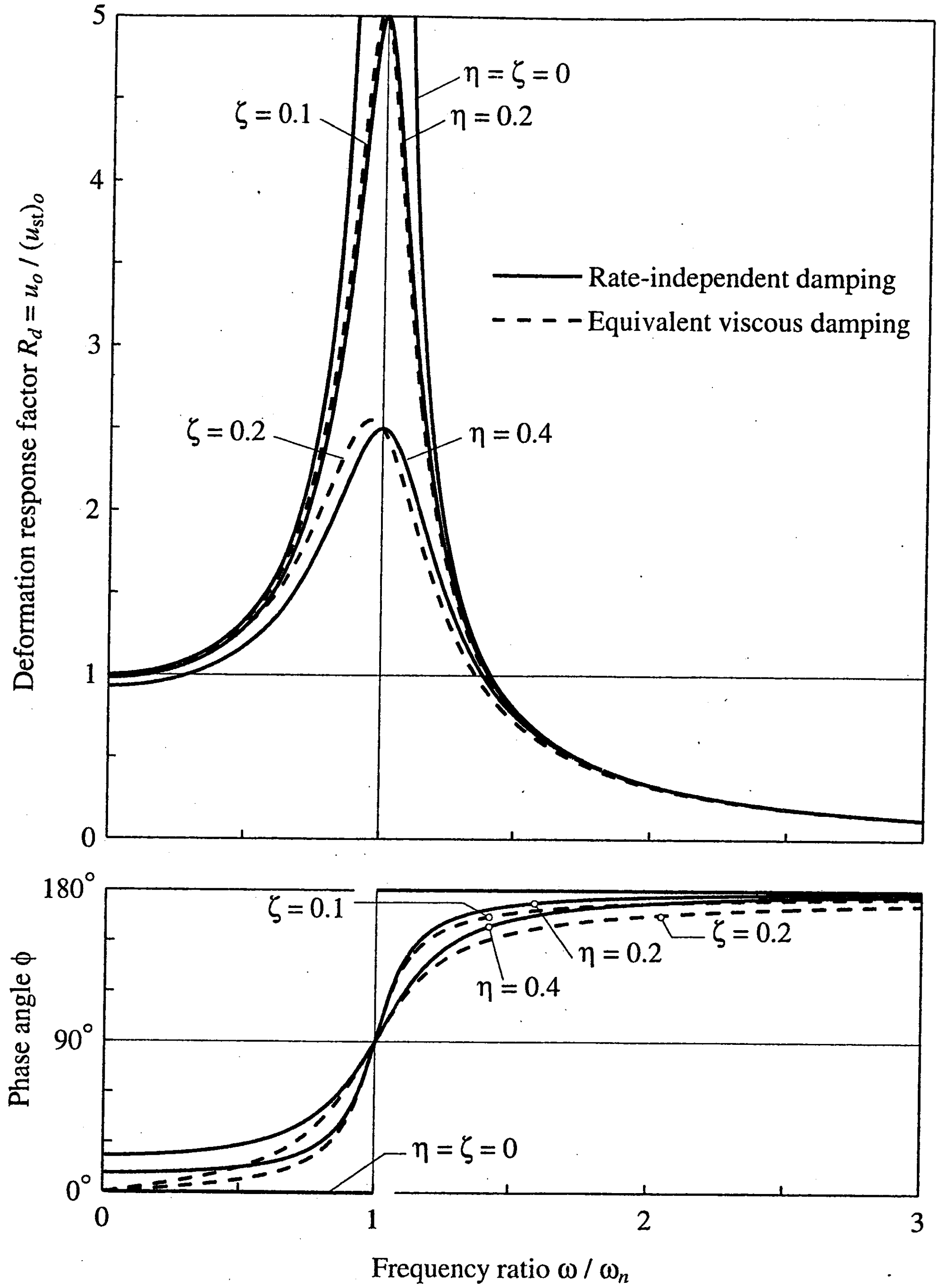
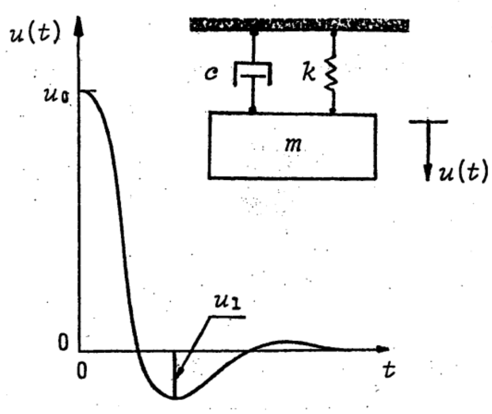
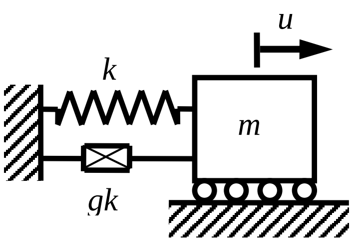


Figure 3.10.3 Response of system with rate-independent damping: exact solution and approximate solution using equivalent viscous damping.



1. Kuvan systeemi on levossa staattisessa tasapainoasemassaan, josta siirtymä u mitataan. Systeemi vapautetaan levosta alkuasemasta $u = u_0$. Määritä kuvassa esitetyn siirtymän u_1 arvo sekä värähtelyn logaritminen dekrementti. $m = 3\,\mathrm{kg}$, $k = 108\,\mathrm{N/m}$, $c = 18\,\mathrm{Ns/m}$

   Vast: $-0{,}1630\,u_0$, $3{,}63$



2. Kuvan värähtelijää kuormittaa harmoninen voima

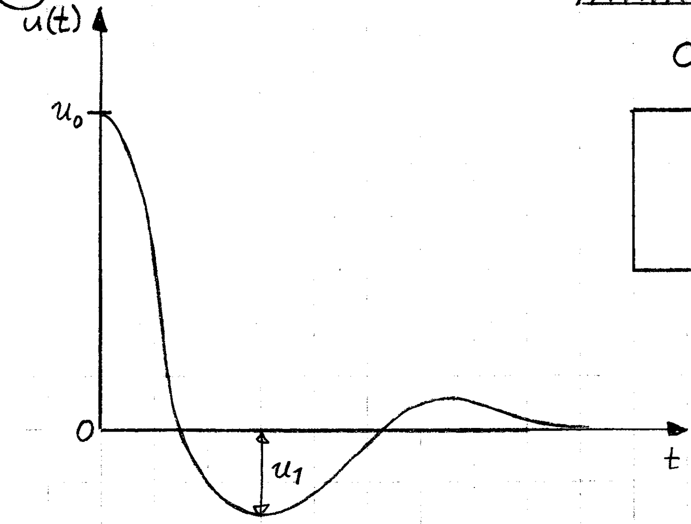
   $$F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$$

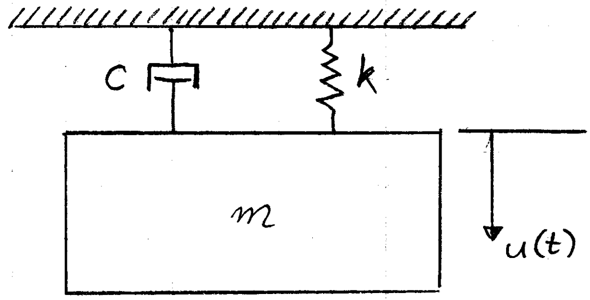
   Värähtelijän liikettä vaimentaa rakenteellinen vaimennus, jonka vaimennuskerroin g. Totea ensin, että vaimennusvoima on

   $$F_D = -\frac{gk}{\Omega}\dot{u}$$

   Esitä värähtelijän liikeyhtälöt sekä määritä pysyvien värähtelyjen vaste. Miten rakenteellinen vaimennus poikkeaa viskoosisesta vaimennuksesta vahvistuskertoimen osalta?

1





$m = 3\,kg$, $k = 108\,\frac{N}{m}$

$c = 18\,\frac{Ns}{m}$

ominaiskulmataajuus

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{108}{3}}\ \frac{rad}{s} = 6\ \frac{rad}{s}$$

kriittinen vaimennusvakio

$$c_k = 2m\omega = 2 \cdot 3 \cdot 6\ \frac{kg}{s} = 36\ \frac{Ns}{m}$$

suhteellinen vaimennusvakio

$$\zeta = \frac{c}{c_k} = \frac{18}{36} = 0,5$$

vaimennetun värähtelijän ominaiskulmataajuus

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = 6 \cdot \sqrt{1-0,5^2} \approx 5,196\ \frac{rad}{s}$$

vaimenevan ominaisvärähtelyn värähdysaika

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{5,196} \approx 1,209\ s$$

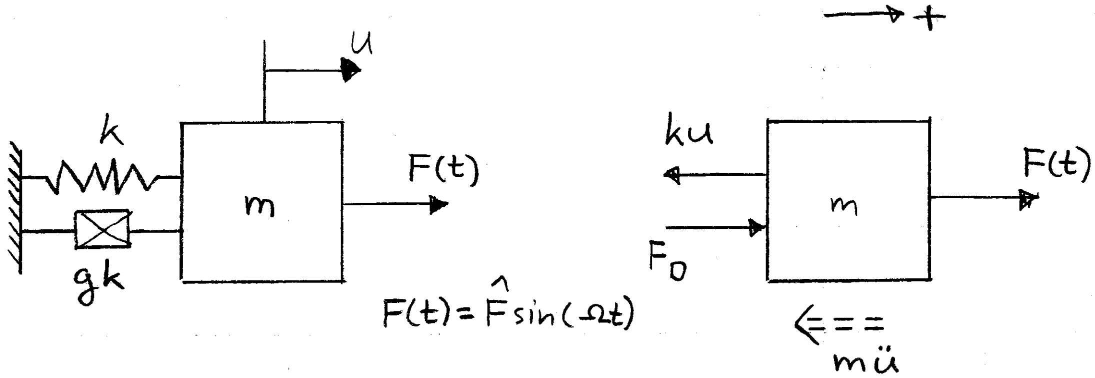
alkuehdot $u(0) = u_0$ ja $\dot{u}(0) = v_0 = 0$, kun $t = \frac{1}{2}T_d$

$$u_1 = u(\tfrac{1}{2}T_d) = e^{-\zeta\omega\frac{1}{2}T_d}\left(u_0 \cos(\underbrace{\frac{\omega_d T_d}{2}}_{=\pi}) + \frac{\zeta\omega u_0}{\omega_d}\sin(\underbrace{\frac{\omega_d T_d}{2}}_{=\pi})\right)$$

$$\approx -0,1630\,u_0$$

logaritminen degrementti $\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \cdot 0,5}{\sqrt{1-0,5^2}} \approx 3,63$

2



$F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$

Harmonisessa värähdysliikkeessä

$$u = \hat{u}\, e^{i(\Omega t + \phi)}$$

$$\dot{u} = i\Omega \hat{u}\, e^{i(\Omega t+\phi)} = i\Omega u$$

$$u = \frac{\dot{u}}{i\Omega}$$

Kimmoisen systeemin rakenteellinen vaimennusvoima on kokemusten mukaan rakenteen kimmovoimiin F_E verrannollinen ja vastakkaissuuntainen materiaalipartikkelin nopeudelle $\dot{u}$

$$F_D = ig F_E = ig(-ku) = -igku = -igk\frac{\dot{u}}{i\Omega} = -\frac{gk}{\Omega}\dot{u}$$

Liikeyhtälöt

$$\sum F \rightarrow \quad -ku - m\ddot{u} + F_D + F(t) = 0$$

$$-ku - m\ddot{u} - \frac{gk}{\Omega}\dot{u} + F(t) = 0$$

$$m\ddot{u} + \frac{gk}{\Omega}\dot{u} + ku = F(t) \quad \|:m$$

$$\ddot{u} + \frac{g}{\Omega}\frac{k}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}\hat{F}\sin(\Omega t), \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow m = \frac{k}{\omega^2}$$

$$\ddot{u} + \frac{g\omega^2}{\Omega}\dot{u} + \omega^2 u = \frac{\hat{F}}{k}\omega^2 \sin(\Omega t), \quad u_{st} = \frac{\hat{F}}{k}$$

$$\ddot{u} + \frac{g\omega^2}{\Omega}\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 u_{st}\sin(\Omega t)$$

Differentiaaliyhtälö on samaa muotoa kuin prujun kaava (239)

$$(239) \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = x_{st}\,\omega^2 \sin(\Omega t)$$

$$\text{nyt} \quad 2\zeta\omega = \frac{g\,\omega^2}{\Omega}, \quad 2\zeta\frac{\Omega}{\omega} = g$$

vahvistuskerroin

$$(242) \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{x_{st}}{\sqrt{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}}$$

$$\text{nyt} \quad \hat{A} = \frac{u_{st}}{\sqrt{[1-(\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + g^2}}$$

$$(243) \Rightarrow \varphi = \arctan\left[\frac{-2\zeta\frac{\Omega}{\omega}}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2}\right]$$

$$\text{nyt} \Rightarrow \quad \phi = \arctan\left[\frac{-g}{1-(\frac{\Omega}{\omega})^2}\right]$$

$$(241) \Rightarrow \quad x_t = \hat{A}\sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{nyt} \Rightarrow \quad u_t = \hat{A}\sin(\Omega t + \phi)$$

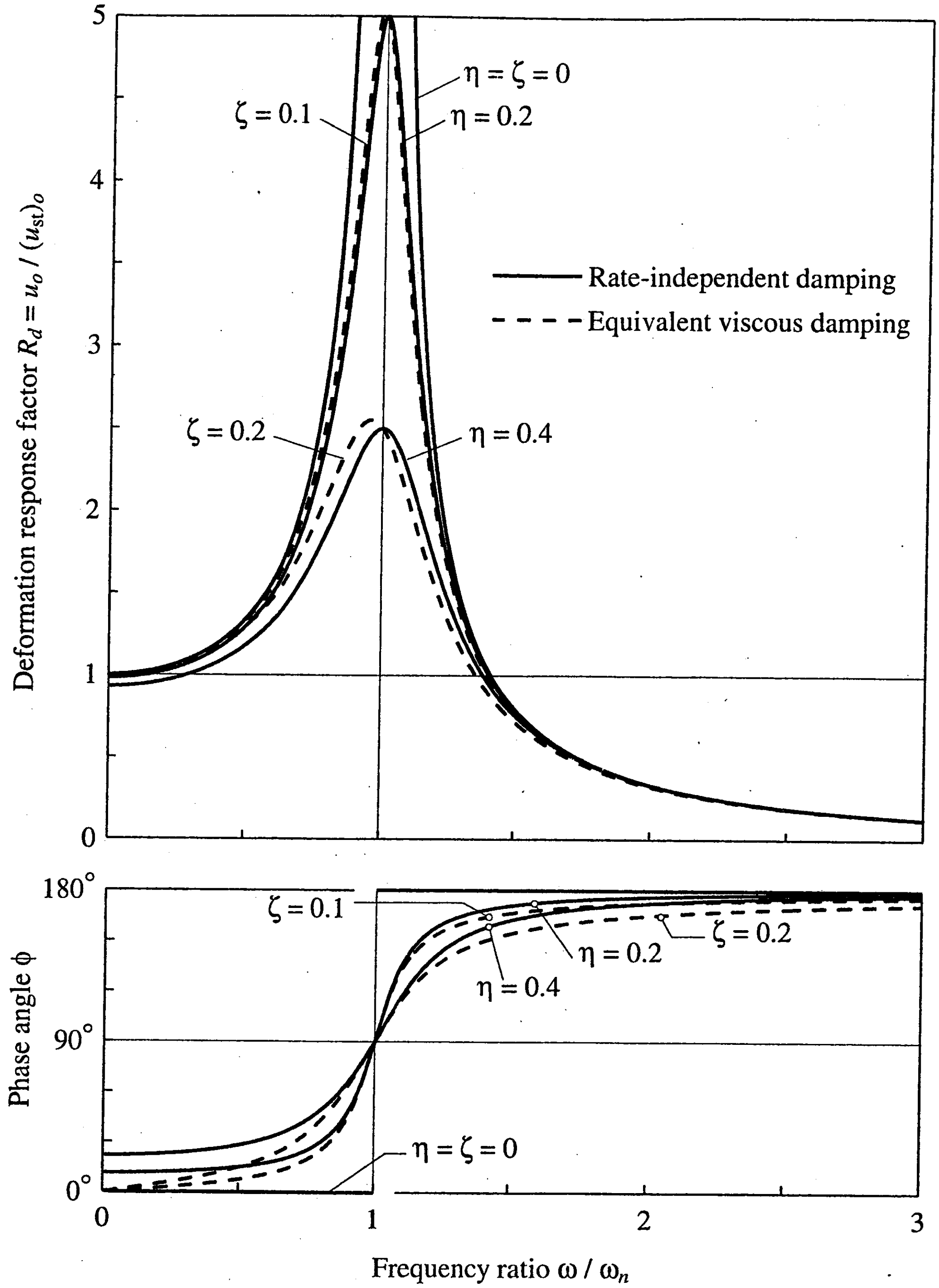


Figure 3.10.3 Response of system with rate-independent damping: exact solution and approximate solution using equivalent viscous damping.