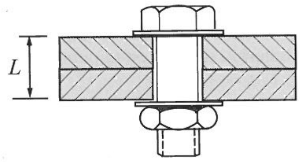
Johdatus materiaalimalleihin

12. harjoitus - virumismallit

1. Alla olevan kuvan ruuvin poikkileikkausala on A. Ruuvissa on esijännitys σ_0. Levyjen, joita ruuvi liittää, materiaalin voi olettaa jäykäksi. Ruuvin materiaalin konstitutiivinen yhtälö on (Norton-Bailey virumismalli)

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}\dot{\sigma} + \frac{1}{t_\mathrm{c}}\left(\frac{\sigma}{\sigma_\mathrm{ref}}\right)^p.$$

   Määritä aika, jolloin ruuvin jännitys on relaksaation ansiosta pienentynyt puoleen alkuperäisestä. Materiaaliparametrien ja mittojen arvot ovat $E = 200$ GPa, $\sigma_0 = 100$ MPa, $\sigma_\mathrm{ref} = 100$ MPa, $p = 4$, $t_\mathrm{c} = 10^4$ h.



2. Tarkastellaan potenssimuotoista epälineaarista virumismallia (Norton-Bailey)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{c} = \frac{1}{t_\mathrm{c}}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_\mathrm{r}}\right)^p \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \tag{1}$$

   jossa t_c ja p ovat mallin materiaaliparametreja ja σ_r on mielivaltainen viitejännitys tai vastusjännitys (engl. drag stress). Von Misesin tehollista jännitystä on merkitty $\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$, jossa J_2 on jännitysdeviaattorin toinen invariantti. Parametrilla t_c on ajan dimensio. Määritä relaksaatioaika τ. Ratkaise jännityksen relaksaatio kun vetosauva vedetään siten, että siihen syntyy sauvan suuntainen ε_0:n suuruinen venymä. Piirrä tapaukset $\varepsilon_0 = \varepsilon_\mathrm{r}$ ja $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_\mathrm{r}$ käyttämällä potenssille p arvoja $p = 1, 3, 5$ ($\varepsilon_\mathrm{r} = \sigma_\mathrm{r}/E$, jossa E on materiaalin kimmokerroin).

3. Tarkastellaan edelleen potenssimuotoista virumismallia. Valitaan nyt virumisvenymän evoluutioyhtälöksi muoto

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{c} = \frac{1}{t_\mathrm{c}}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0 + K}\right)^p \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}},$$

   jossa σ_0 on kuormittamattoman materiaalin myötöjännitys, t_c (ajan dimensio) ja p (dimensioton) materiaaliparametreja ja lujittumissääntö on saturoituvaa muotoa

$$K = K_\infty(1 - \exp(-h\bar{\varepsilon}^\mathrm{c}/K_\infty)).$$

   Tehollinen virumisvenymä määritellään

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^\mathrm{c} = \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}^\mathrm{c}_{ij}\dot{\varepsilon}^\mathrm{c}_{ij}}, \qquad \bar{\varepsilon}^\mathrm{c} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^\mathrm{c}\,\mathrm{d}t.$$

   Tehollinen jännitys on tavanomainen von Mises jännitys $\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$. Huomaa, että monotonisessa yksiakselisessa jännitystilassa tehollinen virumisvenymä yhtyy jännityksen suuntaiseen venymään tai sen itseisarvoon mikäli jännitys on puristusta.

   Tutki mallin virumiskäyttäytymistä eri virumisexponentin p arvoilla $p = 1, 2, 4$ yksiakselisen vakiojännitystilan alaisuudessa $\sigma_{11} = \sigma$, muut komponentit nollia. Kimmoisa materiaalimalli on lineaarinen ja isotrooppinen ja jonka kimmokerroin on E.

Käytä jännityksen arvoja $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_0$ ja σ_0. Oleta seuraavat suhteet materiaaliparametrien välillä: $K_\infty = \sigma_0, h = E/50$ ja $E/\sigma_0 = 500$.

Ratkaisun voi suorittaa vaikka eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä, jossa ratkaistaessa alkuarvotehtävää $\dot{y} = f(y)$, korvataan differenssilausekkeella

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(y_n),$$

jossa $y_n = y(t_n)$ on tunnettu tila ajanhetkellä t_n ja ratkaisua haetaan ajanhetkellä $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Muista, että ekplisiittinen Eulerin menetelmä on vain ehdollisesti stabiili, joten aika-askeleen on oltava kriittistä aika-askelta pienempi.