Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 1 Syksy 2013.

1. Laske lausekkeiden numeeriset arvot kun:

$\mathbf{a} \in R^3;\ \mathbf{b} \in R^3$ $\qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a)$ $\quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad 1\cdot 0 - 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) = -9$

$b)$ $\quad \mathbf{a}\,\mathbf{b}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{bmatrix} 1\cdot 0 & 1\cdot 3 & 1\cdot(-1) \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 3 & -2\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}^{\mathrm{T}}) = 1$

$c)$ $\quad \mathbf{a}\,\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot(-2) & 3\cdot 1 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot(-2) & -2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & -2\cdot 3 & 3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{a}\,\mathbf{a}^{\mathrm{T}}) = 1$

$d)$ $$\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\mathbf{b}\bullet\mathbf{b}}\mathbf{b} = \frac{-9}{3\cdot 3 + (-1)^2}\mathbf{b} = -\frac{9}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.7 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

2. Jos matriisin $\mathbf{K}_{n\times n}$ käänteismatriisi $\mathbf{K}^{-1}$ ja determinantti $\det(\mathbf{K})$ tunnetaan, niin määritä matriisin $\alpha^m\mathbf{K}_{n\times n}$ käänteismatriisi ja determinantti, missä $\alpha \in R\ \ ja\ \ m \in N$

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \alpha^m \cdot \frac{1}{\alpha^m}\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \alpha^m \cdot \mathbf{K}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^m}\mathbf{K}^{-1}\right) = \mathbf{I}$$

$$\det\left(\alpha^m \cdot \mathbf{K}\right) = \left(\alpha^m\right)^n \det(\mathbf{K}) = \alpha^{m\cdot n}\det(\mathbf{K})$$

3. Laske alla olevien matriisien käänteismatriisit

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) = 9$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 1 Syksy 2013.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ Lasketaan alkioiden komplementit

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -0 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +3$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

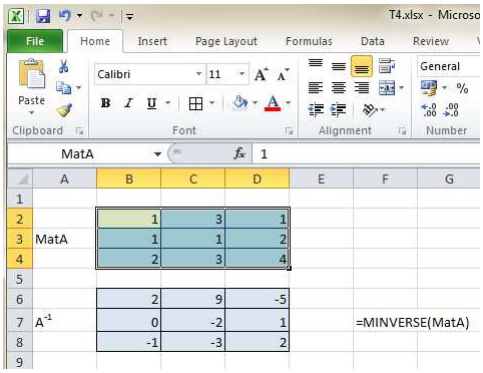
ja muodostetaan adjungoitu matriisi

$$adj\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -9 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1\cdot(-2) + 3\cdot(-0) + 1\cdot 1 = -1$$

joten

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$



Esim Excel: valitse matriisi ja kirjoita sille nimi vaikkapa MatA.
valitse sitten 3*3 alue ja kirjoita =minverse(mata) ja paina sitten Ctrl-Shift-Enter

4. Jos $x(\xi) = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3$ *ja* $u(\xi) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3$
niin määritä *x*, *u* ja derivaatat $D_\xi\left[u(\xi)\right]$ *ja* $D_x\left[u(\xi)\right]$ *pisteessä* $\xi = -0.5$

missä

$$N_1 = -\xi/2(1-\xi) \qquad N_1(-.5) = 3/8$$
$$N_2 = \xi/2(1+\xi) \qquad N_2(-.5) = -1/8$$
$$N_3 = 1-\xi^2 \qquad N_3(-.5) = 6/8$$

ja

$$x_1 = -2 \qquad u_1 = -.1$$
$$x_2 = 5 \qquad u_2 = .2$$
$$x_3 = 1 \qquad u_3 = .1$$

Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 1 Syksy 2013.

$$x(\xi)=\sum_{i=1}^{3}N_i(\xi)x_i=\frac{3}{8}\cdot(-2)-\frac{1}{8}\cdot 5+\frac{6}{8}\cdot 1=-\frac{5}{8}=-0.625$$

$$u(\xi)=\sum_{i=1}^{3}N_i(\xi)u_i=\frac{3}{8}\cdot(-.1)-\frac{1}{8}\cdot .2+\frac{6}{8}\cdot 0.1=0.0125$$

$$N_{1,\xi}=\xi-\frac{1}{2} \qquad N_{1,\xi}(-.5)=-1$$

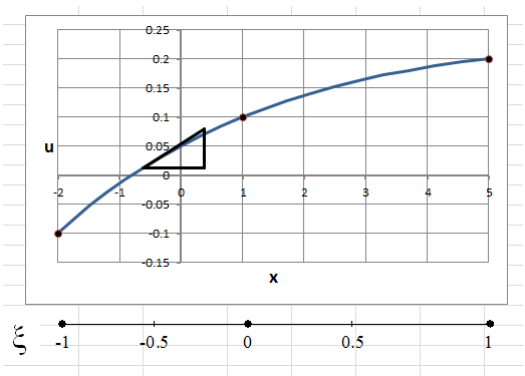
$$N_{2,\xi}=\xi+\frac{1}{2} \qquad N_{2,\xi}(-.5)=0$$

$$N_{3,\xi}=-2\xi \qquad N_{3,\xi}(-.5)=1$$

$$D_\xi\left[u(\xi)\right]=\sum_{i=1}^{3}N_{i,\xi}\,u_i \Rightarrow D_\xi\left[u(-0.5)\right]=-1\cdot(-.1)+0\cdot 0.2+1\cdot 0.1=0.2$$

$$D_\xi\left[x(\xi)\right]=\sum_{i=1}^{3}N_{i,\xi}\,x_i \Rightarrow \frac{dx}{d\xi}=-1\cdot(-2)+0\cdot 5+1\cdot 1=3$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}\Rightarrow\frac{du}{dx}(-0,5)=0.2\cdot\frac{1}{\left[\frac{dx}{d\xi}\right]}=\frac{0.2}{3}=0.067$$



Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos

EDE-21100 Elementtimenetelmän perusteet. Harjoitus 1 Syksy 2013.

5) Olkoon materiaalissa tasojännitystila ja käytetään lineaarisesti kimmoista isotrooppista materiaalimallia. Tällöin levyn jännityskomponentit voidaan laskea:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

E	70000	N/mm^2
ν	0.25	
ε_x	0.0025	
ε_y	0.0035	
γ_{xy}	-0.0015	

Jos levyn paksuus on 8 mm kuormittamattomana, niin laske levyn paksuus kuormitettuna.

Alla tehtävä on ratkaistu Excel-ohjelmalla

E	70000	N/mm^2
ν	0.25	
ε_x	0.0025	
ε_y	0.0035	
γ_{xy}	-0.0015	

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

	74666.67	18666.67	0	
MatD	18666.67	74666.67	0	MPa
	0	0	28000	

σ_x	252	MPa
σ_x	308	MPa
τ_{xy}	-42	MPa

ε_z	-0.002	$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$

t uusi	7.984 mm	$\left(1+\varepsilon_z\right)\cdot 8\,mm$

Tehtävä on ratkaistu myös MathCad 14- ohjelmalla. Jännityskomponentit on laskettu vektoriin kreikkalainen s. Ohjelmassa on oletusarvoisesti vektorin ensimmäinen indeksi 0 (voi vaihtaa), joten jännityskomponentti $\sigma_x = \sigma_0$. Ohjelmassa: s Ctrl-G . x : s Ctrl-G [0. Matriisin kertolasku on otettu matriisityökalun vasemmasta alareunasta.

$\varepsilon_x := 0.0025$ $\varepsilon_y := 0.0035$ $\gamma_{xy} := -0.0015$

$$\mathrm{MatE}(\nu, E) := \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \mathrm{MPa}$$

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0025 \\ 0.0035 \\ -0.0015 \end{pmatrix}$$

$$\sigma := (\mathrm{MatE}(0.25, 70000) \cdot \varepsilon) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 252 \\ 308 \\ -42 \end{pmatrix} \mathrm{MPa}$$

$\nu := 0.25$ E:=70000MPa

$$\varepsilon_z := \frac{-\nu}{E} \cdot \left(\sigma_0 + \sigma_1\right)$$

$$t_uusi := 8\mathrm{mm} \cdot \left(1 + \varepsilon_z\right) \rightarrow 7.984 \cdot \mathrm{mm}$$

PS. Verkosta löytyy myös Open Source ohjelmia jos sinulla ei ole käytössä kaupallisia ohjelmia. Alla muutama vaihtoehto:

MatLab kloonit: http://www.dspguru.com/dsp/links/matlab-clones

Symbolinen laskentaohjelma Maxima: http://maxima.sourceforge.net/

Open Office