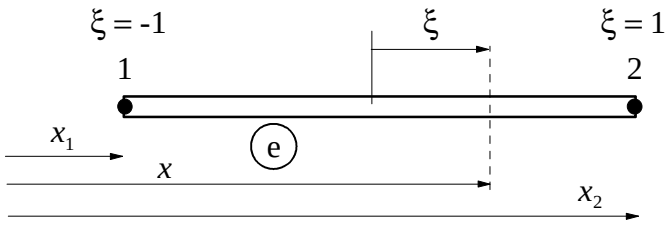
Yhden solmuvapausasteen sauvaelementti

Tarkastellaan kuvan mukaista sauvaelementtiä. Sauvan vasemmassa päässä on sauvan lokaalisolmu numero 1, jonka x-koordinaatti on x_1 ja vastaavasti oikeassa päässä lokaalisolmu numero 2, jonka x-koordinaatti on x_2.



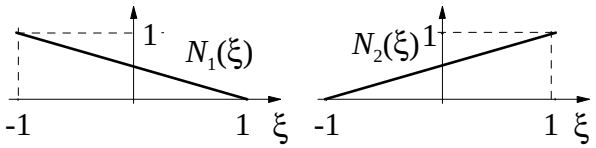
Kuva 1. Sauvaelementti ja sen emokooridinaatti ξ

Käytetään elementin alueella lisäksi niin sanottua emokoordinaatistoa, jossa emokoordinaatti ξ saa arvoja välillä [-1, 1]. Tällöin elementin pisteen ξ vastaava *x*-koordinaatti saa arvon

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \tag{1}$$

missä interpolaatiofunktiot tai toiselta nimeltä muotofunktiot ovat

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{2}$$

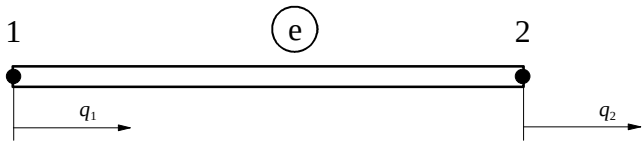


Kuva 2. Yksiulotteisten lineaaristen interpolaatiofunktioiden N_1 ja N_2 kuvaajat

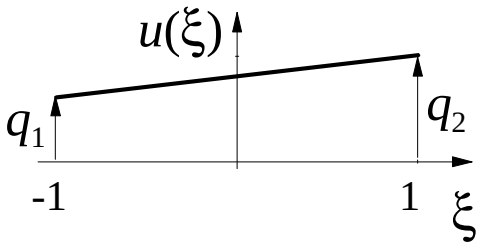
Elementin siirtymäkenttä interpoloidaan solmuarvoistaan käyttäen samoja muotofunktioita

$$u(\xi) = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_2 \tag{3}$$

missä q_1 ja q_2 ovat elementin solmusiirtymät



Kuva 3. Elementin lokaalit solmusiirtymät q_1 ja q_2



Kuva 4. Elementin siirtymäkentän interpolaatio

Elementin solmusiirtymät voidaan koota solmusiirtymävektoriksi $\mathbf{q}_e = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Vastaavasti muotofunktiot voidaan koota vaakavektoriksi $\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}$, jolloin elementin siirtymäkenttä voidaan lausua

$$u(\xi) = N_1(\xi) q_1 + N_2(\xi) q_2 = \mathbf{N}\,\mathbf{q}_e \tag{4}$$

Venymä elementin alueella saadaan derivoimalla siirtymäkenttää *x*-koordinaatin suhteen

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u_{,x} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \left(N_{1,\xi} q_1 + N_{2,\xi} q_2 \right) \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{q_2 - q_1}{2} \cdot \frac{d\xi}{dx} \tag{5}$$

derivoimalla *x*-koordinaatin lauseketta

$$x_{,\xi} = N_{1,\xi} x_1 + N_{2,\xi} x_2 = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{l_e}{2} = \frac{1}{\left[\frac{d\xi}{dx} \right]} \tag{6}$$

huomataan, että venymä voidaan lausua

$$\varepsilon = \frac{q_2 - q_1}{2} \cdot \frac{2}{l_e} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}_e = \mathbf{B}\,\mathbf{q}_e \tag{7}$$

missä **B** on kinemaattinen matriisi, jonka avulla voidaan lausua venymä elementin alueessa kun solmusiirtymät tunnetaan. Lineaarisesti kimmoisen isotrooppisen sauvan keskimääräinen jännitys saadaan yhteydestä

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}_e \tag{8}$$

Mikäli elementillä on kenttäkuormituksia, kuten painovoima, niin elementille voidaan laskea tarkemmat solmujännitykset elementtien solmuvoimien avulla, kuten kohdassa *Elementin solmuvoimat* näytetään.

Elementin jäykkyysmatriisi

Tarkastellaan elementin, jonka poikkileikkaus *A* oletetaan tässä vakioksi, kimmoenergian lauseketta

$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}\int_{l_e} \sigma^{\mathrm{T}} \varepsilon A\, dx = \frac{EA}{2}\int_{l_e} \varepsilon^{\mathrm{T}} \varepsilon\, dx = \frac{EA}{2}\int_{l_e} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}\, \mathbf{q}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} EA \int_{l_e} \frac{1}{l_e^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx\, \mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{q} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{k}_e \mathbf{q}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

missä matriisia $\mathbf{k}_e$ kutsutaan elementin jäykkyysmatriisiksi. Siis yhden solmuvapausasteen sauvaelementin jäykkyysmatriisi on

$$
\mathbf{k} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\tag{10}
$$

missä *E* on materiaalin kimmokerroin, *A* on elementin poikkipinta-ala ja elementin pituutena on nyt mitta *L*.

Tilavuusvoima

Elementin alueella vakiosuuruiseksi oletetun tilavuusvoiman *f* potentiaali saadaan summaamalla elementin tilavuuden yli

$$
WP_e = -\int_{l_e} u^{\mathrm{T}} f\, A\, dx = \mathbf{q}^{\mathrm{T}} f\, A \int_{l_e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, dx
\tag{11}
$$

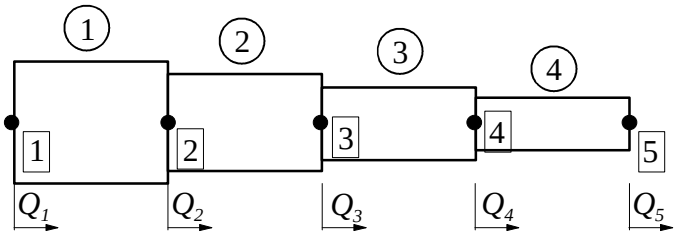
koska $dx = \frac{l_e}{2} d\xi$, niin

$$
\begin{aligned}
WP_e &= -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{f\, A l_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{bmatrix} d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{f\, A l_e}{4}\begin{bmatrix} \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi + \frac{\xi^2}{2} \end{bmatrix}_{-1}^{1} \\
&= -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{f\, A l_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^{V}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

missä vektoria $\mathbf{f}^{V}$ kutsutaan tilavuusvoiman ekvivalenttiseksi solmukuormitusvektoriksi. Sauvaelementin yhteydessä tilavuuskuormitus voidaan korvata viivakuormituksella kertomalla tilavuusvoima *f* elementin poikkipinta-alalla *A*. Mikäli kuormitus aiheutuu ulkoisesta paineesta voidaan se vastaavasti kertoa painekuormituksen leveydellä ja laskea tilavuuskuormituksesta aiheutuvan viivakuormituksen kanssa yhteen.

Potentiaalienergian minimi

Tarkastellaan kuvan neljän elementin laskentamallia. Lausutaan koko laskentamallin potentiaalienergia summaamalla kunkin elementin 1..4 kimmoenergia sekä ulkoisen kuormituksen potentiaalienergia. Tätä varten numeroidaan laskentamallin siirtymät Q_i, joita sanotaan globaalisiirtymiksi ykkösestä alkaen.



Kuva 5. Neljän sauvaelementin laskentamalli

$$U = \sum_{e=1}^{4} U_e \qquad WP = \sum_{e=1}^{4} WP_e \tag{13}$$

Otetaan käyttöön laskentamallin globaali siirtymävektori

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

ja lausutaan laskentamallin kimmoenergia globaalia siirtymävektoria **Q** käyttäen. Esimerkin laskentamallissa on viisi globaalisiirtymää, joten varataan globaaliin jäykkyysmatriisin **K** tilaa 5*5. Laskentamallin elementtien jäykkyysmatriisit ovat, kun oletetaan, että elementeillä on sama kimmokerroin.

$$\mathbf{k}_1 = \frac{E\,A_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{E\,A_2}{L_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_3 = \frac{E\,A_3}{L_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_4 = \frac{E\,A_4}{L_4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lisätään globaaliin jäykkyysmatriisiin elementin 1 osuus

$$\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{k}_1 = E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

missä operaattori $\leftarrow$ tarkoittaa niin sanottua sijoittelusummausta, jossa elementin jäykkyysmatriisi $\mathbf{k}_e$ summataan globaalin jäykkyysmatriisin **K** niille riveille ja sarakkeille, jotka vastaavat elementin e globaalisiirtymiä. Edellä olevassa siis elementin 1 globaalisiirtymät ovat Q_1 ja Q_2. Huomataan, että elementin 1 kimmoenergia (9) voidaan lausua myös edellä olevaa 5*5 jäykkyysmatriisia **K** ja globaalisiirtymävektoria **Q** käyttäen

$$U_1 = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{Q} \tag{15}$$

Lisätään globaaliin jäykkyysmatriisiin elementin 2 osuus

$$\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{k}_2 = E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2} & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jolloin elementtien 1 ja 2 kimmoenergiat voidaan lausua edellä olevaa jäykkyysmatriisia käyttäen

$$U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{Q} \tag{16}$$

Lisätään sitten globaaliin jäykkyysmatriisiin elementin3 osuus

$$\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{k}_3 = E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2} & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \frac{A_2}{L_2}+\frac{A_3}{L_3} & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{L_3} & \frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja lopuksi elementin 4 osuus

$$\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{k}_4 = E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2} & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \frac{A_2}{L_2}+\frac{A_3}{L_3} & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{L_3} & \frac{A_3}{L_3}+\frac{A_4}{L_4} & -\frac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{L_4} & \frac{A_4}{L_4} \end{bmatrix}$$

Koko laskentamallin kimmoenergia saadaan lausuttua globaalia siirtymävektoria **Q** ja globaalia jäykkyysmatriisia **K** käyttäen

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{Q} \tag{17}$$

Vastaavalla tavalla voidaan ulkoisen kuormituksen potentiaalienergia koota muotoon

$$WP = -\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{V} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} f_{11}^{V} \\ f_{12}^{V} + f_{21}^{V} \\ f_{22}^{V} + f_{31}^{V} \\ f_{32}^{V} + f_{41}^{V} \\ f_{42}^{V} \end{bmatrix} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} \tag{18}$$

missä f_{ij}^{V} on elementin *i* tilavuusvoiman aiheuttaman ekvivalenttisen solmukuormitusvektorin komponentti *j*. Edellä olevassa ulkoisen kuormituksen potentiaalienergiassa on huomioitu vain tilavuusvoiman osuus. Sauva- ja palkkielementeillä tilavuusvoiman ja painekuorman vaikutukset voidaan yhdistää ja korvata ne viivakuormituksella. Tilavuuskuormituksen tapauksessa tilavuusvoima *f* voidaan kertoa elementin poikkipinta-alalla *A*. Vektori **P** on annettu solmukuormitusvektori ja vektori **F** laskentamallin globaali solmukuormitusvektori.

Derivoimalla kokonaispotentiaalienergian lauseketta siirtymien Q_i suhteen päädytään koko laskentamallin tasapainoyhtälöön, joka on lausuttu symbolisessa muodossa

$$\mathbf{K}\,\mathbf{Q} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Eliminointimenetelmä

Saatu yhtälöryhmä on singulaarinen, koska siinä on jäykän kappaleen liikemahdollisuus. Tämä liikemahdollisuus poistetaan antamalla riittävä määrä ennalta määrättyjä siirtymiä. Kahden vapausasteen sauvaelementtimallissa riittää kun annetaan yksi siirtymä, mutta annettuja solmusiirtymiä voi olla useampiakin.

Oletetaan, että kuvan laskentamallissa solmun 1 siirtymä Q_1 on nolla eli laskentamallin vasen pää on liikkumaton. Tällöin riittää kun pyyhitään yhtälöryhmän vastaava rivi ja sarake pois laskennasta. Edellyttäen, että elementtien pituudet, pinta-alat ja kimmokertoimet ovat positiivisia, niin jäljelle jäänyt yhtälöryhmä

$$\mathbf{K}\,\mathbf{Q} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \tag{20}$$

ratkeaa. Jos solmun 1 siirtymä Q_1 on tunnettu ja erisuuri kuin nolla vaikkapa a_1, niin helposti huomaat, että redusoitua yhtälöryhmää on muokattava seuraavanlaiseksi

$$\mathbf{K}\,\mathbf{Q} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 - K_{21}a_1 \\ F_3 - K_{31}a_1 \\ F_4 - K_{41}a_1 \\ F_5 - K_{51}a_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Jos solmun i siirtymä Q_i on tunnettu, niin vastaavasti pyyhitään rivi i ja sarake i pois yhtälöryhmästä ja tehdään vastaava korjaus laskentamallin globaalikuormitusvektorille **F**.

Sakkomenetelmä (Penalty Method)

Eräs vaihtoehtoinen tapa hoitaa annetut siirtymät on sakkomenetelmä. Sakkomenetelmä on helppo ohjelmoida tietokoneelle ja sillä voidaan käsitellä myös yleisempi siirtymärajoite (Multipoint constraint), kuten laskuharjoituksissa käsitellään. Tarkastellaan tässä vain annettua siirtymää $Q_1 = a_1$.

Sakkomenetelmässä asetetaan siirtymävapausasteelle jäykkä jousi, jonka jousivakio olkoon C. Jousi on levossa kun siirtymä $Q_1 = a_1$. Jousen kimmoenergia

$$U_s = \frac{1}{2}C\left(Q_1 - a_1\right)^2 \tag{22}$$

Laskentamallin kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{Q} + \frac{1}{2}C\left(Q_1 - a_1\right)^2 - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} \tag{23}$$

josta derivoimalla siirtymäkomponenttien **Q** suhteen saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} K_{11}+C & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + Ca_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \tag{24}$$

vastaava menettely voidaan tehdä kaikille annetuille siirtymille. Menetelmä on likimääräinen ja sen tarkkuus riippuu jousivakiosta C. Sopiva jäykkyys voisi olla $C = 10^5 \cdot \max K_{ii}$.

Lämpötilan muutoksen vaikutus

Mikäli sauvaelementin lämpötila muuttuu niin sanottuun referenssilämpötilaan verrattuna määrä ΔT, niin siitä aiheutuu elementtiin venymä $\varepsilon_0 = \alpha \Delta T$. Koska kiinnittämättömään elementtiin ei aiheudu lämpötilan muutoksesta jännityksiä, niin jännityksen lauseke on tällöin

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) \tag{25}$$

Elementin kimmoenergian lauseke on nyt

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\int_{l_e} \sigma^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) A\,dx = \frac{1}{2}\int_{l_e} \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)^{\mathrm{T}} E\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) A\,dx \\ &= \frac{EA}{2}\int_{l_e} \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon\,dx - EA\int_{l_e} \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon_0\,dx + \frac{EA}{2}\int_{l_e} \varepsilon_0^{\mathrm{T}}\varepsilon_0\,dx \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}} EA\alpha\Delta T\int_{l_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} dx + U_e^{\theta} \end{aligned} \tag{26}$$

Huomataan, että viimeinen termi on vakio, jolloin sen vaikutus häviää derivoitaessa kimmoenergian lauseketta solmusiirtymien **q** suhteen. Keskimmäinen termi voidaan lausua muodossa

$$-\mathbf{q}^{\mathrm{T}} EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e \tag{27}$$

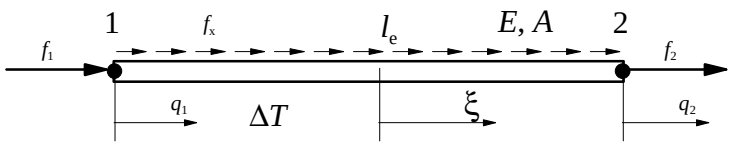
missä vektoria

$$\mathbf{\Theta}_e = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

kutsutaan lämpötilan muutoksen aiheuttamaksi ekvivalenttiseksi solmukuormitusvektoriksi. Kaavassa α on pituuden lämpölaajenemiskerroin [1/K] tai [1/^{0}C] ja ΔT [K] tai [^{0}C] on lämpötilan muutos referenssilämpötilaan verrattuna.

Elementin solmuvoimat

Elementin solmuvoimien selvittämiseksi tarkastellaan yksittäisen elementin potentiaalienergiaa. Kuvassa on esitetty elementin solmujen 1 ja 2 solmuvoimat f_1 ja f_2.



Kuva 6. Sauvaelementin solmuvoimat f_1 ja f_2

Elementin kimmoenergia on yhtälön (26) mukaan

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e + U_e^{\theta} \tag{29}$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaalienergia koostuu elementin kenttäkuormituksen potentiaalienergiasta sekä solmuvoimien potentiaalienergiasta

$$WP_e = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^V - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{30}$$

missä solmuvoimat f_1 ja f_2 on koottu solmuvoimavektoriksi **f**. Potentiaalienergian

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e + U_e^{\theta} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^V - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{31}$$

minimin periaatteesta saadaan derivoimalla solmusiirtymävektorin **q** suhteen

$$\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{\Theta}_e - \mathbf{f}^V - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{32}$$

josta solmuvoimavektoriksi **f** saadaan

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{\Theta}_e - \mathbf{f}^V \tag{33}$$

Kaavakokoelmassa yhtälössä on vielä mukana paineesta aiheutuva ekvivalenttinen solmukuormitusvektori, mutta tämä voidaan sauvojen ja palkkien yhteydessä yhdistää tilavuuskuormituksesta aiheutuvaan ekvivalenttiseen solmukuormitusvektoriin $\mathbf{f}^V$.

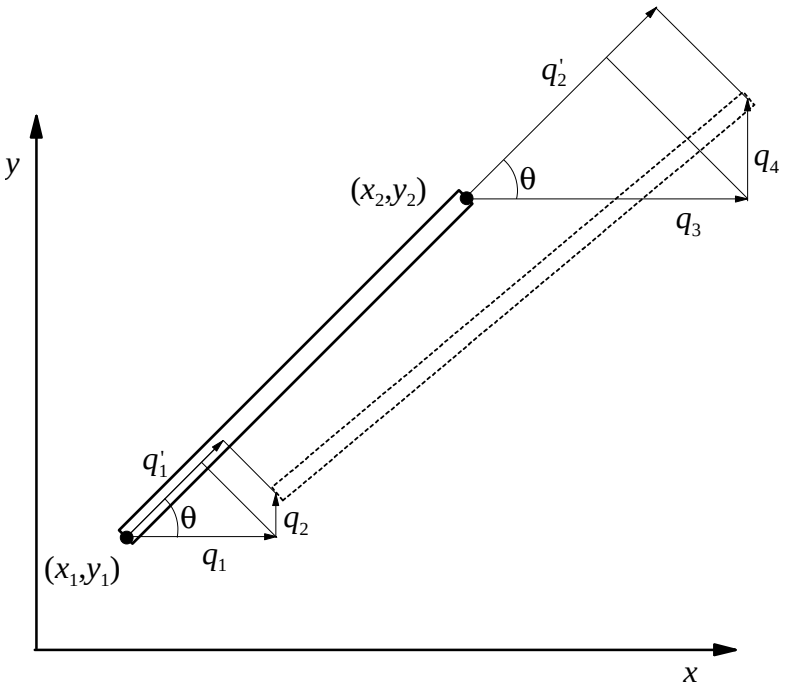
Kuvasta 6 huomataan, että sauvaelementin solmun 1 normaalivoimaksi N_1 saadaan solmuvoima f_1 vastakkaismerkkisenä ja solmun 2 normaalivoimaksi N_2 saadaan solmuvoima f_2 eli

$$\begin{aligned} N_1 &= -f_1 \\ N_2 &= f_2 \end{aligned} \tag{34}$$

joiden avulla voidaan laskea tarkemmat solmujännitykset, kuin yhtälöllä (8), mikäli elementillä on kenttäkuormituksia tai sen poikkileikkaus muuttuu.

Kahden solmuvapausasteen sauvaelementti

Kahden solmuvapausasteen sauvaelementti voi sijaita mielivaltaisessa asennossa xy-tasossa. Sauvan alkupäässä on sauvan lokaalisolmu numero 1, jonka x-koordinaatti on x_1 ja y-koordinaatti on y_1, vastaavasti loppupäässä on lokaalisolmu numero 2, jonka x-koordinaatti on x_2 ja y-koordinaatti on y_2. Kuvassa on esitetty sauvaelementti alkutilanteessa (yhtenäinen viiva) sekä siirtyneessä tilassa (katkoviiva). Kuvaan on piirretty xy-mittauksen suuntaiset siirtymät $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ sekä sauvan suuntaiset siirtymät $\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_1' & q_2' \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.



Kuva 7. Tasosauvaelementin siirtymät xy-koordinaatistossa ja sauvan paikalliskordinaatistossa

Kuvasta nähdään, että sauvan suuntaiset siirtymät voidaan lausua

$$\begin{cases} q_1' = q_1 \cos\theta + q_2 \sin\theta = q_1 l + q_2 m \\ q_2' = q_3 \cos\theta + q_4 \sin\theta = q_3 l + q_4 m \end{cases} \tag{35}$$

missä l ja m ovat sauvan suuntakosinit (m on komplementtikulman kosini). Ottamalla käyttöön lyhenteet $x_{21} = x_2 - x_1, y_{21} = y_2 - y_1$ voidaan suuntakosinit laskea

$$\begin{cases} l = \dfrac{x_{21}}{l_e} \\ m = \dfrac{y_{21}}{l_e} \end{cases} \tag{36}$$

missä sauvan pituus l_e saadaan

$$l_e = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \tag{37}$$

Yhteys voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix} = \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\,\mathbf{q} \tag{38}$$

Venymä elementin alueella saadaan sauvan suuntaisten siirtymien (7) avulla

$$\varepsilon = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{q}' = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{L}\,\mathbf{q} = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\mathbf{q} = \mathbf{B}\,\mathbf{q} \tag{39}$$

missä kinemaattinen matriisi $\mathbf{B} = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}$

Lineaarisesti kimmoisen isotrooppisen sauvan keskimääräinen jännitys saadaan taaskin yhteydestä

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\mathbf{B}\,\mathbf{q} \tag{40}$$

Elementin jäykkyysmatriisi

Sauvaelementin kimmoenergian suuruus ei saa riippua käytetystä mittausjärjestelmästä, joten

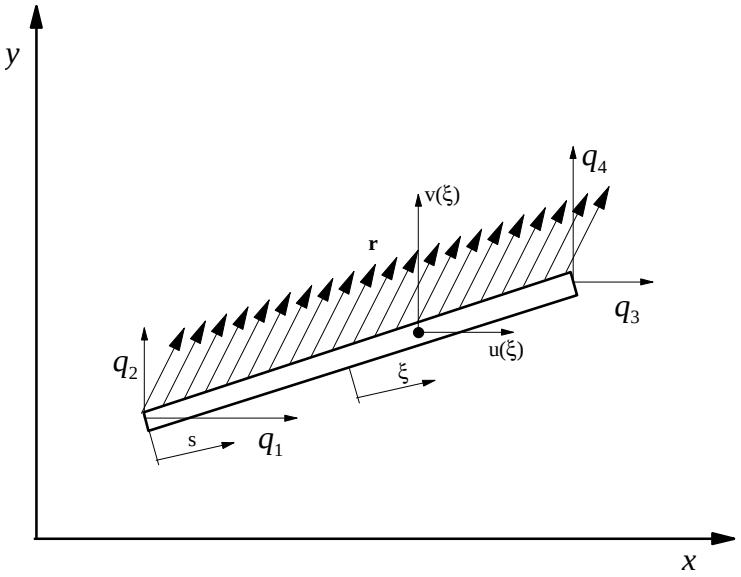
$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e'\mathbf{q}' = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e'\mathbf{L}\,\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q}$$

ja jäykkyysmatriisiksi saadaan

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e'\mathbf{L} = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Viivakuormitus

Koska tilavuusvoima ei enää ole välttämättä sauvan suuntainen, niin korvataan se viivakuormituksella. Elementin pintaan kohdistuva painekuormitus käsitellään vastaavalla tavalla. Tässä esityksessä käytetään vakiosuuruiseksi oletetulle vektoriarvoiselle viivakuormitukselle merkintää **r**, jotta se erottuisi elementin solmusiirtymävektorista **q**. Kuvassa on esitetty tasainen viivakuormitus **r**, jolla on kaksi komponenttia $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.



Kuva 8. Sauvaelementtiin kohdistuva vektoriarvoinen viivakuormitus r, joka on vakio

Viivakuormituksen potentiaalienergian laskemiseksi tulee ensin määrittää sauvan pisteen siirtymät *x*- ja *y*-suuntaan. Käytetään siirtymien lausekkeina

$$\begin{cases} u(\xi) = N_1(\xi)q_1 + N_2(\xi)q_3 \\ v(\xi) = N_1(\xi)q_2 + N_2(\xi)q_4 \end{cases} \tag{42}$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N}\mathbf{q} \tag{43}$$

Viivakuorman potentiaali on nyt

$$WP = -\int_s \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}\,ds = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\int_s \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}\,ds$$

Integrointi ulotetaan sauvan pituuden l_e yli, jolloin ξ saa arvoja [-1,1], joten

$$\begin{aligned} WP &= -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}\,d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} d\xi \\ &= -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} N_1 r_x \\ N_1 r_y \\ N_2 r_x \\ N_2 r_y \end{bmatrix} d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{l_e}{4}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} (1-\xi)r_x \\ (1-\xi)r_y \\ (1+\xi)r_x \\ (1+\xi)r_y \end{bmatrix} d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{l_e}{2}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{44}$$

joten tasaisen viivakuormituksen aiheuttamat ekvivalenttiset solmukuormitukset ovat

$$\mathbf{f}^V = \frac{l_e}{2}\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \tag{45}$$

eli puolet kuormituksen resultantista tulee solmulle 1 ja puolet solmulle 2.

Lämpötilan muutoksen vaikutus

Sauvaelementin ulkoisen kuormituksen potentiaalin suuruus ei saa riippua käytetystä mittausjärjestelmästä, joten saadaan

$$-\mathbf{q}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}'_e = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e \tag{46}$$

eli

$$-\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}'_e = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e \qquad \forall\mathbf{q} \tag{47}$$

joten

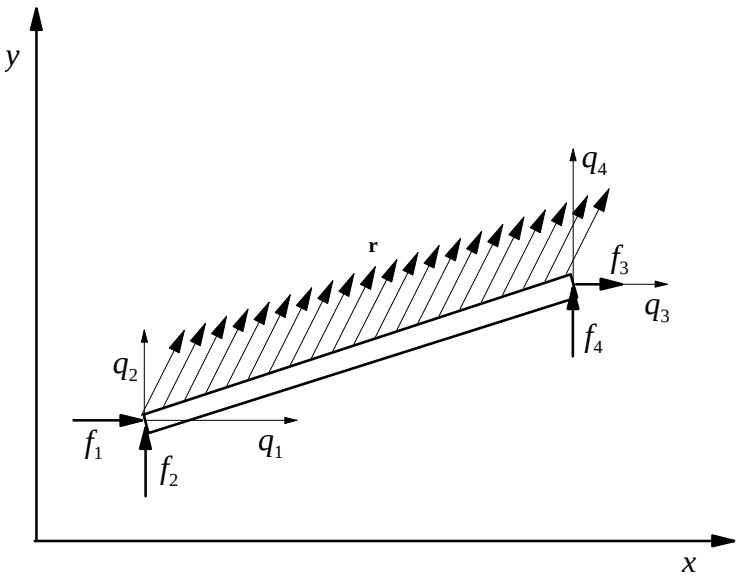
$$\mathbf{\Theta}_e = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}'_e = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{bmatrix} \tag{48}$$

missä vektoria

$$\mathbf{\Theta}_e = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{bmatrix} \tag{49}$$

kutsutaan lämpötilan muutoksen aiheuttamaksi ekvivalenttiseksi solmukuormitusvektoriksi neljän vapausasteen sauvaelementille.

Neljän vapausasteen elementin solmuvoimat



Kuva 9. Neljän vapausasteen elementin solmuvoimat

Solmuvoimien selvittämiseksi tarkastellaan taas yksittäisen elementin potentiaalienergiaa. Kuvassa on esitetty elementin solmujen 1 ja 2 solmuvoimat f_1, f_2, f_3 ja f_4.

Elementin kimmoenergia on edelleen, vaikka mittausjärjestelmä on nyt globaalisuuntaan, yhtälön (26) mukaan

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e + U_e^{\theta} \tag{50}$$

Ulkoisen kuormituksen potentiaalienergia koostuu elementin kenttäkuormituksen potentiaalienergiasta sekä solmuvoimien potentiaalienergiasta

$$WP_e = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^V - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{51}$$

missä solmuvoimat f_1, f_2, f_3 ja f_4 on koottu solmuvoimavektoriksi **f**. Potentiaalienergian

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_e + U_e^{\theta} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^V - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{52}$$

minimin periaatteesta saadaan derivoimalla solmusiirtymävektorin **q** suhteen

$$\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{\Theta}_e - \mathbf{f}^V - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{53}$$

josta solmuvoimavektoriksi **f** saadaan

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{\Theta}_e - \mathbf{f}^V \tag{54}$$

Kuvasta 9 huomataan, että sauvaelementin solmun 1 normaalivoimaksi N_1 saadaan solmuvoimien f_1 ja f_2 projektiot sauvan suuntaan vastakkaismerkkisenä ja solmun 2 normaalivoimaksi N_2 saadaan solmuvoimien f_3 ja f_4 projektiot eli

$$\begin{aligned} N_1 &= -f_1\, l - f_2\, m \\ N_2 &= f_3\, l + f_4\, m \end{aligned} \tag{55}$$

joiden avulla voidaan laskea tarkemmat solmujännitykset, kuin yhtälöllä (40), mikäli elementillä on kenttäkuormituksia tai sen poikkileikkaus muuttuu.

Kolmen solmuvapausasteen sauvaelementti

Kolmen solmuvapausasteen sauvaelementti voi sijaita mielivaltaisessa asennossa *xyz*-tasossa. Sauvan alkupäässä on sauvan lokaalisolmu numero 1, jonka *x*-koordinaatti on x_1, *y*-koordinaatti on y_1 ja *z*-koordinaatti on z_1, vastaavasti loppupäässä on lokaalisolmu numero 2, jonka *x*-koordinaatti on x_2, *y*-koordinaatti on y_2 ja *z*-koordinaatti on z_2. Sauvan suuntaiset siirtymät voidaan nyt lausua

$$\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix} = \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\,\mathbf{q} \tag{56}$$

Kolmen solmuvapausasteen sauvaelementin kuormitusvektorit ja jäykkyysmatriisi saadaan soveltamalla kahden solmuvapausasteen elementin kaavoja ja käyttäen edellä olevaa **L** matriisia. Esimerkiksi jäykkyysmatriisi

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e'\mathbf{L} &= \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ n & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \\ &= \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{57}$$